应用概率统计　第二十二卷
第三期　2006 年 8 月

Chinese Journal of Applied Probability
and Statistics Vol. 22 No. 3 Aug. 2006

关于绝对矩的几个性质

安　鸿　志
(中国科学院数学与系统科学研究院，北京，100080)

摘　要

本文研究了独立随机变量之和的绝对矩的几个性质，其中包括 $\mathsf{E}|X+Y|-\mathsf{E}|X-Y|$ 的表达式，这里 X 和 Y 是相互独立的随机变量.

关 键 词：相互独立，相同分布，绝对矩.
学 科 分 类 号：O211.5.

§1.　引　　言

对于独立同分布随机变量 X_1 和 X_2, 当 $\mathsf{E}|X_1|<\infty$ 时，有如下不等式

$$\mathsf{E}|X_1+X_2|\ge\mathsf{E}|X_1|. \tag{1.1}$$

此结果是 2004 年 Putnam 数学竞赛 B6 题的推论．本文为了证明此式，提出并证明更强的结果

$$\mathsf{E}|X_1+X_2|\ge\mathsf{E}|X_1-X_2|. \tag{1.2}$$

为证明此式，又研究了独立随机变量 X 与 Y 之和与差的绝对矩，并得到了 $\mathsf{E}|X+Y|-\mathsf{E}|X-Y|$ 的表达式，使得 (1.2) 式成为它的简单推论．

本文还研究了独立同分布随机变量 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 之和的绝对矩．记 $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}X_k$, 由 (1.1) 式可知 $\mathsf{E}|S_2|\ge\mathsf{E}|S_1|$. 但是，本文给出反例，说明 $\{\mathsf{E}|S_n|\}$ 并不随 $n\ (\ge 2)$ 单调增大．不过，却证明了 $\{\mathsf{E}|S_n|\}$ 的尾部总是单调非降的．现在分不同情况介绍这些结果．

§2.　二元独立随机变量

定理 2.1　如果 X 和 Y 为相互独立的随机变量，且 $\mathsf{E}|X|<\infty$, $\mathsf{E}|Y|<\infty$, 记 X 和 Y 的分布函数分别为 F 和 G, 则有

$$\mathsf{E}|X+Y|-\mathsf{E}|X-Y|=\int_0^\infty\{1-F(u)-F(-u)\}\{1-G(u)-G(-u)\}\mathrm{d}u. \tag{2.1}$$

证明：　首先叙述以下事实：若 Z 为非负随机变量，且 $\mathsf{E}|Z|<\infty$, 则有

$$\mathsf{E}Z=\int_0^\infty\mathsf{P}(Z>u)\mathrm{d}u. \tag{2.2}$$

本文 2006 年 1 月 4 日收到.

现在考查以下表达式

$$\frac{|X+Y|-|X-Y|}{2}=\begin{cases}\min(X,Y), & X\ge 0,\ Y\ge 0,\\ -\min(X,-Y), & X\ge 0,\ Y<0,\\ -\min(-X,Y), & X<0,\ Y\ge 0,\\ \min(-X,-Y), & X<0,\ Y<0.\end{cases} \tag{2.3}$$

取 $Z=\min(X,Y)I(X\ge 0,Y\ge 0)$, 对于 $u\ge 0$, 有 $\mathsf{P}(Z>u)=\{1-F(u)\}\{1-G(u)\}$. 以此代入 (2.2) 式，可得

$$\mathsf{E}Z=\mathsf{E}\min(X,Y)I(X\ge 0,Y\ge 0)=\int_0^\infty\{1-F(u)\}\{1-G(u)\}\mathrm{d}u,$$

类似地可得

$$\mathsf{E}Z=\mathsf{E}\min(-X,Y)I(X<0,Y\ge 0)=\int_0^\infty F(-u)\{1-G(u)\}\mathrm{d}u,$$
$$\mathsf{E}Z=\mathsf{E}\min(X,-Y)I(X\ge 0,Y<0)=\int_0^\infty\{1-F(u)\}G(-u)\mathrm{d}u,$$
$$\mathsf{E}Z=\mathsf{E}\min(-X,-Y)I(X<0,Y<0)=\int_0^\infty F(-u)G(-u)\mathrm{d}u,$$

将以上四式相加后，再代入 (2.3) 式，立刻可得 (2.1) 式． #

推论 2.2 若 X 和 Y 为独立同分布的随机变量，且 $\mathsf{E}|X|<\infty$, 则有

$$\mathsf{E}|X+Y|\ge\mathsf{E}|X-Y|. \tag{2.4}$$

而且，当且仅当 X 具有对称分布时， $\mathsf{E}|X+Y|=\mathsf{E}|X-Y|$ 成立．

证明: 利用定理 2.1 中 (2.1) 式，及 $G(u)=F(u)$, 立刻可得此推论的结果． #

推论 2.3 若 X 和 Y 为独立同分布的随机变量，且 $\mathsf{E}|X|<\infty$, 则有

$$\mathsf{E}|X+Y|\ge\mathsf{E}|X|. \tag{2.5}$$

证明: 利用推论 2.2 的 (2.4) 式有

$$\mathsf{E}|X+Y|=(1/2)\{\mathsf{E}|X+Y|+\mathsf{E}|X+Y|\}\ge(1/2)\{\mathsf{E}|X+Y|+\mathsf{E}|X-Y|\}\ge\mathsf{E}|X|. \qquad \#$$

以下讨论 (2.4) 式的一种推广结果．显然， $\mathsf{E}|X+Y|^2\ge\mathsf{E}|X-Y|^2$, 再结合 (2.1) 式可知, $\mathsf{E}|X+Y|^r\ge\mathsf{E}|X-Y|^r$, 当 $r=1$ 或 2 时．于是，一种自然而然的推广猜测是：对于 $r>0$ 时，上式成立吗？很遗憾，当 $r=4$ 时就有如下的反例，即取

$$\mathsf{P}(X=-2)=1/4,\qquad \mathsf{P}(X=1)=3/4,$$

则有 $\mathsf{E}|X+Y|^4<\mathsf{E}|X-Y|^4$. 但是，对于 $0<r\le 2$ 时，前一不等式的确成立，见如下定理．

定理 2.4　若 X 和 Y 为独立同分布的随机变量，且当 $0<r\le 2$ 时 $\mathsf{E}|X|^r<\infty$, 则有

$$\mathsf{E}|X+Y|^r \ge \mathsf{E}|X-Y|^r. \tag{2.6}$$

证明：　当 $r=2$ 时，(2.6) 式显然成立，因此只考虑 $0<r<2$ 的情况．利用截尾逼近的方法，又不妨假定 $\mathsf{E}|X|^2<\infty$. 于是有

$$\mathsf{E}|X|^r = \frac{\Gamma(r+1)\sin(r\pi/2)}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1-\mathrm{Re}f(t)}{|t|^{r+1}}\mathrm{d}t.$$

此式可见于 Chung (1974, P158-159), 其中 $f(t)$ 是 X 的特征函数， $\mathrm{Re}f$ 表示 f 的实部分．

易见， $X+Y$ 和 $X-Y$ 的特征函数分别是 $f(t)^2$ 和 $|f(t)^2|$, 利用上式，可得

$$\mathsf{E}|X+Y|^r - \mathsf{E}|X-Y|^r = \frac{\Gamma(r+1)\sin(r\pi/2)}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|f(t)|^2-\mathrm{Re}f(t)^2}{|t|^{r+1}}\mathrm{d}t.$$

不难看出， $|f(t)|^2-\mathrm{Re}f(t)^2\ge 0$, 从而上式是非负的，由此可得 (2.6) 式．　#

推论 2.5　若 X 和 Y 为独立同分布的随机变量，且当 $1\le r\le 2$ 时 $\mathsf{E}|X|^r<\infty$, 则有

$$\mathsf{E}|X+Y|^r \ge \mathsf{E}|X|^r. \tag{2.7}$$

证明：　利用如下不等式 $\{|X+Y|^r+|X-Y|^r\}/2\ge |X|^r$, 再用 (2.6) 式，可得

$$\mathsf{E}|X+Y|^r \ge \mathsf{E}\{|X+Y|^r+|X-Y|^r\}/2 \ge \mathsf{E}|X|^r. \qquad \#$$

§3.　多元独立同分布随机变量

考查独立同分布随机变量序列 $X_1, X_2, \cdots, X_n$, 它们满足 $\mathsf{E}|X_1|<\infty$. 记 $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}X_k$. 如果 $\mathsf{E}X_1=0$, 易见， $\{|S_n|\}$ 是上鞅，于是， $\{\mathsf{E}|S_n|; n\ge 1\}$ 是非降的．当 $\mathsf{E}X_1\ne 0$ 时，虽然 $\{|S_n|\}$ 不一定是上鞅，但是，依 (2.5) 式仍有 $\mathsf{E}|S_2|\ge \mathsf{E}|S_1|$. 不过，此时 $\{\mathsf{E}|S_n|; n\ge 2\}$ 不一定是非降的，这可由以下的例子看出．

例 3.1　设 X_1, X_2 和 X_3 为独立同分布随机变量，且

$$\mathsf{P}(X_1=1)=0.313, \qquad \mathsf{P}(X_1=-1/2)=0.687.$$

易验证

$$\mathsf{E}|X_1+X_2|=0.882938, \qquad \mathsf{E}|X_1+X_2+X_3|=0.881228109.$$

于是有

$$\mathsf{E}|X_1+X_2| > \mathsf{E}|X_1+X_2+X_3|.$$

虽然 $\{\mathsf{E}|S_n|; n\ge 2\}$ 不一定是非降的，但是，它的尾部总是非降的．欲论证此结果，先要给出如下的引理．

引理 3.2 设 X 和 Y 为独立随机变量，且 $\mathsf{E}|X|<\infty$, $\mathsf{E}|Y|<\infty$. 记 $\mu=\mathsf{E}X$, λ 是 Y 的中位数. 那么,

$$\text{当 } \mu\lambda \geq 0 \text{ 时，必有 } \mathsf{E}|X+Y| \geq \mathsf{E}|Y|. \tag{3.1}$$

证明: 依 X 和 Y 的独立假定，则有

$$\mathsf{E}|Y+X| = \mathsf{E}\mathsf{E}\{|Y+X|\,|Y\} \geq \mathsf{E}|\mathsf{E}\{(Y+X)|Y\}| = \mathsf{E}|Y+\mathsf{E}X| = \mathsf{E}|Y-(-\mu)|. \tag{3.2}$$

再注意这一事实：在 $u\in(-\infty,\lambda)$ 时， $\mathsf{E}|Y-u|$ 是 u 的单调非增函数. 在 $u\in(\lambda,\infty)$ 时, $\mathsf{E}|Y-u|$ 是 u 的单调非降函数. 不妨只考虑 $\mu>0$ 的情况，此时 $\mu\lambda\geq 0$ 意味着 $\lambda\geq 0$. 从而有 $-\mu<0\leq\lambda$. 利用上述关于函数 $\mathsf{E}|Y-u|$ 的单调性，可知 $\mathsf{E}|Y-(-\mu)|\geq\mathsf{E}|Y|$. 再用 (3.2) 式可得 $\mathsf{E}|X+Y|\geq\mathsf{E}|Y|$. #

定理 3.3 若 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为独立同分布随机变量，且 $\mathsf{E}|X_1|<\infty$, 那么，存在正整数 n_0, 当 $n>n_0$ 时,

$$\mathsf{E}|S_{n+1}| \geq \mathsf{E}|S_n|. \tag{3.3}$$

证明: 当 $\mu=\mathsf{E}X_1=0$ 时，依此节开始时所言， $\{\mathsf{E}|S_n|;n\geq 1\}$ 是非降的，因此 (3.3) 式对 $n\geq 1$ 总成立. 于是只需考虑 $\mu\neq 0$ 的情况. 由于 $\mathsf{E}|S_n|=\mathsf{E}|-S_n|$, 又不妨只考虑 $\mu>0$ 的情况. 此时依大数定律知：当 $n\to\infty$ 时， $S_n/n\to\mu>0$ (a.s.). 由此可见，存在正整数 n_0, 使得当 $n\geq n_0$ 时 S_n 的中位数 $\lambda_n>0$. 将 S_n 和 X_{n+1} 分别代替引理 3.2 中的 Y 和 X, 于是可得

$$\mathsf{E}|S_{n+1}| = \mathsf{E}|S_n+X_{n+1}| \geq \mathsf{E}|S_n|.$$

此即 (3.3) 式. #

致谢 作者感谢徐佩教授，他告知作者 (1.1) 式的出处，并引起同仁们的兴趣. 在讨论 (1.1) 式的直观含意时，已故名师陈希孺院士提出，考查 $\{\mathsf{E}|S_n|\}$ 是否随 n 单调非降的问题，是有意义的. 在此问题的引导下，作者完成此文的研究工作. 现在，作者唯有以无限哀思向先师表达谢意.

参 考 文 献

[1] Chung, K.L., *A Course in Probability Theory*, Academic Press, Inc., New York, 1974.

Some Properties of the Absolute Moment

An Hongzhi

(*Academy of Mathematics and Systems Sciences, Chinese Academy of Sciences, Beijing, 100080*)

We discuss several properties of the absolute moment of sums of independent random variables, including the expression of $\mathsf{E}|X+Y|-\mathsf{E}|X-Y|$, where X and Y are i.i.d. random variables.