应用概率统计　第二十三卷
第一期　2007 年 2 月

Chinese Journal of Applied Probability
and Statistics Vol. 23 No. 1 Feb. 2007

具边信息的最优效用及其影响 *

熊德文　　叶中行
(上海交通大学数学系，上海， 200240)

摘　　要

利用测度变换及随机滤波考察了 Q - 鞅 $\{\widetilde{\Lambda}_t := \mathsf{E}^Q[\Lambda_T|\mathcal{G}_t]\}$ 的分解. 然后利用这种分解考察了受随机因素影响的股票价格模型中投资者存在边信息和不存在边信息时的效用问题，给出了最优效用的一种形式，从而证明了边信息的影响有限.

关 键 词： 边信息，效用优化，测度变换，随机滤波.
学 科 分 类 号： O211.67.

§1.　引　　言

由于建立内幕交易模型的需要，近年来许多学者考查了 "边信息" (side-information)，如 Pikovsky I., Karatzas I. (1996)[1], Amendinger J., Imkeller P., Schweizer M. (1998)[2], Amendinger J. (2000)[3] 等. 在本文中，我们假设市场上只有一种风险资产 (股票), 其价格受到一种随机因素 (如上市公司的赢利能力指标、经济景气指数等) 的影响. 记 S_t 为 t 时的股价， X_t 为 t 时的随机因素； $\mathcal{F}_t^S=\sigma(S_u;u\le t)$ 为 t 时刻以前的股价信息， $\mathcal{F}_t^{S,X}=\sigma\{(S_u,X_u);u\le t\}$ 表示 t 时刻以前的所有股价信息与上市公司的赢利能力的信息. 在实际中，股价信息是公共信息，容易观察. 而公司的赢利能力则是公司的内部信息，一般投资者很难观测到. 而内幕交易者则有可能知道某些关于公司经营能力的内幕信息. 在本文中，我们考察了投资者存在边信息和不存在边信息时的效用问题，利用测度变换和鞅方法给出了最优效用的一种形式，从而证明边信息的影响是有限的.

§2.　数学模型

给定一个完备的概率空间 $\{\Omega,\mathcal{F},\mathsf{P}\}$, 设 $(W_1(t),W_2(t))$ 为一个标准的二维布朗运动, 令 $\mathcal{F}_t:=\mathcal{F}_t^{W_1,W_2}\vee\sigma(X_0)$, $\mathbb{F}=\{\mathcal{F}_t;0\le t\le T\}$. T 为给定的到期时刻. 我们假定风险资产的价格 (收益率) 过程 S_t 与随机因素 X_t 满足如下随机微分方程 (SDE):

$$\begin{cases}\mathrm{d}S_t=a(t,S_t,X_t)\mathrm{d}t+b(S_t)\mathrm{d}W_1(t) & S_0=s_0\ \text{为常数;}\\ \mathrm{d}X(t)=A(t,X_t)\mathrm{d}t+B(X_t)\mathrm{d}W_2(t) & X_0\ \text{为随机变量,}\end{cases}$$

* 本文受国家自然科学基金项目 (10171066 和 70671069) 资助.
本文 2005 年 10 月 13 日收到.

其中 $a(\cdot,\cdot,\cdot)$, $b(\cdot)$, $A(\cdot,\cdot)$, $B(\cdot)$ 满足适当的条件使得上述随机微分方程有唯一的强解，且 $b(\cdot)\geq c>0$, $B(\cdot)\geq c>0$. 假设内幕交易者在一开始就获得一个的关于未来 “随机因素” 的 “边信息” G, 即 G 为关于 $\mathcal{F}_T^X$ - 可测的随机变量，且 $\mathsf{E}^{\mathsf{P}}(G^2)<+\infty$. 于是，投资者在 t 时刻的信息集为 $\mathcal{G}_t=\mathcal{F}_t^S\vee\sigma(G)$, 我们考察此时内幕交易者的最优投资行为．

令 $l(t)=[1/b(S_t)]a(t,S_t,X_t)$, 定义：

$$Z_t:=\exp\Big\{-\int_0^t l(u)\mathrm{d}W_1(u)-\frac{1}{2}\int_0^t l(u)^2\mathrm{d}u\Big\}.$$

假定 $\{l(t);0\leq t\leq T\}$ 为有界过程，于是 $\{Z_t;\mathcal{F}_t\}$ 为平方可积的正的 P-鞅．我们引入一个新的测度：

$$\frac{\mathrm{dQ}}{\mathrm{dP}}\Big|_{\mathcal{F}_T}:=Z_T,$$

则 Q 为与 P 等价的概率测度．由 Girsanov 定理知，在测度 Q 下，$\widetilde{W}_1(t):=W_1(t)+\int_0^t l(u)\mathrm{d}u$; $\widetilde{W}_2(t):=W_2(t)$ 为相互独立的布朗运动，且

$$\begin{cases}\mathrm{d}S_t=b(S_t)\mathrm{d}\widetilde{W}_1(t);\\ \mathrm{d}X_t=A(t,X_t)\mathrm{d}t+B(X_t)\mathrm{d}\widetilde{W}_2(t),\end{cases}$$

由于 $S_0=s_0$ 为确定的常数，易知 $\mathcal{F}_T^S$ 与 $\mathcal{F}_T^X$ 在 Q 下相互独立．这意味着，G 与 $\mathcal{F}_T^S$ 在 Q 下相互独立．由 [5] 易知：$\mathcal{F}_t^S=\mathcal{F}_t^{\widetilde{W}_1}$; 若令 $\mathbb{G}=\{\mathcal{G}_t;t\in[0,T]\}$, 则 $\{\widetilde{W}_1(t),\mathcal{G}_t\}$ 在 Q 下为布朗运动；$\{S_t,\mathcal{G}_t\}$ 在 Q 下为鞅．与 [3] 类似地，我们有

引理 1 (限制在 $\mathcal{G}_T$ 上的鞅表示定理)　设 $\{Y_t;\mathcal{G}_t\}$ 为轨道 RCLL 的 Q-局部鞅，则存在唯一 $\mathbb{G}$ 适应过程 $\theta(\cdot)$ 满足 $\int_0^T\theta(u)^2\mathrm{d}u<+\infty$, Q-a.s. 使得

$$M_t=M_0+\int_0^t\theta(u)\mathrm{d}\widetilde{W}_1(u)\qquad(\mathsf{Q}-\text{a.s.}).$$

特别地，若 H 为任意 $\mathcal{G}_T$-可测，且 $\mathsf{E}^{\mathsf{Q}}|H|<+\infty$, 则存在 $\mathbb{G}$ 适应过程 $\theta(\cdot)$ 满足 $\int_0^T\theta(u)^2\mathrm{d}u<+\infty$, Q-a.s. 使得

$$H=\mathsf{E}[H|G]+\int_0^T\theta(t)\mathrm{d}S_t\qquad(\mathsf{Q}-\text{a.s.}).$$

§3.　测度变换

引理 2　令 $\Lambda_T:=1/Z_T$, 记 $\Lambda_t^*:=\mathsf{E}^{\mathsf{Q}}[\Lambda_T|\mathcal{F}_t^S]$; $\widetilde{\Lambda}_t:=\mathsf{E}^{\mathsf{Q}}[\Lambda_T|\mathcal{G}_t]$, 则

(1) 对任意 $\mathcal{G}_t$-可测的 Q-可积的随机变量 X, 有 $\mathsf{E}^{\mathsf{P}}(X)=\mathsf{E}^{\mathsf{Q}}(X\widetilde{\Lambda}_t)$, $\mathsf{E}^{\mathsf{Q}}(X)=\mathsf{E}^{\mathsf{P}}(X/\widetilde{\Lambda}_t)$;

(2) 若 X 为任意 $\mathcal{F}_T$-可测随机变量，则 $\mathsf{E}[X|\mathcal{G}_t]=(1/\widetilde{\Lambda}_t)\mathsf{E}^{\mathsf{Q}}[X\cdot\Lambda_T|\mathcal{G}_t]$ (P − a.s.).

注　(i) 考察 Q-鞅 $\{\Lambda_t^*,\mathcal{F}_t^S\}$ 的 RCLL 修正．令 $l^*(t)=\mathsf{E}[l(t)|\mathcal{F}_t^S]$, 由 [4], Λ_t^* 可表示为

$$\Lambda_t^*=1+\int_0^t\Lambda_u^*l^*(u)\mathrm{d}\widetilde{W}_1(u)\qquad(\mathsf{Q}-\text{a.s.}).$$

令 $B_1^*(t) := \widetilde{W}_1(t) - \int_0^t l^*(u)\mathrm{d}u\Big(= W_1(t) + \int_0^t [l(u) - l^*(u)]\mathrm{d}u\Big)$, 则 $\{B_1^*(t), \mathcal{F}_t^S\}$ 在 P 下为布朗运动.

(ii) 由 $\{l(t,\omega)\}$ 的有界性知 $\mathsf{E}^{\mathsf{Q}}[(\Lambda_T)^2] = \mathsf{E}\Big[\exp\Big\{\int_0^T l(u)\mathrm{d}W_1(u) + (1/2)\int_0^T l(u)^2\mathrm{d}u\Big\}\Big] < \infty$, 故 $\{\widetilde{\Lambda}_t, \mathcal{G}_t\}$ 在 Q 下为平方可积的正鞅，我们考察其 RCLL 修正，则存在 $\mathbb{G}$- 适应过程 $\{g(t,\omega)\}$ 使得

$$\widetilde{\Lambda}_t = \mathsf{E}^{\mathsf{Q}}[\Lambda_T|\mathcal{G}_0] + \int_0^t \widetilde{\Lambda}_{u-}g(u,\omega)\mathrm{d}\widetilde{W}_1(u).$$

其中 $\{g(t,\omega)\}$ 满足 $\mathsf{E}^{\mathsf{Q}}\Big[\int_0^T \widetilde{\Lambda}_{u-}^2 g(u,\omega)^2\mathrm{d}u\Big] < \infty$, 进而

$$\mathsf{E}\int_0^T \widetilde{\Lambda}_u|g(u,\omega)|\mathrm{d}u < +\infty, \qquad \text{i.e.,} \qquad \mathsf{E}\int_0^T |g(u,\omega)|\mathrm{d}u < +\infty.$$

更进一步，关于 $\{\widetilde{\Lambda}_t, \mathcal{G}_t\}$ 的鞅表示，我们有

定理 1 令 $\widetilde{l}(t,\omega) = \mathsf{E}[l(t)|\mathcal{G}_t]$, 则一致可积的 $(\mathsf{Q}, \mathbb{G})$ - 鞅 $\{\widetilde{\Lambda}_t\}$ 可表示为如下形式

$$\widetilde{\Lambda}_t = \mathsf{E}^{\mathsf{Q}}[\Lambda_T|\mathcal{G}_0] + \int_0^t \widetilde{\Lambda}_{u-}\widetilde{l}(u,\omega)\mathrm{d}\widetilde{W}_1(u) \qquad (\mathsf{Q} - \text{a.s.}). \tag{1}$$

为证明定理 1 我们需要如下引理

引理 3 对 $f(\cdot)$ 为任意有界可测函数有

$$\mathsf{E}[f(G)|\mathcal{F}_t^S] = \mathsf{E}f(G) + \int_0^t \mathsf{E}\{f(G)[g(u,\omega) - l^*(u)]|\mathcal{F}_u^S\}\mathrm{d}B_1^*(u) \qquad (\text{a.s.}). \tag{2}$$

证明: 利用命题 2, 有:

$$\mathsf{E}[f(G)|\mathcal{F}_t^S] = \frac{1}{\Lambda_t^*}\mathsf{E}^{\mathsf{Q}}[f(G)\widetilde{\Lambda}_t|\mathcal{F}_t^S],$$
$$f(G)\widetilde{\Lambda}_t = f(G)\widetilde{\Lambda}_0 + \int_0^t \widetilde{\Lambda}_u f(G)g(u,\omega)\mathrm{d}\widetilde{W}_1(u).$$

由引理 2 注 (ii) 及 Theorem 5.14[5] 知

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}^{\mathsf{Q}}[f(G)\widetilde{\Lambda}_t|\mathcal{F}_t^S] &= \mathsf{E}^{\mathsf{Q}}[f(G)\Lambda_T] + \mathsf{E}^{\mathsf{Q}}\Big[\int_0^t \widetilde{\Lambda}_u f(G)g(u,\omega)\mathrm{d}\widetilde{W}_1(u)|\mathcal{F}_t^S\Big] \\
&= \mathsf{E}[f(G)] + \int_0^t \mathsf{E}^{\mathsf{Q}}[\widetilde{\Lambda}_u f(G)g(u,\omega)|\mathcal{F}_u^S]\mathrm{d}\widetilde{W}_1(u) \\
&= \mathsf{E}[f(G)] + \int_0^t \Lambda_u^*\mathsf{E}[f(G)g(u,\omega)|\mathcal{F}_u^S]\mathrm{d}\widetilde{W}_1(u)(:= M(t)).
\end{aligned}$$

易知 $\{M(t), \mathcal{F}_t^S\}$ 在测度 Q 下为鞅，在 P 下为半鞅，而 $B_1^*(t) := \widetilde{W}_1(t) - \int_0^t l^*(u)\mathrm{d}u$ 在 P 下关于 $\{\mathcal{F}_t^S\}$ 为布朗运动. 故半鞅 $\{M(t), \mathcal{F}_t^S\}$ 测度 P 下的分解为:

$$M(t) = \mathsf{E}[f(G)] + \int_0^t \Lambda_u^*\mathsf{E}^{\mathsf{Q}}[f(G)g(u,\omega)|\mathcal{F}_u^S]l_1^*(u)\mathrm{d}u + \int_0^t \Lambda_u^*\mathsf{E}[f(G)g(u,\omega)|\mathcal{F}_u^S]\mathrm{d}B_1^*(u).$$

由 $1/\Lambda_t^* = 1 - \int_0^t (1/\Lambda_u^*) l^*(u) \mathrm{d}B_1^*(u)$ 及 Itô 公式知 (2) 成立． #

定理 1 的证明: (i) 令 $y_t = \mathsf{E}[f(G)|\mathcal{F}_t^S]$, 则 $\{y_t, \mathcal{F}_t^S\}$ 在 P 下为平方可积鞅，可表示为 $y_t = \mathsf{E}f(G) + \int_0^t \theta(u,\omega)\mathrm{d}B_1^*(u)$. 我们利用另一种方法确定 $\theta(u,\omega)$ 的形式．任意固定 t, 设 $\{\lambda(u,\omega), u \le t\}$ 为任意满足 $\mathsf{E}\int_0^T \lambda(u,\omega)^2 \mathrm{d}u < \infty$ 的 $\{\mathcal{F}_u^S\}$- 适应过程，引人

$$z_t := \int_0^t \lambda(u,\omega)\mathrm{d}B_1^*(u) = \int_0^t \lambda(u,\omega)\mathrm{d}W_1(u) - \int_0^t \lambda(u,\omega)(l(u) - l^*(u))\mathrm{d}u,$$

则 $\mathsf{E}y_t z_t = \mathsf{E}\int_0^t \lambda(u,\omega)\theta(u,\omega)\mathrm{d}u$. 另一方面，

$$\mathsf{E}y_t z_t = \mathsf{E}[f(G)z_t] = \mathsf{E}\Big[f(G)\int_0^t \lambda(u,\omega)\mathrm{d}W_1(u)\Big] + \mathsf{E}\Big[f(G)\int_0^t \lambda(u,\omega)(l(u) - l^*(u))\mathrm{d}u\Big],$$

由于 G 为 $\mathcal{F}_T^X$- 可测，而 $\mathcal{F}_T^X \subset \mathcal{F}_T^{W_2} \vee \sigma(X_0)$, 且 $f(\cdot)$ 有界．故 $f(G)$ 可表示为:

$$f(G) = \mathsf{E}[f(G)|X_0] + \int_0^T \gamma(u,\omega,X_0)\mathrm{d}W_2(u).$$

从而 $\mathsf{E}\Big[f(G)\int_0^t \lambda(u,\omega)\mathrm{d}W_1(u)\Big] = \mathsf{E}\Big[\int_0^t \lambda(u,\omega)\mathrm{d}W_1(u)\int_0^T \gamma(u,\omega,X_0)\mathrm{d}W_2(u)\Big] = 0,$

$$\begin{aligned}\mathsf{E}y_t z_t &= \mathsf{E}\int_0^t \lambda(u,\omega)f(G)(l(u) - l^*(u))\mathrm{d}u \\ &= \mathsf{E}\int_0^t \lambda(u,\omega)\mathsf{E}[f(G)(l(u) - l^*(u))|\mathcal{F}_u^S]\mathrm{d}u.\end{aligned}$$

即 $\mathsf{E}\int_0^t \lambda(u,\omega)[\theta(u,\omega) - \mathsf{E}[f(G)(l(u) - l^*(u))|\mathcal{F}_u^S]]\mathrm{d}u = 0$ 对任意固定的 t 及 $\{\lambda(u,\omega), u \le t\}$ 均成立，特别地，取 $\lambda(u,\omega) = \theta(u,\omega) - \mathsf{E}[f(G)(l(u) - l^*(u))|\mathcal{F}_u^S]$ 有

$$\mathsf{E}[f(G)|\mathcal{F}_t^S] = \mathsf{E}f(G) + \int_0^t \mathsf{E}\{f(G)[l(u) - l^*(u)]|\mathcal{F}_u^S\}\mathrm{d}B_1^*(u) \qquad (\mathsf{P} - \mathrm{a.s.}). \tag{3}$$

由 (2)(3) 及表示的唯一性知

$$\mathsf{E}\int_0^T (\mathsf{E}[f(G)[g(u,\omega) - \tilde{l}(u,\omega)]|\mathcal{F}_u^S])^2\mathrm{d}u = 0. \tag{4}$$

(ii) 给定 $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = T$, 设 $f_i(\cdot)$, $i = 0, \cdots, n-1$ 为有界的 Borel 可测函数和 ξ_i 为有界的 $\mathcal{F}_{t_i}^S$- 可测随机变量，设 θ 为如下形式的简单过程:

$$\theta_t = f_0(G)\xi_0 I_{\{0\}}(t) + \sum_{i=0}^{n-1} f_i(G)\xi_i I_{]t_i,t_{i+1}]}(t), \tag{5}$$

则 $\mathsf{E}\int_0^T \theta_u[g(u,\omega) - \tilde{l}(u,\omega)]\mathrm{d}u = \sum_{i=0}^{n-1}\mathsf{E}\Big[\xi_i\int_{t_i}^{t_{i+1}} \mathsf{E}[f_i(G)[g(u,\omega) - \tilde{l}(u,\omega)]|\mathcal{F}_u^S]\mathrm{d}u\Big]$, 又由 (4)

$$\begin{aligned}&\mathsf{E}\Big|\xi_i\int_{t_i}^{t_{i+1}} \mathsf{E}[f_i(G)[g(u,\omega) - \tilde{l}(u,\omega)]|\mathcal{F}_u^S]\mathrm{d}u\Big| \\ \le\ & C(\mathsf{E}\xi_i^2)^{1/2}\Big(\mathsf{E}\int_{t_i}^{t_{i+1}} \mathsf{E}[f_i(G)[g(u,\omega) - \tilde{l}(u,\omega)]|\mathcal{F}_u^S]^2\mathrm{d}u\Big)^{1/2} = 0,\end{aligned}$$

其中 C 为一适当的常数，从而 $\mathsf{E}\int_0^T \theta_u[g(u,\omega)-\widetilde{l}(u,\omega)]\mathrm{d}u=0$, 即

$$\mathsf{E}^{\mathsf{Q}}\Big[\int_0^T \theta_u\widetilde{\Lambda}_{u-}[g(u,\omega)-\widetilde{l}(u,\omega)]\mathrm{d}u\Big]=0. \tag{6}$$

(iii) 一般地，若 $\{\theta_t\}$ 为 $\mathbb{G}$- 适应过程且满足 $\mathsf{E}^{\mathsf{Q}}\Big[\int_0^T \theta_u^2\mathrm{d}u\Big]<\infty$, 由 Lemma 5.5[5] 存在一列形如 (5) 的简单过程 θ^n 使得

$$\mathsf{E}^{\mathsf{Q}}\Big[\int_0^T (\theta_u-\theta_u^{(n)})^2\mathrm{d}u\Big]\to 0,\qquad n\to+\infty.$$

又 $\mathsf{E}^{\mathsf{Q}}\Big[\int_0^T \theta_u\widetilde{\Lambda}_{u-}[g(u,\omega)-\widetilde{l}(u,\omega)]\mathrm{d}u\Big]=\mathsf{E}^{\mathsf{Q}}\Big[\int_0^T (\theta_u-\theta_u^n)\widetilde{\Lambda}_{u-}[g(u,\omega)-\widetilde{l}(u,\omega)]\mathrm{d}u\Big]$, 而

$$\begin{aligned}
&\mathsf{E}^{\mathsf{Q}}\Big|\int_0^T (\theta_u-\theta_u^n)\widetilde{\Lambda}_{u-}[g(u,\omega)-\widetilde{l}(u,\omega)]\mathrm{d}u\Big|\\
\le\ &\Big(\mathsf{E}^{\mathsf{Q}}\Big\{\int_0^T[\theta_u-\theta_u^n]^2\mathrm{d}u\Big\}\Big)^{1/2}\Big(\mathsf{E}^{\mathsf{Q}}\Big\{\int_0^T \widetilde{\Lambda}_{u-}^2[g(u,\omega)-\widetilde{l}(u,\omega)]^2\mathrm{d}u\Big\}\Big)^{1/2}\\
\to\ &0,\qquad (n\to+\infty).
\end{aligned}$$

从而 (6) 对任意满足 $\mathsf{E}^{\mathsf{Q}}\Big[\int_0^T \theta_u^2\mathrm{d}u\Big]<\infty$ 的 $\mathbb{G}$- 适应过程 θ 均成立.

特别地，在 (6) 中，取 $\theta_u=\widetilde{\Lambda}_u[g(u,\omega)-\widetilde{l}(u,\omega)]$, 有

$$\mathsf{E}^{\mathsf{Q}}\Big\{\int_0^T \widetilde{\Lambda}_u^2[g(u,\omega)-\widetilde{l}(u,\omega)]^2\mathrm{d}u\Big\}=0,$$

从而 (1) 成立.　　#

§4.　效用优化

设 $U(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上的凸效用函数，满足 $U(x)>0$, $U'(x)>0$, $U''(x)<0$. 设 $I(y)$ 为 $U'(x)$ 的反函数.

定义　对 $\mathbb{H}\in\{\mathbb{F}^S,\mathbb{G}\}$, 定义 $\mathbb{H}$- 容许策略 $\theta(\cdot)$ 为满足下列条件的过程:

(1) $\theta(\cdot)$ 关于 $\mathbb{H}$- 适应;

(2) 相应的财富过程 $V_t=x+\int_0^t\theta(u)\mathrm{d}S_u$ 关于 $(\mathsf{Q},\mathbb{H})$ 为非负局部鞅，且 $\mathsf{E}U^-(V_T)<\infty$.

所有 $\mathbb{H}$- 容许策略的全体记为 $\mathrm{Adm}^{\mathbb{H}}(x)$. 记 $\mathcal{V}^{\mathbb{H}}(x):=\{V|V=x+\theta\cdot S,\theta\in\mathrm{Adm}^{\mathbb{G}}\}$ (容许财富集).

优化问题 (I): $u^{\mathbb{F}^S}(x):=\mathsf{E}^{\mathsf{P}}[U(V_T^{\mathbb{F}^S})]=\sup\limits_{V\in\mathcal{V}^{\mathbb{F}^S}(x)}\mathsf{E}^{\mathsf{P}}[U(V_T)]$.

优化问题 (II): $\mathsf{E}^{\mathsf{P}}[U(V_T^{\mathbb{G}})|\mathcal{G}_0]=\operatorname{ess}\sup\limits_{V\in\mathcal{V}^{\mathbb{G}}(x)}\mathsf{E}^{\mathsf{P}}[U(V_T)|\mathcal{G}_0]$, $u^{\mathbb{G}}(x):=\sup\limits_{V\in\mathcal{V}^{\mathbb{G}}(x)}\mathsf{E}^{\mathsf{P}}[U(V_T)]$.

定理 2　(i) 优化问题 (I) 的最优财富过程为 $V_t^{\mathbb{F}}:=\mathsf{E}^{\mathsf{Q}}[I(\delta^{\mathbb{F}}(x)/\Lambda_T^*)|\mathcal{F}_t^S]$, 其中 $\delta^{\mathbb{F}}(x)$ 为一正常数，且满足 $\mathsf{E}^{\mathsf{Q}}[I(\delta^{\mathbb{F}}(x)/\Lambda_T^*)]=x$;

(ii) 优化问题 (II) 的最优财富过程为 $V_t^{\mathbb{G}} := \mathsf{E}^{\mathsf{Q}}[I(\delta^{\mathbb{G}}(x)/\widetilde{\Lambda}_T)|\mathcal{G}_t]$, 其中 $\delta^{\mathbb{G}}(x)$ 为 $\mathcal{G}_0$ - 可测的随机变量，且满足 $\mathsf{E}[I(\delta^{\mathbb{G}}(x)/\widetilde{\Lambda}_T)|\mathcal{G}_0] = x$.

证明： (仅证 (ii), (i) 的证明类似) 易知： $V_T^{\mathbb{G}} := I(\delta^{\mathbb{G}}(x)/\widetilde{\Lambda}_T)$ 为 $\mathcal{G}_T$ - 可测的正随机变量, $\mathsf{E}[I(\delta^{\mathbb{G}}(x)/\widetilde{\Lambda}_T)] = x$. 由表示定理知，一定存在 θ, 使得

$$\begin{aligned} V_T^{\mathbb{G}} &= \mathsf{E}^{\mathsf{Q}}\{V_T^{\mathbb{G}}|\mathcal{G}_0\} + \int_0^T \theta(t)\mathrm{d}\widetilde{W}_1(t) \\ &= \mathsf{E}^{\mathsf{Q}}\Big[I\Big(\frac{\delta^{\mathbb{G}}(x)}{\widetilde{\Lambda}_T}\Big)\Big|\mathcal{G}_0\Big] + \int_0^T \theta(t)b^{-1}(S_t)\mathrm{d}S_t \\ &= x + \int_0^T \theta(t)b^{-1}(S_t)\mathrm{d}S_t. \end{aligned}$$

因为 $V_T^{\mathbb{G}} = I(\delta^{\mathbb{G}}(x)/\widetilde{\Lambda}_T) \geq 0$, $V_t^{\mathbb{G}} = \mathsf{E}^{\mathsf{Q}}[V_T^{\mathbb{G}}|\mathcal{G}_t] \geq 0$. 故 $V_t^{\mathbb{G}}$ 为某个容许决策的财富： $V^{\mathbb{G}} \in \mathcal{V}^{\mathbb{G}}(x)$. 下面考查其最优性．由 $U(\cdot)$ 的 (上) 凸性知：

$$U(y) - U(x) \geq U'(y)(y-x).$$

于是，对任意 $V \in \mathcal{V}^{\mathbb{G}}(x)$, $\{V, \mathcal{G}_t\}$ 在 Q 下为非负局部鞅，为上鞅，故 $\mathsf{E}^{\mathsf{Q}}[V_T|\mathcal{G}_0] \leq x$.

$$\begin{aligned} U(V_T^{\mathbb{G}}) - U(V_T) &\geq U'(V_T^{\mathbb{G}})(V_T^{\mathbb{G}} - V_T) \\ &= \frac{\delta^{\mathbb{G}}(x)}{\widetilde{\Lambda}_T}[I(\delta^{\mathbb{G}}(x)\xi_T) - V_T], \end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned} \mathsf{E}[U(V_T^{\mathbb{G}}) - U(V_T)|\mathcal{G}_0] &\geq \delta^{\mathbb{G}}(x)\mathsf{E}\Big\{\frac{1}{\widetilde{\Lambda}_T}[I(\delta^{\mathbb{G}}(x)\xi_T) - V_T]|\mathcal{G}_0\Big\} \\ &= \delta^{\mathbb{G}}(x)\mathsf{E}^{\mathsf{Q}}[I(\delta^{\mathbb{G}}(x)\xi_T) - V_T|\mathcal{G}_0]\xi_0 \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

从而 $\mathsf{E}[U(V_T^{\mathbb{G}})|\mathcal{G}_0] \geq \mathsf{E}[U(V_T)|\mathcal{G}_0]$, P-a.s.. 故 $V_t^{\mathbb{G}}$ 为优化问题 (II) 的最优财富过程． #

注 由定理 1 知， $\widetilde{\Lambda}_t = \mathsf{E}^{\mathsf{Q}}[\Lambda_T|\mathcal{G}_0] + \int_0^t \widetilde{\Lambda}_{u-}\widetilde{l}(u,\omega)\mathrm{d}\widetilde{W}_1(u)$. 由于 $\{\widetilde{W}_1(t), \mathcal{G}_t\}$ 在 Q 下为布朗运动， $\widetilde{B}_1(t) := \widetilde{W}_1(t) - \int_0^t \widetilde{l}(u)\mathrm{d}u$, 由 Girsanov 定理知 $\{\widetilde{B}_1(t); \mathcal{G}_t\}$ 在 P 下为布朗运动．当 $U(x) = \ln(x)$ 时， $U'(x) = 1/x$, $I(y) = 1/y$, $\delta^{\mathbb{G}}(x) = \widetilde{\Lambda}_0/x$, $\delta^{\mathbb{F}}(x) = 1/x$, 最优财富为：

$$V_t^{\mathbb{G}} = \mathsf{E}^{\mathsf{Q}}\Big[x\frac{\widetilde{\Lambda}_T}{\widetilde{\Lambda}_0}\Big|\mathcal{G}_t\Big] = x\frac{\widetilde{\Lambda}_t}{\widetilde{\Lambda}_0}, \qquad V_t^{\mathbb{F}} = \mathsf{E}^{\mathsf{Q}}[x\Lambda_T^*|\mathcal{G}_t] = x\Lambda_t^*.$$

最优效用为：

$$\begin{aligned} u^{\mathbb{G}}(x) &= \mathsf{E}^{\mathsf{P}}[\ln(V_T^{\mathbb{G}})] = \mathsf{E}^{\mathsf{P}}\Big[\ln x + \int_0^T \widetilde{l}(u)\mathrm{d}\widetilde{W}_1(u) - \frac{1}{2}\int_0^T \widetilde{l}(u)^2\mathrm{d}u\Big] \\ &= \mathsf{E}^{\mathsf{P}}\Big[\ln x + \int_0^T \widetilde{l}(u)\mathrm{d}W^*(u) + \frac{1}{2}\int_0^T \widetilde{l}(u)^2\mathrm{d}u\Big] \\ &= \ln x + \frac{1}{2}\mathsf{E}^{\mathsf{P}}\Big[\int_0^T \widetilde{l}(u)^2\mathrm{d}u\Big], \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
u^{\mathbb{F}}(x) &= \ln x + \mathsf{E}^{\mathsf{P}}[\ln(\Lambda_T^*)] = \ln x + \frac{1}{2}\mathsf{E}^{\mathsf{P}}\Big[\int_0^T l^*(u)^2 \mathrm{d}u\Big], \\
u^{\mathbb{G}}(x) - u^{\mathbb{F}}(x) &= \frac{1}{2}\mathsf{E}\int_0^T [\widetilde{l}(u)^2 - l^*(u)^2]\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\mathsf{E}\int_0^T [\widetilde{l}(u) - l^*(u)]^2 \mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{2}\mathsf{E}\int_0^T m(u,\omega)^2 \mathrm{d}u < \infty,
\end{aligned}
$$

其中 $m(u,\omega) = \widetilde{l}(u,\omega) - l^*(u)$. 由于 $l(t)$ 的有界性可知，“边信息” G 总是影响有限. 而

$$
\mathsf{E}^{\mathsf{P}}[m(u,\omega)|\mathcal{F}_u^S] = \mathsf{E}[\widetilde{l}(u) - l^*(u)|\mathcal{F}_u^S] = 0.
$$

这表明由 u 时刻的公共信息 $\mathcal{F}_u^S$ 在原测度 P 下无法观测 $m(u,\omega)$.

参 考 文 献

[1] Pikovsky, I., Karatzas, I., Anticipative portfolio optimization, *Adv. Appl. Probab.*, **28**(1996), 1095–1122.

[2] Amendinger, J., Imkeller, P., Schweizer, M., Additional logarithmic utility of an insider, *Stochastic Process. Appl.*, **75**(1998), 263–286.

[3] Amendinger, J., Martingale representation theorems for initially enlarged filtrations, *Stochastic Process. Appl.*, **89**(2000), 101–116.

[4] Pham, H., Quenez, M-C., Optimal portfolio in partially observed stochastic volatility models, *The Annals of Appl. Probab.*, **11(1)**(2001), 210–238.

[5] Liptser, R.S., Shiryayev, A.N., *Statistics of Random Processes I (General Theory)*, Springer-Verlag, 1977.

[6] 严加安, 鞅与随机积分引论, 上海科学技术出版社, 1981.

Optimal Utility with Side Information and its Affect

XIONG DEWEN YE ZHONGXING

(*Department of Mathematics, Shanghai Jiao Tong University, Shanghai, 200240*)

We first consider the problem of representation of the Q-martingale $\{\widetilde{\Lambda}_t := \mathsf{E}^Q[\Lambda_T|\mathcal{G}_t]\}$. Then we consider a market of a stock price affected by a stochastic factor, in which there exists a insider who only knows the price information and a side information. We consider his problem of optimal utility for terminal wealth with and without side-information, and obtain a form of optimal terminal wealth in two cases. Finally, we compare these two cases for the logarithmic utility, and analyze the influence of the 'side information'.