应用概率统计　第二十二卷
第四期　2006 年 11 月

Chinese Journal of Applied Probability
and Statistics Vol. 22 No. 4 Nov. 2006

# 相伴的高斯随机变量序列的一个强不变原理 *

王　文　胜
(华东师范大学统计系，上海， 200062)

**摘　要**

本文利用鞅的 Skorohod 表示，在序列是高斯的且序列的协方差系数以幂指数速度递减的条件下，证明了相伴高斯随机变量序列的一个强不变原理．作为推论得到了相伴高斯随机变量序列的重对数律和钟重对数律．

**关 键 词**: 相伴高斯随机序列，部分和，强不变原理.
**学 科 分 类 号**: O211.6.

## §1.　引　　言

随机变量 $X_1,\cdots,X_n$ 是相伴 (associated) 的，如果

$$\mathsf{Cov}\,(f(X_1,\cdots,X_n),g(X_1,\cdots,X_n))\geq 0$$

对任何两个使上面协方差存在的对每个变元均非降 (或者，均非增) 的函数 $f$ 和 $g$ 成立．一个随机变量序列 $\{X_i,i\geq 1\}$ 是相伴的，如果对任意自然数 $n\geq 2$, $X_1,\cdots,X_n$ 都是相伴的．相伴随机序列是由 [1] 引进的．这种类型的相依结构在可靠性理论 (参见 [2]), 理论物理 (参见 [3]), 渗流理论 (参见 [4]) 等领域中具有应用．

Yu[5] 利用分位变换及 Berkes-Philipp 逼近定理 [6], 在序列是 $2+\delta$ $(\delta>0)$ 阶矩存在且序列的协方差系数以指数 $(O(e^{-n^{\mu}})$, 某一 $\mu>0)$ 速度递减的条件下，证得了相伴随机变量序列的一个强不变原理．本文的目的是放宽 [5] 中对序列的协方差系数的递减速度的限制．证明对高斯的相伴随机变量序列，序列的协方差系数只要以幂指数 $(O(n^{-r})$, 某一 $r>1)$ 的速度递减即可． ([5] 中所用的证明方法难以达到这一结果．) 本文定理的证明方法是利用鞅的 Skorohod 表示 (参见 [7], p.269), 这种方法对证明相依或混合随机变量的强不变原理是相当有效的．作为定理的推论我们得到了相伴高斯随机变量序列的重对数律和钟重对数律．

记 $S_0=0$, $S_n=S(n)=\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$, $n\geq 1$. 记 $\sigma_n^2=\mathsf{Var}\,[S_n]$. 记

$$u(n)=\sup_{k\geq 1}\sum_{j:|j-k|\geq n}\mathsf{Cov}\,(X_j,X_k)$$

为随机变量序列 $\{X_i,i\geq 1\}$ 的协方差系数．显然，如果 $\{X_i\}$ 是平稳的，那么

$$u(n)=2\sum_{j=n}^{\infty}\mathsf{Cov}\,(X_1,X_{j+1}).$$

* 国家自然科学基金资助项目 (批准号： 10401037).
本文 2006 年 3 月 13 日收到.

本文中约定 $\log x=\ln\max\{x,e\}$, 其中 ln 是自然对数; $[x]$ 表示 $x$ 的整数部分.

**定理 1.1** 设 $\{X_i, i\geq 1\}$ 为相伴的且对每一 $i\geq 1$, $X_i$ 服从正态分布 $N(0,\mathsf{E}[X_i^2])$ 的随机变量序列. 如果它满足下列条件:

i) 存在两个正的常数 $c_1$, $c_2$ 使得 $0<c_1\leq\inf\limits_{i\geq 1}\mathsf{E}[X_i^2]\leq\sup\limits_{i\geq 1}\mathsf{E}[X_i^2]\leq c_2<+\infty$;

ii) 对某一实数 $r\in(1,3/2)$, 存在正的常数 $c_3=c_3(r)>0$ 使得对每一 $n\geq 1$, $u(n)\leq c_3n^{-r}$.

那么对于给定的相伴高斯序列 $\{X_i, i\geq 1\}$, 可构造一个新的概率空间, 在其上存在一个标准 Wiener 过程 $W=\{W(t), t\in[0,\infty)\}$, 使得对任一实数 $0<\theta<(r-1)/(3r-1)$, 有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|S_n-W(\sigma_n^2)|}{\sigma_n^{1-\theta}}=0 \qquad \text{a.s..} \tag{1.1}$$

**推论 1.2** 在定理 1.1 的条件下, 有

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{|S_n|}{(2\sigma_n^2\log\log\sigma_n^2)^{1/2}}=1 \qquad \text{a.s.,} \tag{1.2}$$

$$\liminf_{n\to\infty}\Big(\frac{8\log\log\sigma_n^2}{\pi^2\sigma_n^2}\Big)^{1/2}\max_{1\leq i\leq n}|S_i|=1 \qquad \text{a.s..} \tag{1.3}$$

推论中第一个式子是重对数律, 第二个式子是钟重对数律.

## §2. 一些引理

记 $\mathbf{N}$ 为正整数集. 为证定理 1.1, 令 $\delta\in\big(0,(r-1-3\theta r+\theta)/[2\theta(r-1)]\big)$, $\delta'\in\big(0,(1-2\theta)/(2\theta)-[(\theta+\delta)(r-1)+1]/[(1-\theta)(r-1)]\big)$, $\alpha:=[(\theta+\delta)(r-1)+1]/[(1-\theta)(r-1)]+\delta'$, $\beta:=1/(r-1)+\delta$, $M>1$ (下文中 $M>1$ 总是取充分的大). 由于 $0<\theta<(r-1)/(3r-1)$, 于是 $r-1-3\theta r+\theta>0$; 由于 $0<\delta<(r-1-3\theta r+\theta)/[2\theta(r-1)]$, 于是 $[(\theta+\delta)(r-1)+1]/[(1-\theta)(r-1)]<(1-2\theta)/(2\theta)$. 因此这里定义的正实数 $\delta$, $\delta'$ 是存在的. 由定义易知 $\alpha>(\theta+\beta)/(1-\theta)>\beta>1$.

定义集合 $H_k\subset\mathbf{N}$ 和 $I_k\subset\mathbf{N}$, $k\geq 1$ 是 $\mathbf{N}$ 的可数划分, 按如下的顺序来划分的: $H_1, I_1, H_2, I_2, H_3, \cdots$, 且使得 $\#H_k=[(kM)^\alpha]$, $\#I_k=[(kM)^\beta]$, 其中 $\#H_k$, $\#I_k$ 分别表示 $H_k$, $I_k$ 中元素的个数. 令

$$n_k=\sum_{j\leq k}\#(H_j\cup I_j), \qquad u_k=\sum_{j\in H_k}X_j, \qquad v_k=\sum_{j\in I_k}X_j, \qquad \lambda_k=\mathsf{E}[u_k^2], \qquad \tau_k=\mathsf{E}[v_k^2].$$

易知

$$n_k=\sum_{j=1}^k(\#H_j+\#I_j)=\sum_{j=1}^k([(kM)^\alpha]+[(kM)^\beta])\sim\frac{1}{1+\alpha}(kM)^{1+\alpha},$$

即 $n_k/\big\{[1/(1+\alpha)](kM)^{1+\alpha}\big\}\to 1$ 当 $k\to\infty$.

**引理 2.1** 在定理 1.1 的条件下, 对任意整数 $k\geq 1$, 有

$$c(kM)^\alpha\leq\lambda_k^2\leq c(kM)^\alpha, \qquad c(kM)^\beta\leq\tau_k^2\leq c(kM)^\beta; \tag{2.1}$$

对任意整数 $i \geq 1$, 有

$$0 \leq \mathsf{E}[u_i u_{i+k}] \leq \begin{cases} c(iM)^{-(r-1)\beta}, & \text{当 } k=1, \\ c(iM)^{-(r-1)\alpha}(kM)^{-r}, & \text{当 } 2 \leq k \leq i, \\ c(iM)^{\alpha}(kM)^{-r(1+\alpha)}, & \text{当 } k > i, \end{cases} \tag{2.2}$$

及

$$0 \leq \mathsf{E}[v_i v_{i+k}] \leq \begin{cases} c(iM)^{-r\alpha+\beta}, & \text{当 } k=1, \\ c(iM)^{-r\alpha+\beta}(kM)^{-r}, & \text{当 } 2 \leq k \leq i, \\ c(iM)^{\beta}(kM)^{-r(1+\alpha)}, & \text{当 } k > i. \end{cases} \tag{2.3}$$

这里及下文中， $c$ 表示一正的常数且每一次出现可表示不同的取值.

**证明：** 见 [5] 中引理 3.4 和 3.5. (2.2) 式，(2.3) 式中的非负性是由相伴的定义得到的. #

**引理 2.2** 令 $m \geq 1$ 及 $a_{ij} = \mathsf{E}[u_i u_j]$, $1 \leq i, j \leq m$. 记 $\mathbf{A}_m = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq m}$ 为 $m$ 阶方阵. 则在定理 1.1 的条件下矩阵 $\mathbf{A}_m$ 可逆，并且 $\mathbf{A}_m$ 的逆矩阵中所有元素的绝对值都不超过 1, 即对任何 $1 \leq i, j \leq m$,

$$\left| \frac{\det(\mathbf{A}_m^{(ij)})}{\det(\mathbf{A}_m)} \right| \leq 1, \tag{2.4}$$

其中 $\det(\mathbf{A})$ 表示矩阵 $\mathbf{A}$ 的行列式， $\mathbf{A}_m^{(ij)}$ 是元素 $a_{ij}$ 的余子式，即 $\mathbf{A}_m^{(ij)}$ 是 $\mathbf{A}_m$ 去掉第 $i$ 行第 $j$ 列元素后所成的子矩阵.

**证明：** 由引理 2.1, 对任意 $1 \leq i \leq m$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \mathsf{E}[u_i u_{i+k}] \leq c i^{-(r-1)\beta}$. 所以 $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \sum\limits_{k=1}^{\infty} \mathsf{E}[u_i u_{i+k}] \leq c$. 这意味着矩阵 $\mathbf{A}_m$ 主对角线以上的所有元素之和不超过 $c$. 由于矩阵 $\mathbf{A}_m$ 是对称的，所以主对角线以下的所有元素之和也不超过 $c$.

由相伴的定义知， $a_{ij} \geq 0$. 约定 $\sum\limits_{j=1}^{0} = 0$. 对任意 $1 \leq i \leq m$,

$$\sum_{j \geq 1;\ j \neq i} |a_{ij}| = \sum_{j \geq 1;\ j \neq i} a_{ij} = \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} + \sum_{j=i+1}^{m} a_{ij}.$$

由于上式中第 1 项和式不超过矩阵 $\mathbf{A}_m$ 主对角线以下的所有元素之和，第 2 项和式不超过矩阵 $\mathbf{A}_m$ 主对角线以上的所有元素之和，于是得到对任意 $1 \leq i \leq m$,

$$\sum_{j \geq 1;\ j \neq i} |a_{ij}| \leq c. \tag{2.5}$$

由 (2.1) 式， $\mathsf{E}[u_i^2] \geq c(iM)^{\alpha} \geq cM^{\alpha}$, 取 $M$ 充分的大，可得对任意 $1 \leq i \leq m$,

$$\sum_{j \geq 1;\ j \neq i} |a_{ij}| < \mathsf{E}[u_i^2] = a_{ii}.$$

这意味着矩阵 $\mathbf{A}_m$ 是对角线主控矩阵，即矩阵中每一行非对角线的元素的绝对值之和严格小于这一行中的主对角线元素的绝对值，因此由 [8] 中定理 2 得

$$\prod_{i=1}^{m} \Big( a_{ii} - \sum_{j=i+1}^{m} |a_{ij}| \Big) \leq \det(\mathbf{A}_m) \leq \prod_{i=1}^{m} \Big( a_{ii} + \sum_{j=i+1}^{m} |a_{ij}| \Big).$$

由 $a_{ij}\ge 0$ 及 (2.5),

$$\begin{aligned}\prod_{i=1}^m\Big(a_{ii}+\sum_{j=i+1}^m|a_{ij}|\Big) &= \prod_{i=1}^m\Big(a_{ii}+\sum_{j=i+1}^m a_{ij}\Big)=\prod_{i=1}^m a_{ii}\prod_{i=1}^m\Big(1+a_{ii}^{-1}\sum_{j=i+1}^m a_{ij}\Big)\\ &\le \prod_{i=1}^m a_{ii}\prod_{i=1}^m(1+ca_{ii}^{-1}).\end{aligned}$$

利用下列初等不等式：对任何 $x\ge 0$, $\ln(1+x)\le 2x$, 有

$$\prod_{i=1}^m(1+ca_{ii}^{-1})=\exp\Big(\sum_{i=1}^m\ln(1+ca_{ii}^{-1})\Big)\le\exp\Big(2c\sum_{i=1}^m a_{ii}^{-1}\Big)\le\exp\Big(\frac{2c}{c_1M^\alpha(\alpha-1)}\Big),\tag{2.6}$$

这里最后一个不等式利用了下面的估计：由 $\alpha>1$,

$$\sum_{i=1}^m a_{ii}^{-1}\le\sum_{i=1}^m\frac{1}{c_1(iM)^\alpha}\le\frac{1}{c_1M^\alpha(\alpha-1)}.$$

这样得到了 $0<c\prod\limits_{i=1}^m a_{ii}\le\det(\mathbf{A}_m)\le c\prod\limits_{i=1}^m a_{ii}$, 即矩阵 $\mathbf{A}_m$ 可逆.

对余子式 $\mathbf{A}_m^{(ij)}$ 使用下面平凡的估计 (由行列式的定义看出): 对任意矩阵 $(a_{ij})_{1\le i,j\le n}$ 的行列式总有下式成立：

$$\det((a_{ij})_{1\le i,j\le n})\le\prod_{i=1}^n\Big(\sum_{j=1}^n|a_{ij}|\Big).$$

又，$\mathbf{A}_m^{(ij)}$ 是 $\mathbf{A}_m$ 去掉第 $i$ 行第 $j$ 列元素后所成的子矩阵. 于是由 (2.5) 式, 对任意 $1\le i,j\le m$,

$$\begin{aligned}\det(\mathbf{A}_m^{(ij)}) &\le \prod_{1\le l\le m:l\ne i}\Big(\sum_{1\le k\le m:k\ne j}|a_{lk}|\Big)\le\prod_{1\le l\le m:l\ne i}\Big(\sum_{1\le k\le m}|a_{lk}|\Big)\\ &= \prod_{1\le l\le m:l\ne i}\Big(\sum_{1\le k\le m}a_{lk}\Big)=\prod_{1\le l\le m:l\ne i}\Big(a_{ll}+\sum_{1\le k\le m:k\ne l}a_{lk}\Big)\\ &= \prod_{1\le l\le m:l\ne i}a_{ll}\Big(1+a_{ll}^{-1}\sum_{1\le k\le m:k\ne l}a_{lk}\Big)\le\prod_{1\le l\le m:l\ne i}a_{ll}(1+ca_{ll}^{-1})\\ &= \prod_{1\le l\le m:l\ne i}a_{ll}\prod_{1\le l\le m:l\ne i}(1+ca_{ll}^{-1})\le\prod_{1\le l\le m:l\ne i}a_{ll}\prod_{1\le l\le m}(1+ca_{ll}^{-1}).\end{aligned}$$

利用 (2.6) 式，得到

$$\det(\mathbf{A}_m^{(ij)})\le\exp\Big(\frac{2c}{c_1M^\alpha(\alpha-1)}\Big)\prod_{1\le l\le m:l\ne i}a_{ll}.$$

于是

$$\Big|\frac{\det(\mathbf{A}_m^{(ij)})}{\det(\mathbf{A}_m)}\Big|\le\frac{\exp\big(2c/[c_1M^\alpha(\alpha-1)]\big)}{ca_{ii}}\le\frac{\exp\big(2c/[c_1M^\alpha(\alpha-1)]\big)}{cc_1M^\alpha}\le 1.$$

这里最后一个不等式是通过取 $M$ 充分的大得到的. (2.4) 式得证. 证毕. #

**引理 2.3** 令 $\mathbf{A}_m$ 是 $(u_1,\cdots,u_m)$ 的协方差矩阵. 设 $\mathbf{x}=(x_1,\cdots,x_m)$, $\mathbf{y}=(y_1,\cdots,y_m)$ 是任意两个行向量. 则在定理 1.1 的条件下，有

$$|\mathbf{x}\mathbf{A}_m^{-1}\mathbf{y}^T|\le\sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^m|x_iy_j|.$$

这里及下文中，$\mathbf{A}^{-1}$ 表示矩阵 $\mathbf{A}$ 的逆矩阵，$\mathbf{x}^T$ 表示 $\mathbf{x}$ 的转置.

**证明**：令 $\mathbf{A}_m^{-1}$ 中的元素为 $\sigma_{ij}$. 由引理 2.2 知，$\max\limits_{1\le i,j\le m}|\sigma_{ij}|\le 1$. 所以

$$|\mathbf{x}\mathbf{A}_m^{-1}\mathbf{y}^T| = \Big|\sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^m \sigma_{ij}x_iy_j\Big| \le \max_{1\le i,j\le m}|\sigma_{ij}|\sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^m|x_iy_j| \le \sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^m|x_iy_j|.$$

证毕． #

**引理 2.4** 若 $\boldsymbol{\xi} = \begin{pmatrix}\boldsymbol{\xi}_1\\ \boldsymbol{\xi}_2\end{pmatrix}$ 服从 $n$ 元正态分布 $N(\mathbf{a},\mathbf{B})$，$\mathsf{E}[\boldsymbol{\xi}_1]=\mathbf{a}_1$，$\mathsf{E}[\boldsymbol{\xi}_2]=\mathbf{a}_2$，$\mathbf{B} = \begin{pmatrix}\mathbf{B}_{11} & \mathbf{B}_{12}\\ \mathbf{B}_{21} & \mathbf{B}_{22}\end{pmatrix}$, 其中 $\mathbf{B}_{11}$ 及 $\mathbf{B}_{22}$ 分别是 $\boldsymbol{\xi}_1$ 及 $\boldsymbol{\xi}_2$ 的协方差矩阵，$\mathbf{B}_{12}=\mathbf{B}_{21}^T$ 是由 $\boldsymbol{\xi}_1$ 与 $\boldsymbol{\xi}_2$ 的相应分量的协方差构成的协方差矩阵．则在给定 $\boldsymbol{\xi}_1=\mathbf{x}_1$ 下，$\boldsymbol{\xi}_2$ 的条件分布还是正态分布，其条件数学期望

$$\mathsf{E}[\boldsymbol{\xi}_2|\boldsymbol{\xi}_1=\mathbf{x}_1] = \mathbf{a}_2 + \mathbf{B}_{21}\mathbf{B}_{11}^{-1}(\mathbf{x}_1-\mathbf{a}_1),$$

其条件方差是 $\mathbf{B}_{22}-\mathbf{B}_{21}\mathbf{B}_{11}^{-1}\mathbf{B}_{12}$.

**证明**：见《概率论基础》，复旦大学编，高等教育出版社，1979 年，p.225 定理 8. #

下文中为简化记号，令 $\xi_0=0$，$\xi_i = u_i - \mathsf{E}[u_i|\mathcal{F}_{i-1}]$，$i\ge 1$, 其中 $\mathcal{F}_0=\{\emptyset,\Omega\}$，$\mathcal{F}_i=\sigma(u_j,\ 1\le j\le i)$, $i\ge 1$.

**引理 2.5** 在定理 1.1 的条件下，对任意 $0<\theta<(r-1)/(3r-1)$, 有下面三式成立：

$$\sum_{i=1}^\infty \sigma_{n_i}^{-4(1-\theta)}\mathsf{E}[\xi_i^4] < \infty, \tag{2.7}$$

$$\lim_{k\to\infty}\sigma_{n_k}^{-2(1-\theta)}\Big|\sum_{i=1}^k(\mathsf{E}[\xi_i^2|\mathcal{F}_{i-1}]-\mathsf{E}[\xi_i^2])\Big| = 0 \qquad \text{a.s.}, \tag{2.8}$$

$$\lim_{k\to\infty}\sigma_{n_k}^{-(1-\theta)}\Big|\sum_{i=1}^k\mathsf{E}[u_i|\mathcal{F}_{i-1}]\Big| = 0 \qquad \text{a.s.}. \tag{2.9}$$

**证明**：(2.7) 式的证．由于对 $i\ge 1$, $u_i$ 服从正态分布 $N(0,\lambda_i^2)$, 于是由 (2.1) 式,

$$\mathsf{E}[\xi_i^4] \le 16\mathsf{E}[u_i^4] = 16\lambda_i^4\mathsf{E}\Big[\Big(\frac{u_i}{\lambda_i}\Big)^4\Big] = 16\lambda_i^4\mathsf{E}[|N(0,1)|^4] \le c_M i^{2\alpha}.$$

又,

$$\sigma_{n_k}^2 \ge \sum_{i=1}^k\mathsf{E}[u_i^2] \sim \frac{1}{1+\alpha}(kM)^{1+\alpha},$$

所以

$$\sum_{i=1}^\infty\sigma_{n_i}^{-4(1-\theta)}\mathsf{E}[\xi_i^4] \le c_M\sum_{i=1}^\infty i^{-2(1-\theta)(1+\alpha)+2\alpha} < \infty,$$

这里得到最后不等式是由于 $\alpha<(1-2\theta)/(2\theta)$, 即 $-2(1-\theta)(1+\alpha)+2\alpha<-1$. 得证 (2.7) 式．

(2.8) 式的证．由于

$$\begin{aligned} & \Big|\sum_{i=2}^k(\mathsf{E}[\xi_i^2|\mathcal{F}_{i-1}]-\mathsf{E}[\xi_i^2])\Big| \\ \le\ & \Big|\sum_{i=2}^k(\mathsf{E}[u_i^2|\mathcal{F}_{i-1}]-\mathsf{E}[u_i^2])\Big| + \sum_{i=2}^k\big((\mathsf{E}[u_i|\mathcal{F}_{i-1}])^2+\mathsf{E}[(\mathsf{E}[u_i|\mathcal{F}_{i-1}])^2]\big) \\ =:\ & I_1(k)+I_2(k), \end{aligned}$$

其中

$$I_1(k)=\Big|\sum_{i=2}^{k}(\mathsf{E}[u_i^2|\mathcal{F}_{i-1}]-\mathsf{E}[u_i^2])\Big|,\qquad I_2(k)=\sum_{i=2}^{k}\big((\mathsf{E}[u_i|\mathcal{F}_{i-1}])^2+\mathsf{E}[(\mathsf{E}[u_i|\mathcal{F}_{i-1}])^2]\big).$$

由引理 2.4, 对 $i\geq 2$, $u_i$ 关于 $\mathcal{F}_{i-1}$ 的条件方差是

$$\mathsf{Var}\,[u_i|\mathcal{F}_{i-1}]=\mathsf{E}[u_i^2]-\mathbf{B}\mathbf{A}_{i-1}^{-1}\mathbf{B}^T,$$

其中 $\mathbf{A}_{i-1}$ 是 $(u_1,\cdots,u_{i-1})$ 的协方差矩阵，向量 $\mathbf{B}=(\mathsf{E}[u_1u_i],\cdots,\mathsf{E}[u_{i-1}u_i])$. 由于

$$\mathsf{Var}\,[u_i|\mathcal{F}_{i-1}]=\mathsf{E}[(u_i-\mathsf{E}[u_i|\mathcal{F}_{i-1}])^2|\mathcal{F}_{i-1}]=\mathsf{E}[u_i^2|\mathcal{F}_{i-1}]-(\mathsf{E}[u_i|\mathcal{F}_{i-1}])^2,$$

于是

$$\mathsf{E}[(\mathsf{E}[u_i|\mathcal{F}_{i-1}])^2]=\mathsf{E}[u_i^2]-\mathsf{E}[\mathsf{Var}\,[u_i|\mathcal{F}_{i-1}]]=\mathbf{B}\mathbf{A}_{i-1}^{-1}\mathbf{B}^T.$$

由引理 2.3, (2.5) 式及对 $l\neq k$, $\mathsf{E}[u_lu_k]\geq 0$, 对 $i\geq 2$ 有

$$\mathsf{E}[(\mathsf{E}[u_i|\mathcal{F}_{i-1}])^2]=\mathbf{B}\mathbf{A}_{i-1}^{-1}\mathbf{B}^T\leq\Big(\sum_{j=1}^{i-1}\mathsf{E}[u_ju_i]\Big)^2\leq c. \tag{2.10}$$

这样，得到

$$\mathsf{E}[I_2(k)]=2\sum_{i=2}^{k}\mathsf{E}[(\mathsf{E}[u_i|\mathcal{F}_{i-1}])^2]\leq ck.$$

利用 Markov 不等式， $\forall\,\varepsilon>0$, 有

$$\mathsf{P}(I_2(k)\geq\varepsilon\sigma_{n_k}^{2(1-\theta)})\leq\varepsilon^{-1}\sigma_{n_k}^{-2(1-\theta)}\mathsf{E}[I_2(k)]\leq ck\sigma_{n_k}^{-2(1-\theta)}\leq ck^{-(1-\theta)(1+\alpha)+1}.$$

由于 $1<r<3/2$, 得 $\alpha>(1+\theta)/(1-\theta)$, 于是 $-(1-\theta)(1+\alpha)+1<-1$, 得到上式左边对 $k$ 求和是有限的，利用 Borel-Cantelli 引理，得

$$\lim_{k\to\infty}\sigma_{n_k}^{-2(1-\theta)}I_2(k)=0\qquad\text{a.s.}.$$

由引理 2.4, 对任意 $(x_1,\cdots,x_{i-1})\in\mathbf{R}^{i-1}$, 有

$$\begin{aligned}&\mathsf{E}[u_i^2|u_1=x_1,\cdots,u_{i-1}=x_{i-1}]\\=&\ \mathsf{Var}\,[u_i|u_1=x_1,\cdots,u_{i-1}=x_{i-1}]+(\mathsf{E}[u_i|u_1=x_1,\cdots,u_{i-1}=x_{i-1}])^2\\=&\ \mathsf{E}[u_i^2]-\mathbf{B}\mathbf{A}_{i-1}^{-1}\mathbf{B}^T+(\mathbf{B}\mathbf{A}_{i-1}^{-1}(x_1,\cdots,x_{i-1})^T)^2.\end{aligned}$$

因此，对 $i\geq 2$ 有

$$\begin{aligned}&\mathsf{E}[u_i^2\mathsf{E}[u_i^2|\mathcal{F}_{i-1}]]\\=&\int_{\mathbf{R}^i}x_i^2\Big(\int_{\mathbf{R}}x_i^2\frac{p(x_1,\cdots,x_i)}{p(x_1,\cdots,x_{i-1})}\mathrm{d}x_i\Big)p(x_1,\cdots,x_{i-1},x_i)\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_{i-1}\mathrm{d}x_i\\=&\int_{\mathbf{R}^i}x_i^2\big(\mathsf{E}[u_i^2]-\mathbf{B}\mathbf{A}_{i-1}^{-1}\mathbf{B}^T+(\mathbf{B}\mathbf{A}_{i-1}^{-1}(x_1,\cdots,x_{i-1})^T)^2\big)p(x_1,\cdots,x_i)\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_i\\=&\ (\mathsf{E}[u_i^2])^2-\mathsf{E}[u_i^2](\mathbf{B}\mathbf{A}_{i-1}^{-1}\mathbf{B}^T)+\mathsf{E}[(u_i(\mathbf{B}\mathbf{A}_{i-1}^{-1}(u_1,\cdots,u_{i-1})^T))^2],\end{aligned}$$

其中 $\mathbf{A}_{i-1}$ 是 $(u_1,\cdots,u_{i-1})$ 的协方差矩阵，向量 $\mathbf{B}=(\mathsf{E}[u_1u_i],\cdots,\mathsf{E}[u_{i-1}u_i])$，$p(x_1,\cdots,x_i)$，$p(x_1,\cdots,x_{i-1})$ 分别表示 $(u_1,\cdots,u_i)$，$(u_1,\cdots,u_{i-1})$ 的联合密度函数．利用上式得到

$$\begin{aligned}\mathsf{E}[(\mathsf{E}[u_i^2|\mathcal{F}_{i-1}]-\mathsf{E}[u_i^2])^2] &= (\mathsf{E}[u_i^2])^2-\mathsf{E}[u_i^2\mathsf{E}[u_i^2|\mathcal{F}_{i-1}]]\\ &= \mathsf{E}[u_i^2](\mathbf{B}\mathbf{A}_{i-1}^{-1}\mathbf{B}^T)-\mathsf{E}[(u_i(\mathbf{B}\mathbf{A}_{i-1}^{-1}(u_1,\cdots,u_{i-1})^T))^2]\\ &\le \mathsf{E}[u_i^2](\mathbf{B}\mathbf{A}_{i-1}^{-1}\mathbf{B}^T)\\ &\le c\mathsf{E}[u_i^2],\end{aligned}$$

最后的不等式是利用 (2.10) 式得到的．为简化记号，令 $\zeta_i=\mathsf{E}[u_i^2|\mathcal{F}_{i-1}]-\mathsf{E}[u_i^2]$，$i\ge 2$．则 $\sum\limits_{i=2}^{k}\zeta_i$ 是一个鞅．所以可得

$$\mathsf{E}\Big[\Big(\sum_{i=2}^{k}\zeta_i\Big)^2\Big]=\sum_{i=2}^{k}\mathsf{E}[\zeta_i^2]\le ck\max_{2\le i\le k}\mathsf{E}[u_i^2]\le c_Mk^{1+\alpha}.$$

因此，由 Markov 不等式，得 $\forall\varepsilon>0$,

$$\begin{aligned}\mathsf{P}(I_1(k)\ge\varepsilon\sigma_{n_k}^{2(1-\theta)}) &\le \varepsilon^{-2}\sigma_{n_k}^{-4(1-\theta)}\mathsf{E}[(I_1(k))^2]=\varepsilon^{-2}\sigma_{n_k}^{-4(1-\theta)}\mathsf{E}\Big[\Big(\sum_{i=2}^{k}\zeta_i\Big)^2\Big]\\ &\le c_Mk^{-2(1-\theta)(1+\alpha)+(1+\alpha)}.\end{aligned}$$

由于 $0<\theta<(r-1)/(3r-1)<1/(r+1)$，于是有 $\alpha>2\theta/(1-2\theta)$，即，$-(2(1-\theta)+1)(1+\alpha)<-1$，得到上式左边对 $k$ 求和是有限的，利用 Borel-Cantelli 引理，得

$$\lim_{k\to\infty}\sigma_{n_k}^{-2(1-\theta)}I_1(k)=0\qquad \text{a.s..}$$

得证 (2.8) 式．

(2.9) 的证．由 $\mathsf{E}[u_i]=0$，写

$$\mathsf{E}\Big(\sum_{i=1}^{k}\mathsf{E}[u_i|\mathcal{F}_{i-1}]\Big)^2=\sum_{i=2}^{k}\mathsf{E}[(\mathsf{E}[u_i|\mathcal{F}_{i-1}])^2]+2\sum_{i=2}^{k}\sum_{j=i}^{k}\mathsf{E}[u_j\mathsf{E}[u_i|\mathcal{F}_{i-1}]].$$

由 (2.10) 式，上式右边第 1 项 $\le ck$．由引理 2.4，对 $i\ge 2$，$u_i$ 关于 $\mathcal{F}_{i-1}$ 的条件数学期望

$$\mathsf{E}[u_i|u_1=x_1,\cdots,u_{i-1}=x_{i-1}]=\mathbf{B}\mathbf{A}_{i-1}^{-1}(x_1,\cdots,x_{i-1})^T,$$

其中 $\mathbf{A}_{i-1}$ 是 $(u_1,\cdots,u_{i-1})$ 的协方差矩阵，向量 $\mathbf{B}=(\mathsf{E}[u_1u_i],\cdots,\mathsf{E}[u_{i-1}u_i])$．于是对 $k\ge j>i\ge 1$,

$$\begin{aligned}&\mathsf{E}[u_j\mathsf{E}[u_i|\mathcal{F}_{i-1}]]\\ =&\int_{\mathbf{R}^i}x_j\Big(\int_{\mathbf{R}}x_i\frac{p(x_1,\cdots,x_i)}{p(x_1,\cdots,x_{i-1})}\mathrm{d}x_i\Big)p(x_1,\cdots,x_{i-1},x_j)\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_{i-1}\mathrm{d}x_j\\ =&\int_{\mathbf{R}^i}x_j(\mathbf{B}\mathbf{A}_{i-1}^{-1}(x_1,\cdots,x_{i-1})^T)p(x_1,\cdots,x_{i-1},x_j)\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_{i-1}\mathrm{d}x_j\\ =&\mathbf{B}\mathbf{A}_{i-1}^{-1}(\mathsf{E}[u_1u_j],\cdots,\mathsf{E}[u_{i-1}u_j])^T,\end{aligned}$$

其中 $p(x_1,\cdots,x_{i-1})$, $p(x_1,\cdots,x_i)$, $p(x_1,\cdots,x_{i-1},x_j)$ 分布表示 $(u_1,\cdots,u_{i-1})$, $(u_1,\cdots,u_i)$, $(u_1,\cdots,u_{i-1},u_j)$ 的联合密度函数.

利用引理 2.3 及 (2.5) 式, 对任意 $k\ge j>i\ge 1$

$$|\mathbf{BA}_{i-1}^{-1}(\mathsf{E}[u_1u_j],\cdots,\mathsf{E}[u_{i-1}u_j])^T|\le\sum_{l=1}^{i-1}\mathsf{E}[u_lu_i]\sum_{k=1}^{i-1}\mathsf{E}[u_ku_j]\le c.$$

这样得到了 $\sum\limits_{i=1}^{k}\sum\limits_{j=i}^{k}\mathsf{E}[u_j\mathsf{E}[u_i|\mathcal{F}_{i-1}]]\le ck^2$. 因此

$$\mathsf{E}\Big[\Big(\sum_{i=1}^{k}\mathsf{E}[u_i|\mathcal{F}_{i-1}]\Big)^2\Big]\le ck^2.$$

所以由 Markov 不等式, 得 $\forall\varepsilon>0$,

$$\begin{aligned}\mathsf{P}\Big(\Big|\sum_{i=1}^{k}\mathsf{E}[u_i|\mathcal{F}_{i-1}]\Big|\ge\varepsilon\sigma_{n_k}^{(1-\theta)}\Big)&\le\varepsilon^{-2}\sigma_{n_k}^{-2(1-\theta)}\mathsf{E}\Big[\Big(\sum_{i=1}^{k}\mathsf{E}[u_i|\mathcal{F}_{i-1}]\Big)^2\Big]=ck^2\sigma_{n_k}^{-2(1-\theta)}\\&\le ck^{-(1-\theta)(1+\alpha)+2}.\end{aligned}$$

由于 $1<r<3/2$, 得 $\alpha>(2+\theta)/(1-\theta)$, 于是 $-(1-\theta)(1+\alpha)+2<-1$, 得到上式左边对 $k$ 求和是有限的, 利用 Borel-Cantelli 引理, 得

$$\lim_{k\to\infty}\sigma_{n_k}^{-(1-\theta)}\Big|\sum_{i=1}^{k}\mathsf{E}[u_i|\mathcal{F}_{i-1}]\Big|=0\qquad\text{a.s.}.$$

得证 (2.9) 式. 证毕. #

## § 3. 定理 1.1 的证明

**定理 1.1 的证明**: 利用关于鞅的 Skorohod 表示 (参见 [7], p.269). 对于给定的鞅序列 $\Big\{\sum\limits_{i=1}^{k}\xi_i,k\ge1\Big\}$, 可构造一个新的概率空间, 在其上存在一标准 Wiener 过程 $W=\{W(t),t\ge0\}$ 和一非负的变量序列 $\{\nu_i,i\ge1\}$, 使得

$$\Big\{\sum_{i=1}^{k}\xi_i,k\ge1\Big\}\stackrel{\mathrm{d}}{=}\Big\{W\Big(\sum_{i=1}^{k}\nu_i\Big),k\ge1\Big\}.\tag{3.1}$$

并且, 存在一个 $\sigma$ 域流 $\{\mathcal{A}_n,n\ge1\}$ 使得 $\nu_n$ 关于 $\sigma$ 域 $\mathcal{A}_n$ 是可测的, 且

$$\mathsf{E}[\nu_n|\mathcal{A}_{n-1}]=\mathsf{E}[\xi_n^2|\mathcal{F}_{n-1}]\qquad\text{a.s.},$$

及对任意实数 $p\ge1$,

$$\mathsf{E}[\nu_n^p|\mathcal{A}_{n-1}]\le c_p\mathsf{E}[|\xi_n|^{2p}|\mathcal{F}_{n-1}]\qquad\text{a.s.}.$$

由此可得

$$\sum_{i=1}^{k}(\nu_i-\mathsf{E}[\nu_i])=\sum_{i=1}^{k}(\nu_i-\mathsf{E}[\nu_i|\mathcal{A}_{i-1}])+\sum_{i=2}^{k}(\mathsf{E}[\xi_i^2|\mathcal{F}_{i-1}]-\mathsf{E}[\xi_i^2]).$$

由 (2.7) 式得到

$$\sum_{i=1}^{\infty}\sigma_{n_i}^{-4(1-\theta)}\mathsf{E}[(\nu_i-\mathsf{E}[\nu_i|\mathcal{A}_{i-1}])^2]\le 2\sum_{i=1}^{\infty}\sigma_{n_i}^{-4(1-\theta)}\mathsf{E}[\nu_i^2]\le c\sum_{i=1}^{\infty}\sigma_{n_i}^{-4(1-\theta)}\mathsf{E}[\xi_i^4]<\infty.$$

这样由鞅基本收敛定理 (参见 [7], p.17), 知 $\sum_{i=1}^{\infty}\sigma_{n_i}^{-2(1-\theta)}(\nu_i-\mathsf{E}[\nu_i|\mathcal{A}_{i-1}])$ a.s. 收敛．因而，由 Kronecker 引理 (参见 [7], p.31), 得

$$\lim_{k\to\infty}\sigma_{n_k}^{-2(1-\theta)}\sum_{i=1}^{k}(\nu_i-\mathsf{E}[\nu_i|\mathcal{A}_{i-1}])=0\qquad\text{a.s.}.$$

由上式及 (2.8) 式，可得

$$\lim_{k\to\infty}\sigma_{n_k}^{-2(1-\theta)}\sum_{i=1}^{k}(\nu_i-\mathsf{E}[\nu_i])=0\qquad\text{a.s.},$$

即，$\sum_{i=1}^{k}(\nu_i-\mathsf{E}[\nu_i])=o(\sigma_{n_k}^{2(1-\theta)})$ a.s.. 这样，利用 Csörgő-Révész 大增量定理 (参见 [9], 定理 1.2.1) 得到

$$\lim_{k\to\infty}\Big(\sigma_{n_k}^{2(1-\theta)}\Big(\log\Big(\sigma_{n_k}^{-2(1-\theta)}\sum_{i=1}^{k}\mathsf{E}[\nu_i]\Big)+\log\log\Big(\sum_{i=1}^{k}\mathsf{E}[\nu_i]\Big)\Big)\Big)^{-1/2}$$
$$\cdot\Big|W\Big(\sum_{i=1}^{k}\nu_i\Big)-W\Big(\sum_{i=1}^{k}\mathsf{E}[\nu_i]\Big)\Big|=0\qquad\text{a.s.}.$$

又，$\sum_{i=1}^{k}\mathsf{E}[\nu_i]=\sum_{i=1}^{k}\mathsf{E}[\xi_i^2]\le 2\sum_{i=1}^{k}\mathsf{E}[u_i^2]\le 2\sigma_{n_k}^2$, 且利用 (3.1) 式，得

$$\lim_{k\to\infty}(\sigma_{n_k}^{2(1-\theta)}\log k)^{-1/2}\Big|\sum_{i=1}^{k}\xi_i-W\Big(\sum_{i=1}^{k}\mathsf{E}[\nu_i]\Big)\Big|=0\qquad\text{a.s.}.$$

由于

$$\begin{aligned}|S_n-W(\sigma_n^2)|\quad\le\quad&\Big|\sum_{i=1}^{k}\xi_i-W\Big(\sum_{i=1}^{k}\mathsf{E}[\nu_i]\Big)\Big|+\Big|\sum_{i=1}^{k}\mathsf{E}[u_i|\mathcal{F}_{i-1}]\Big|+\Big|S_n-\sum_{i=1}^{k}u_i\Big|\\&+\Big|W\Big(\sum_{i=1}^{k}\mathsf{E}[\nu_i]\Big)-W(\sigma_n^2)\Big|,\end{aligned}$$

于是，为完成定理 1.1 的证明，只需证明下面三个式子成立即可：

$$\lim_{k\to\infty}\sigma_{n_k}^{-(1-\theta)}\Big|\sum_{i=1}^{k}\mathsf{E}[u_i|\mathcal{F}_{i-1}]\Big|=0\qquad\text{a.s.},\tag{3.2}$$

$$\lim_{k\to\infty}\sigma_{n_k}^{-(1-\theta)}\max_{n_k\le n<n_{k+1}}\Big|S_n-\sum_{i=1}^{k}u_i\Big|=0\qquad\text{a.s.},\tag{3.3}$$

$$\lim_{k\to\infty}\sigma_{n_k}^{-(1-\theta)}\max_{n_k\le n<n_{k+1}}\Big|W\Big(\sum_{i=1}^{k}[\nu_i]\Big)-W(\sigma_n^2)\Big|=0\qquad\text{a.s.}.\tag{3.4}$$

由 (2.9) 式，(3.2) 式成立．由于对 $n_k\le n<n_{k+1}$,

$$\begin{aligned}\mathsf{E}\Big[\Big(\sum_{i=n_k+1}^{n}X_i\Big)^2\Big]\quad&=\quad\sum_{i=n_k+1}^{n}\mathsf{E}[X_i^2]+2\sum_{i=n_k+1}^{n}\sum_{j=i+1}^{n}\mathsf{E}[X_iX_j]\\&\le\quad\sum_{i=n_k+1}^{n}\mathsf{E}[X_i^2]+2\sum_{i=n_k+1}^{n}u(1)\le c(n-n_k)\le c_{\alpha,M}k^{\alpha};\end{aligned}$$

利用 (2.3) 式，(2.1) 式，得

$$\mathsf{E}\Big[\Big(\sum_{i=1}^{k} v_i\Big)^2\Big] = \sum_{i=1}^{k}\mathsf{E}[v_i^2] + 2\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=i+1}^{k}\mathsf{E}[v_iv_j] \le c_{\beta,M}k^{1+\beta}.$$

又，$S_n - \sum\limits_{i=1}^{k} u_i = \sum\limits_{i=n_k+1}^{n} X_i + \sum\limits_{i=1}^{k} v_i$, 所以

$$\mathsf{E}\Big[\Big(S_n - \sum_{i=1}^{k} u_i\Big)^2\Big] \le \mathsf{E}\Big[\Big(\sum_{i=n_k+1}^{n} X_i\Big)^2\Big] + \mathsf{E}\Big[\Big(\sum_{i=1}^{k} v_i\Big)^2\Big] \le ck^{\alpha\vee(1+\beta)}.$$

又，$S_n - \sum\limits_{i=1}^{k} u_i$ 服从正态分布，$\sigma_{n_k}^2 \ge \sum\limits_{i=1}^{k}\mathsf{E}[u_i^2] \ge ck^{1+\alpha}$, 因此，$\forall\,\varepsilon > 0$,

$$\begin{aligned}\mathsf{P}\Big(\max_{n_k\le n<n_{k+1}}\Big|S_n - \sum_{i=1}^{k} u_i\Big| \ge \varepsilon\sigma_{n_k}^{(1-\theta)}\Big) &\le \sum_{n=n_k+1}^{n_{k+1}}\mathsf{P}\Big(\Big|S_n - \sum_{i=1}^{k} u_i\Big| \ge \varepsilon\sigma_{n_k}^{(1-\theta)}\Big)\\ &\le \sum_{n=n_k+1}^{n_{k+1}}\mathsf{P}(|N(0,1)| \ge \varepsilon ck^{(1+\alpha)(1-\theta)-(\alpha\vee(1+\beta))/2})\\ &\le ck^{\alpha}\exp(-ck^{2(1+\alpha)(1-\theta)-(\alpha\vee(1+\beta))}).\end{aligned}$$

这里为了得到最后不等式利用了下面估计：$\forall\,x>0$, $\mathsf{P}(N(0,1)\ge x) \le [1/(\sqrt{2\pi}x)]e^{-x^2/2}$. 由于 $\alpha < (1-2\theta)/(2\theta)$, 于是 $2(1+\alpha)(1-\theta)-\alpha > 0$; 且由于 $\alpha > (\theta+\beta)/(1-\theta)$, 于是 $2(1+\alpha)(1-\theta)-(1+\beta) > 0$. 这样容易得到上式左边对 $k$ 求和是有限的，利用 Borel-Cantelli 引理，得证 (3.3) 式.

下证 (3.4) 式. 由于对 $i \ge 1$,

$$\mathsf{E}[\nu_i] = \mathsf{E}[\xi_i^2] = \mathsf{E}[u_i^2] - \mathsf{E}[(\mathsf{E}[u_i|\mathcal{F}_{i-1}])^2] = \lambda_i^2 - \mathsf{E}[(\mathsf{E}[u_i|\mathcal{F}_{i-1}])^2],$$

于是有

$$\begin{aligned}\max_{n_k\le n<n_{k+1}}\Big|\sum_{i=1}^{k}\mathsf{E}[\nu_i] - \sigma_n^2\Big| &\le \Big|\sum_{i=1}^{k}\mathsf{E}[\nu_i] - \sigma_{n_k}^2\Big| + \max_{n_k\le n<n_{k+1}}|\sigma_{n_k}^2 - \sigma_n^2|\\ &\le \Big|\sum_{i=1}^{k}\lambda_i^2 - \sigma_{n_k}^2\Big| + \sum_{i=1}^{k}\mathsf{E}[(\mathsf{E}[u_i|\mathcal{F}_{i-1}])^2] + \max_{n_k\le n<n_{k+1}}|\sigma_{n_k}^2 - \sigma_n^2|.\end{aligned}$$

由 (2.10) 式，上式右边第二项 $\le ck$. 由于

$$\sigma_{n_k}^2 - \sum_{i=1}^{k}\lambda_i^2 = -\sum_{i=1}^{k}\tau_i^2 + 2\sum_{i=1}^{k}\mathsf{E}[u_iv_i] + 2\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=i+1}^{k}\mathsf{E}[(u_i+v_i)(u_j+v_j)],$$

于是，利用引理 2.1, 可得 $\Big|\sigma_{n_k}^2 - \sum\limits_{i=1}^{k}\lambda_i^2\Big| \le ck^{1+\beta}$.

对 $n_k \le n < n_{k+1}$, 有

$$\sigma_n^2 - \sigma_{n_k}^2 = \mathsf{E}[(S_{n_k} + (S_n - S_{n_k}))^2] - \mathsf{E}[S_{n_k}^2] = \mathsf{E}[(S_n - S_{n_k})^2] + 2\mathsf{E}[S_{n_k}(S_n - S_{n_k})].$$

由于

$$|\mathsf{E}[S_{n_k}(S_n - S_{n_k})]| = \mathsf{E}[S_{n_k}(S_n - S_{n_k})] \le \sum_{i=1}^{n_k} u(i) \le c.$$

于是得到 $|\sigma_n^2 - \sigma_{n_k}^2| \le c(n-n_k) + c \le ck^\alpha$. 这样得到了

$$\max_{n_k \le n < n_{k+1}} \left| \sum_{i=1}^{k} \mathsf{E}[\nu_i] - \sigma_n^2 \right| \le ck^{\alpha \vee (1+\beta)}.$$

从而，由于 $\alpha < (1-\theta)/\theta$, 于是 $-(1+\alpha)(1-\theta)+\alpha < 0$; 且由于 $\alpha > (\theta+\beta)/(1-\theta)$, 于是 $-(1+\alpha)(1-\theta)+(1+\beta) < 0$. 因此得到

$$\lim_{k\to\infty} \sigma_{n_k}^{-2(1-\theta)} \max_{n_k \le n < n_{k+1}} \left| \sum_{i=1}^{k} \mathsf{E}[\nu_i] - \sigma_n^2 \right| = 0.$$

因此，利用 Csörgő-Révész 大增量定理 (参见 [9]，定理 1.2.1) 容易得证 (3.4) 式. 定理 1.1 证毕． #

## 参 考 文 献

[1] Esary, J., Proschan, F. and Walkup, D., Association of random variables with applications, *Ann. Math. Statist.*, **38**(1967), 1466–1474.

[2] Barlow, R.E. and Proschan, F., *Statistical Theory of Reliability and Life Testing: Probability Models*, To Begin with Publisher, Silver Spring, MD, 1981.

[3] Newman, C.M., Normal fluctuations and the FKG inequalities, *Comm. Math. Phys.*, **74**(1980), 119–128.

[4] Cox, J.T. and Grimmett, G., Central limit theorems for associated random variables and the percolation model, *Ann. Probab.*, **12**(1984), 514–528.

[5] Yu, H., A strong invariance principle for associated sequences, *Ann. Probab.*, **24**(1996), 2079–2097.

[6] Berkes, I. and Philipp, W., Approximation theorems for independent and weakly dependence random variables, *Ann. Probab.*, **7**(1979), 29–54.

[7] Hall, P. and Heyde, C.C., *Martingale Limit Theory and its Application*, Academic Press, New York, 1980.

[8] Price, G.B., Bounds for determinants with dominant principle diagonal, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **2**(1951), 497–502.

[9] Csörgő, M. and Révész, P., *Strong Approximations in Probability and Statistics*, Academic Press, New York, 1981.

# A Strong Invariance Principle for Associated Sequences of Gaussian Random Variables

WANG WENSHENG

(*Department of Statistics, East China Normal University, Shanghai, 200062*)

In this paper, by applying the Skorohod martingale embedding theorem, we prove a strong invariance principle for an associated sequence of Gaussian random variables under the restrictions that the sequence is Gaussian and the covariance coefficients of the sequence decay with power decay rates. As consequences, the law of the iterated logarithm and Chung's law of the iterated logarithm for associated sequences of Gaussian random variables are obtained.