应用概率统计　第二十二卷
第二期　2006 年 5 月

Chinese Journal of Applied Probability
and Statistics Vol. 22 No. 2 May 2006

时滞不确定性 Markov 切换线性随机微分系统的指数鲁棒稳定性

舒慧生　　魏国亮
(东华大学理学院，上海，200051)

摘　要

研究了一类时滞不确定性 Markov 切换随机微分系统的均方指数鲁棒随机稳定性．系统中的时滞是时变的，不确定项结构为范数有界，Markov 切换是连续时间、离散状态的时齐 Markov 过程．利用随机 Lyapunov 函数方法和 LMI 技术，得到了几个判定系统均方指数鲁棒随机稳定性的充分性条件．一个数值例子说明了判据的有效性和可行性．

关 键 词：时滞，不确定性，Markov 切换，随机指数稳定，鲁棒性，线性矩阵不等式.
学 科 分 类 号：O211.6.

§1.　引　言

时滞现象在实际工程问题中普遍存在的．而时滞的存在往往会导致系统的不稳定和较差的系统性能，稳定性又是系统能正常工作的必须具备的首要条件．因此，时滞系统的稳定性研究，长期以来一直受到众多学者的极大关注．研究方法主要以 Lyapunov 函数、泛函法为主，LaSalle 不变原理、比较定理和一些代数方法为辅．时滞系统的稳定性一般分为时滞独立和时滞相关稳定性，相对来说，前者较后者保守，特别是当小时滞的情形．

在近 30 年中，随机系统理论的研究，成了系统分析的一个热点．特别在随机系统的稳定性研究领域，已经取得了许多令人振奋的结果．如 Has'minskii, R.Z. (1980[6]), Mao, X. (1994[11], 1997[12]) 针对非线性 Itô 型随机微分方程的稳定性，进行了较为系统深入的研究，特别是文 [12]，关于随机泛函、中立型和倒向微分方程的稳定性研究，作出了许多具有开创性的贡献．许多结果已被推广到受半鞅驱动的随机微分方程 (Mao, X., 1991[10]).

近年来，Markov 模态切换系统稳定性研究，受到了许多学者极大的关注．Feng, X., 1992[5] 运用 Lyapunov 指数方法，研究了连续时间系统 $\dot{x}(t)=A(r(t))x(t)$ 的的指数稳定性．Costa, O.L.V., 1993[4] 运用矩阵谱方法，讨论了离散时间系统的情形 $x(k+1)=A(r(k))x(k)$ 的均方稳定性．Mariton, M., 1988[9]; Feng, X., 1992[5] 给出了系统的几乎必然稳定性的几个判据．Basak et al., 1996[1] 首次讨论半线性 Markov 切换 Itô 型随机微分系统

$$\mathrm{d}x(t)=A(r(t))x(t)\mathrm{d}t+\sigma(x(t),r(t))\mathrm{d}w(t)$$

的稳定性．进一步，Mao, X., 1999[13] 运用 Lyapunov 函数方法系统地研究了非线性 Markov 切

本文 2005 年 3 月 30 日收到.

换 Itô 型随机微分系统

$$\mathrm{d}x(t)=f(x(t),t,r(t))\mathrm{d}t+g(x(t),t,r(t))\mathrm{d}w(t)$$

解的存在惟一性和稳定性，并引入 M 矩阵方法，得到了几个易于稳定性测试的充分性判别条件．Mao, X., 1999[14], 2000[15] 研究了时滞非线性 Markov 切换 Itô 型随机微分系统

$$\mathrm{d}x(t)=f(x(t),x(t-\tau),t,r(t))\mathrm{d}t+g(x(t),x(t-\tau),t,r(t))\mathrm{d}w(t)$$

的时滞独立和时滞相关稳定性．我们必须注意到上述这些结果都在假设系统模型中的时滞值为定常数的条件下获得的．然而，在实际控制系统中，时滞值往往无法测量，且有时它还是一个变量 (一般随时间变化)．另一方面， [1][15] 研究非线性随机系统稳定性时，采用的随机 Lyapunov 函数方法，而如何构造一个合适的 Lyapunov 函数本身就是个棘手的问题，尽管这些结果在理论上的重要性不容置疑，但离实际应运仍然有一定的距离．

由于建模误差，模型中的不确定性因素难以避免．在过去的几十年，关于不确定时滞线性系统的鲁棒稳定性，许多学者进行了相关研究，见 Xie, 1997a[19], 1997b[20], Lien, 2001[8]．主要方法是基于 Riccati(型) 方程或 LMI. 关于不确定性 Markov 切换随机系统 $x(t)=[A(r(t))+\Delta A(r(t))]x(t)+[B(r(t))+BA(r(t))]x(t-\tau)$ 的鲁棒稳定性研究，已有一些结果．Shi, 1996[16], Benjelloun, 1996[2]．但这些文献所考虑的模型并未处理系统随机噪声的影响，且时滞是定常的．本文目的，就是研究在随机环境因素 (Itô 型随机微分描述) 下，系统模型存在时变时滞和不确定性时，模态切换受制于连续时间、离散状态的 Markov 过程的随机微分系统的鲁棒指数稳定性．

§2. 模型描述

设 $(\Omega,\mathcal{F},\{\mathcal{F}_t\}_{t\ge0},\mathsf{P})$ 是一带 σ 流 $\{\mathcal{F}_t\}_{t\ge0}$ ($\{\mathcal{F}_t\}_{t\ge0}$ 满足通常条件, 即右连续性和 $\mathcal{F}_0$ 包含所有 P 零测集) 的完全概率空间， $\{w(t),t\ge0\}$ 是定义在 $(\Omega,\mathcal{F},\{\mathcal{F}_t\}_{t\ge0},\mathsf{P})$ 上的一维标准 Brown 运动，$|\cdot|$ 表示 R^n 中欧氏范数．记 $C([-h,0];R^n)$ 表示连续函数 $\varphi:[-h,0]\to R^n$ 的全体, 其上范数 $\|\varphi\|=\sup\limits_{-\mu\le t\le0}|\varphi(t)|$; $C^b_{\mathcal{F}_0}([-h,0];R^n)$ 表示取值于 $C([-h,0];R^n)$, $\mathcal{F}_0$ 可测的有界随机变量全体．对于矩阵 A, A^T 表示其转置， $|A|=\sqrt{\mathrm{tr}(A^TA)}$ 表其迹范数， $\|A\|=\sup\{|Ax|:|x|=1\}$ 表其算子范数．对于对称矩阵 X,Y, $X\ge Y$ $(X>Y)$ 表示 $X-Y$ 半正定 (正定), $\lambda_{\max}(A)$ $(\lambda_{\min}(A))$ 分别表示 A 的最大 (小) 特征值．

设 $\{r(t),t\ge0\}$ 为定义在 $(\Omega,\mathcal{F},\{\mathcal{F}_t\}_{t\ge0},\mathsf{P})$ 上取值于有限状态空间 $S=\{1,2,\cdots,N\}$ 的右连续的 Markov 链，其转移概率为

$$\mathsf{P}\{r(t+\Delta t)=j|r(t)=i\}=\begin{cases}\lambda_{ij}\Delta t+o(\Delta t) & i\ne j;\\ 1+\lambda_{ii}\Delta t+o(\Delta t) & i=j.\end{cases}\tag{2.1}$$

这里， $\Delta t>0$, $\lim\limits_{\Delta t\to0}o(\Delta t)/\Delta t=0$, λ_{ij} 表示从时刻 t 状态 i $(i\ne j)$ 转移到 $t+\Delta t$ 时刻状态 j 的

转移速率，且满足

$$\lambda_{ii} = -\sum_{j\neq i} \lambda_{ij}. \tag{2.2}$$

假设 $\{r(t), t\geq 0\}$ 与 $\{w(t), t\geq 0\}$ 独立．易知， $r(t)$ 的每一个样本轨道都是一个右连续的阶梯函数，且在 $[0,+\infty)$ 内的每一个有限子区间上，只有有限个跳跃点．(见王梓坤《随机过程通论》，上册)

考虑下列不确定线性时滞 Markov 切换随机微分系统

$$\begin{aligned} \mathrm{d}x(t) &= [(A(r(t))+\Delta A(r(t)))x(t)+(A_d(r(t))+\Delta A_d(r(t)))x(t-\tau(t)))]\mathrm{d}t \\ &\quad +[(E(r(t))+\Delta E(r(t)))x(t)+(E_d(r(t))+\Delta E_d(r(t)))x(t-\tau)]\mathrm{d}w(t) \quad t>0, \\ &\qquad x_0=\xi\in C^b_{\mathcal{F}_0}([-h,0];R^n). \end{aligned} \tag{2.3}$$

当 $r(t)=i$ 时，记 $A_i\triangleq A(r(t))$, $A_{di}\triangleq A_d(r(t))$, $E_i\triangleq E(r(t))$, $E_{di}\triangleq E_d(r(t))$, 且 A_i, A_{di}, E_i, E_{di} 为定常矩阵．ΔA, ΔA_d, ΔE, ΔE_d 为不确定项，且具有如下结构，当 $r(t)=i$ 时，

$$[\Delta A_i, \Delta A_{di}, \Delta E_i, \Delta E_{di}] = MF(t)[N_{ai}, N_{adi}, N_{ei}, N_{edi}]. \tag{2.4}$$

这里， M, N_{ai}, N_{adi}, N_{ei}, N_{edi} 为已知定常矩阵； $F(t): R\to R^{k\times l}$, 未知时变 Lebesgue 可测矩阵函数，且满足

$$F(t)^T F(t)\leq I \qquad \forall\, t>0. \tag{2.5}$$

满足条件 (2.4) 、 (2.5) 的 ΔA, ΔA_d, ΔE, ΔE_d 被称之为允许的．时滞 $\tau(t)$ 是时变的且满足

$$0<\tau(t)\leq h<+\infty, \qquad \dot{\tau}(t)\leq \mu<1. \tag{2.6}$$

备注 满足式 (2.4) 、(2.5) 的不确定性结构，在处理鲁棒分析和综合时，广泛使用 [18][19].

定义 称系统 (2.3) 是均方指数鲁棒随机稳定的，如果存在常数 $\lambda>0$, 对满足条件 (2.4) 、 (2.5) 的所有允许不确定项 ΔA, ΔA_d, ΔE, ΔE_d, 使得下式成立．

$$\lim_{t\to+\infty}\sup\frac{1}{t}\log\mathsf{E}(|x(t;\xi)|^2)\leq -\lambda. \tag{2.7}$$

设 $C^{2,1}(R^n\times R_+\times S; R_+)$ 表示 $R^n\times R_+\times S$ 上关于 x 两次可微，关于 t 一次可微的非负函数 $V(x,t,i)$ 的全体，对 $\forall\,(x,y,t,i)\in R^n\times R_+\times S$, 定义如下形式算子

$$LV: R^n\times R^n\times R_+\times S\to R,$$

$$\begin{aligned} LV(x,t,i) &= V_t(x,t,i)+V_x(x,t,i)[(A_i+\Delta A_i)x(t)+(A_{di}+\Delta A_{di})x(t-\tau(t))] \\ &\quad +\frac{1}{2}\mathrm{tr}\{[(E_i+\Delta E_i)x(t)+(E_{di}+\Delta E_{di})x(t-\tau(t))]^T \\ &\quad \cdot V_{xx}[(E_i+\Delta E_i)x(t)+(E_{di}+\Delta E_{di})x(t-\tau(t))]\}+\sum_{j=1}^N \lambda_{ij}V(x,t,j). \end{aligned} \tag{2.8}$$

引理 2.1 (Skorohod, 1989[17], 广义 Itô 公式) 设 $V(x,t,i)\in C^{2,1}(R^n\times R_+\times S;R_+)$, τ_1, τ_2 为停时，如果 $0\leq\tau_1\leq\tau_2<+\infty$, 则成立

$$\mathsf{E}V(x(\tau_2),\tau_2,r(\tau_2))=\mathsf{E}V(x(\tau_1),\tau_1,r(\tau_1))+\mathsf{E}\int_{\tau_1}^{\tau_2}LV(x(t),t,r(t))\mathrm{d}t. \tag{2.9}$$

引理 2.2 (Wang, Y., 1992[18])　设 A, B, C, D 和 F 是适定维数矩阵，如 $D > 0$, $F^TF \le I$, 则下列结论成立

(i)　对 $\varepsilon > 0$, $x, y \in R^n$, 有

$$2xBFCy \le \varepsilon^{-1}x^TBB^Tx + \varepsilon y^TC^TCy; \tag{2.10}$$

(ii)　对满足 $D - \varepsilon BB^T > 0$ 的 ε, 有

$$(A+BFC)^TD^{-1}(A+BFC) \le A^T(D-\varepsilon BB^T)^{-1}A + \varepsilon^{-1}C^TC. \tag{2.11}$$

引理 2.3 (Schur 补)　设 $\Omega = \begin{pmatrix} \Omega_{11} & \Omega_{12} \\ \Omega_{21} & \Omega_{22} \end{pmatrix}$ 为对称阵，则下列三条件等价

(i)　$\Omega < 0$;

(ii)　$\Omega_{11} < 0$, $\Omega_{22} - \Omega_{12}^T\Omega_{11}^{-1}\Omega_{12} < 0$;

(iii)　$\Omega_{22} < 0$, $\Omega_{11} - \Omega_{12}\Omega_{22}^{-1}\Omega_{12}^T < 0$.

§ 3.　主要结果与证明

定理 3.1　如果存在 $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_2 > 0$ (常数), $N+1$ 个正定阵 $P_i > 0$ $(i = 1, \cdots, N)$, $Q > 0$, 使得如下不等式成立

$$P_i^{-1} - \varepsilon_2 MM^T > 0, \tag{3.1}$$

$$H_i < 0. \tag{3.2}$$

这里,

$$\begin{aligned} H_i &= \begin{pmatrix} \Omega & P_iA_{di} \\ A_{di}P_i & -(1-\mu)Q \end{pmatrix} + \varepsilon_1^{-1}\begin{pmatrix} N_{ai}^T \\ N_{adi}^T \end{pmatrix}(N_{ai}, N_{adi}) \\ &\quad + \begin{pmatrix} E_i^T \\ E_{di}^T \end{pmatrix}(P_i^{-1} - \varepsilon_2 MM^T)^{-1}(E_i, E_{di}) + \varepsilon_2^{-1}\begin{pmatrix} N_{ei}^T \\ N_{edi}^T \end{pmatrix}(N_{ei}, N_{edi}), \\ \Omega &= P_iA_i + A_i^TP_i + \sum_{j=1}^N \lambda_{ij}P_j + P_iMM^TP_i + Q. \end{aligned}$$

则对 $\forall\, \xi \in C_{\mathcal{F}_0}^b([-h, 0]; R^n)$, 随机系统 (2.3) 是均方指数鲁棒随机稳定的，即成立

$$\lim_{t\to\infty}\sup \frac{1}{t}\log(\mathsf{E}|x(t;\xi)|^2) \le -\lambda.$$

其中，$\lambda > 0$ 满足下列代数方程

$$\lambda_P - \lambda_H + he^{\lambda h} = \Big(1 \wedge \frac{\lambda_H}{1-\mu}\Big). \tag{3.3}$$

$\lambda_P = \max\limits_{1\le i\le N}(\lambda_{\max}(P_i))$, $\lambda_Q = \lambda_{\max}(Q)$, $\lambda_H = \min\limits_{1\le i\le N}(-\lambda_{\max}(H_i))$.

证明: 选取

$$V(x(t),t,i)=e^{\lambda t}\Big(x(t)^TP_ix(t)+\int_{t-\tau(t)}^{t}x(s)^TQx(s)\mathrm{d}s\Big)\in C^{2,1}(R^n\times R_+\times S;R_+).$$

由式 (2.8) 定义的 LV, 计算得

$$\begin{aligned}LV(x(t),t,i) &= \lambda e^{\lambda t}\Big(x(t)^TP_ix(t)+\int_{t-\tau(t)}^{t}x(s)^TQx(s)\mathrm{d}s\Big)\\ &\quad+e^{\lambda t}(x(t)^TQx(t)-x(t-\tau(t))^TQx(t-\tau(t))(1-\dot{\tau}(t)))\\ &\quad+e^{\lambda t}x(t)^T\Big(\sum_{j=1}^{N}\lambda_{ij}P_j\Big)x(t)+e^{\lambda t}\cdot 2x(t)^TP_i(A_ix(t)+A_{di}x(t-\tau(t)))\\ &\quad+e^{\lambda t}\cdot 2x(t)^TP_i(\Delta A_ix(t)+\Delta A_{di}x(t-\tau(t)))\\ &\quad+e^{\lambda t}((E_i+\Delta E_i)x(t)+(E_{di}+\Delta E_{di})x(t-\tau(t)))^T\\ &\quad\cdot P_i((E_i+\Delta E_i)x(t)+(E_{di}+\Delta E_{di})x(t-\tau(t))),\end{aligned}$$

选取 $\varepsilon_2>0$, 使得对 $\forall i\in S$, 成立 $P_i^{-1}-\varepsilon_2MM^T>0$.

由引理 2.2, 得

$$\begin{aligned}&2x(t)^TP_i(\Delta A_ix(t)+\Delta A_{di}x(t-\tau(t)))\\ =\;&2x(t)^TP_iMF(t)(N_{ai}x(t)+N_{adi}x(t-\tau(t)))\\ \leq\;&\varepsilon_1x(t)^TP_iMM^TP_ix(t)+\varepsilon_1^{-1}(N_{ai}x(t)+N_{adi}x(t-\tau(t)))^T(N_{ai}x(t)+N_{adi}x(t-\tau(t)))\\ =\;&\varepsilon_1x(t)^TP_iMM^TP_ix(t)+\varepsilon_1^{-1}(x(t)^T,x(t-\tau(t))^T)\begin{pmatrix}N_{ai}^T\\ N_{adi}^T\end{pmatrix}(N_{ai},N_{adi})\begin{pmatrix}x(t)\\ x(t-\tau(t))\end{pmatrix}.\end{aligned}\tag{3.4}$$

记 $\overline{E}_i=(E_i,E_{di})$, $\overline{N}_i=(N_{ei},N_{edi})$, 这样有

$$\begin{aligned}&(E_i+\Delta E_i,E_{di}+\Delta E_{di})=(E_i,E_{di})+MF(t)(N_{ei},N_{edi})=\overline{E}_i+MF(t)\overline{N}_i,\\ &(\overline{E}_i+MF(t)\overline{N}_i)^TP_i(\overline{E}_i+MF(t)\overline{N}_i)\leq\overline{E}_i^T(P_i^{-1}-\varepsilon_2MM^T)^{-1}\overline{E}_i+\varepsilon_2^{-1}\overline{N}_i^T\overline{N}_i.\end{aligned}\tag{3.5}$$

联合 (2.6) 、 (3.4) 和 (3.5) 式, 得

$$\begin{aligned}LV(x(t),t,i) &\leq e^{\lambda t}(x(t)^Tx(t-\tau(t))^T)H_i(x(t)^T,x(t-\tau(t))^T)^T\\ &\quad+\lambda e^{\lambda t}\int_{t-\tau(t)}^{t}x(s)^TQx(s)\mathrm{d}s+\lambda e^{\lambda t}\Big(x(t)^TP_ix(t)+\int_{t-\tau(t)}^{t}x(s)^TQx(s)\mathrm{d}s\Big),\\ H_i &= \begin{pmatrix}P_iA_i+A_i^TP_i+\sum_{j=1}^{N}\lambda_{ij}P_j+P_iMM^TP_i+Q & P_iA_{di}\\ A_{di}^TP_i & -(1-\mu)Q\end{pmatrix}\\ &\quad+\varepsilon_1^{-1}\begin{pmatrix}N_{ai}^T\\ N_{adi}^T\end{pmatrix}(N_{ai},N_{adi})+\overline{E}_i^T(P_i^{-1}-\varepsilon_2MM^T)^{-1}\overline{E}_i+\varepsilon_2^{-1}\overline{N}_i^TN_i.\end{aligned}$$

由引理 2.1 (广义 Itô 公式), 可得

$$
\begin{aligned}
& \mathsf{E}V(x(t),t,r(t)) \\
= \;& \mathsf{E}V(x(0),0,r(0)) + \mathsf{E}\int_0^t LV(x(s),s,r(s))\mathrm{d}s \\
\le \;& (\lambda_P + h\lambda_Q)\mathsf{E}\|\xi\|^2 + \mathsf{E}\int_0^t e^{\lambda s}\Big[\lambda x(s)^T P_{r(s)}x(s) + \lambda\int_{s-\tau(s)}^s x(\theta)^T Qx(\theta)\mathrm{d}\theta\Big]\mathrm{d}s \\
& + \mathsf{E}\int_0^t e^{\lambda s}(x(s)^T, x(s-\tau(s))^T)H_{r(s)}(x(s)^T, x(s-\tau(s))^T)^T\mathrm{d}s.
\end{aligned}
\tag{3.6}
$$

对 $\forall i\in S$, 由 $P_i>0$, $Q>0$, 易知，存在 $\rho=\lambda_P/[\lambda\min(Q)]>0$, 使 $P_i\le\rho Q$, 这样有

$$
\begin{aligned}
& \mathsf{E}V(x(t),t,r(t)) \\
\le \;& (\lambda\rho + h\lambda_Q)\mathsf{E}\|\xi\|^2 + (\lambda\rho - \lambda_H)\mathsf{E}\int_0^t e^{\lambda s}x(s)^T Qx(s)\mathrm{d}s \\
& + \lambda\mathsf{E}\int_0^t e^{\lambda s}\int_{s-\tau(s)}^s x(\theta)^T Qx(\theta)\mathrm{d}\theta\mathrm{d}s - \lambda_H\mathsf{E}\int_0^t e^{\lambda s}x^T(s-\tau(s))Qx(s-\tau(s))\mathrm{d}s.
\end{aligned}
$$

又

$$
\begin{aligned}
& \mathsf{E}\int_0^t e^{\lambda s}\int_{s-\tau(s)}^s x(\theta)^T Qx(\theta)\mathrm{d}\theta\mathrm{d}s \\
\le \;& \mathsf{E}\int_0^t e^{\lambda s}\int_{s-h}^s x(\theta)^T Qx(\theta)\mathrm{d}\theta\mathrm{d}s = \mathsf{E}\int_{-h}^t x(\theta)^T Qx(\theta)\int_{\max(0,\theta)}^{\min(\theta+h,t)} e^{\lambda s}\mathrm{d}s\mathrm{d}\theta \\
\le \;& he^{\lambda h}\Big(\frac{\lambda Q}{\lambda}\mathsf{E}\|\xi\|^2 + \mathsf{E}\int_0^t e^{\lambda s}x(s)^T Qx(s)\mathrm{d}s\Big) = -\frac{\lambda_H}{1-\mu}\mathsf{E}\int_0^{t-\tau(t)} e^{\lambda s}x(s)^T Qx(s)\mathrm{d}s \\
\le \;& -\Big(1\wedge\frac{\lambda_H}{1-\mu}\Big)\mathsf{E}\int_0^t e^{\lambda s}x(s)^T Qx(s)\mathrm{d}s + \mathsf{E}\int_{t-\tau(t)}^t e^{\lambda s}x(s)^T Qx(s)\mathrm{d}s
\end{aligned}
$$

故

$$
\begin{aligned}
& \mathsf{E}V(x(t),t,r(t)) \\
\le \;& (\lambda\rho + h\lambda_Q)\mathsf{E}\|\xi\|^2 + \Big(\lambda\rho - \lambda_H + he^{\lambda h} - \Big(1\wedge\frac{\lambda_H}{1-\mu}\Big)\Big)\mathsf{E}\int_0^t e^{\lambda s}x(s)^T Qx(s)\mathrm{d}s \\
& + \mathsf{E}\int_{t-\tau(t)}^t e^{\lambda s}x(s)^T Qx(s)\mathrm{d}s + \frac{h\lambda_Q}{\lambda}e^{\lambda h}\mathsf{E}\|\xi\|^2 \\
\le \;& \Big(\lambda\rho + h\lambda_Q + \frac{h\lambda_Q}{\lambda}\lambda_Q\Big)\mathsf{E}\|\xi\|^2 + \mathsf{E}\int_{t-\tau(t)}^t e^{\lambda s}x(s)^T Qx(s)\mathrm{d}s.
\end{aligned}
$$

另一方面，

$$
\mathsf{E}V(x(t),t,r(t)) \ge e^{\lambda t}\lambda_q\mathsf{E}|x(t)|^2 + \mathsf{E}\int_{t-\tau(t)}^t e^{\lambda s}x(s)^T Qx(s)\mathrm{d}s,
$$

此处， $\lambda_q=\min\limits_{1\le i\le N}(\lambda_{\min}(P_i))$. 于是，得

$$
e^{\lambda t}\lambda_q\mathsf{E}|x(t)|^2 \le \Big(\lambda_P + h\lambda_Q + \frac{h\lambda_Q}{\lambda}e^{\lambda h}\Big)\mathsf{E}\|\xi\|^2.
$$

记

$$r = \Big(\lambda_P + h\lambda_Q + \frac{h\lambda_Q}{\lambda}e^{\lambda h}\Big)\mathsf{E}\|\xi\|^2/\lambda_q,$$

这样有 $\log(\mathsf{E}|x(t)|^2) \le -\lambda t \ln C$. 于是，有

$$\lim_{t\to+\infty}\sup\frac{1}{t}\log\mathsf{E}(|x(t;\xi)|^2) \le -\lambda,$$

证毕． #

注 1 如在定理 3.1 中，将 H_i 中的 $Q>0$ 换成 $Q_i>0$ 即条件 (3.2) 换成

$$\begin{aligned} H_i &= \begin{pmatrix} \Omega & P_iA_{di} \\ A_{di}P_i & -(1-\mu)Q_i \end{pmatrix} + \varepsilon_1^{-1}\begin{pmatrix} N_{ai}^T \\ N_{adi}^T \end{pmatrix}(N_{ai}, N_{adi}) \\ &\quad + \begin{pmatrix} E_i^T \\ E_{di}^T \end{pmatrix}(P_i^{-1} - \varepsilon_2 MM^T)^{-1}\big(E_i, E_{di}\big) + \varepsilon_2^{-1}\begin{pmatrix} N_{ei}^T \\ N_{edi}^T \end{pmatrix}\big(N_{ei}, N_{edi}\big) < 0, \end{aligned} \tag{3.7}$$

其中， $\Omega = P_iA_i + A_i^TP_i + \sum\limits_{j=1}^{N}\lambda_{ij}P_j + P_iMM^TP_i + Q_i$. 不难验证此定理结论同样成立．

下面运用 Schur 补技术，将定理 3.1 的鲁棒稳定性判据处理成矩阵不等式 MI, 以便工程上应用．

推论 3.1 如果存在常数 $\varepsilon_1>0$, $\varepsilon_2>0$, 矩阵 $P_i>0$ $(i\in S)$, $Q>0$, 使下列 MI 成立

$$\begin{pmatrix} \Omega & P_iA_{di} & N_{ai}^T & N_{ei}^T & E_i^T \\ A_{di}^TP_i & -(1-\mu)Q & N_{adi}^T & N_{edi}^T & E_{di}^T \\ N_{ai} & N_{adi} & -\varepsilon_1 I & 0 & 0 \\ N_{ei} & N_{edi} & 0 & -\varepsilon_2 I & 0 \\ E_i & E_{di} & 0 & 0 & \varepsilon_2 MM^T - P_i^{-1} \end{pmatrix} < 0. \tag{3.8}$$

其中， $\Omega = P_iA_i + A_i^TP_i + \sum\limits_{j=1}^{N}\lambda_{ij}P_j + P_iMM^TP_i + Q$. 则系统 (2.3) 均方指数鲁棒随机稳定．

证明: 由引理 2.3 知 $\varepsilon_2MM^T - P_i^{-1} < 0$ 和

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} \Omega & P_iA_{di} \\ A_{di}^TP_i & -(1-\mu)Q \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} N_{ai}^T & N_{ei}^T & E_i^T \\ N_{adi}^T & N_{edi}^T & E_{di}^T \end{pmatrix} \\ &\cdot \begin{pmatrix} \varepsilon_1^{-1}I & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2^{-1}I & 0 \\ 0 & 0 & (P^{-1}-\varepsilon_2MM^T)^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} N_{ai} & N_{adi} \\ N_{ei} & N_{edi} \\ E_i & E_{di} \end{pmatrix} \\ = &\begin{pmatrix} \Omega & P_iA_{di} \\ A_{di}^T & -(1-\mu)Q \end{pmatrix} + \varepsilon^{-1}\begin{pmatrix} N_{ai}^T \\ N_{adi}^T \end{pmatrix}\big(N_{ai}, N_{adi}\big) + \varepsilon_2^{-1}\begin{pmatrix} N_{ei}^T \\ N_{edi}^T \end{pmatrix}\big(N_{ei}, N_{edi}\big) \\ &+ \begin{pmatrix} E_i^T \\ E_{di}^T \end{pmatrix}(P^{-1}-\varepsilon_2MM^T)^{-1}\big(E_i, E_{di}\big) < 0 \end{aligned}$$

故由定理 3.1, 知系统 (2.3) 是均方指数鲁棒随机稳定的． #

注 2　当系统 (2.3) 不存在不确定性项，即 $\Delta=0$ 时，上述推论的结果就退化为

$$\begin{pmatrix} \Omega & P_iA_{di} & 0 & 0 & E_i^T \\ A_{di}^TP_i & -(1-\mu)Q & 0 & 0 & E_{di}^T \\ 0 & 0 & -\varepsilon_1 I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\varepsilon_2 I & 0 \\ E_i & E_{di} & 0 & 0 & \varepsilon_2 MM^T-P_i^{-1} \end{pmatrix}<0. \tag{3.9}$$

此时，选取 $\varepsilon_1=\varepsilon_2=1$, 由引理得

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} \Omega & P_iA_{di} \\ A_{di}^TP_i & -(1-\mu)Q \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & 0 & E_i^T \\ 0 & 0 & E_{di}^T \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & P_i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ E_i & E_{di} \end{pmatrix} \\ =&\begin{pmatrix} P_iA_i+A_i^TP_i+\sum\limits_{j=1}^{N}\lambda_{ij}P_j+E_i^TP_iE_i+Q & P_iA_{di}+E_i^TP_iE_{di} \\ A_{di}^TP_i+E_{di}^TP_iE_i & -(1-\mu)Q+E_{di}^TP_iE_{di} \end{pmatrix}<0. \end{aligned} \tag{3.10}$$

注 3　当系统为单模态情形时，即不存在模态切换，由定理 2.3, 容易知道不确定性时滞随机微分系统

$$\begin{cases} \mathrm{d}x(t)=[(A+\Delta A(t))x(t)+(A_d+\Delta A_d(t))x(t-\tau(t))]\mathrm{d}t \\ \qquad\quad +[(E+\Delta E(t))x(t)+(E_d+\Delta E_d(t))x(t-\tau)]\mathrm{d}w(t) \qquad t>0 \\ x_0=\xi\in C_{\mathcal{F}_0}^b([-h,0];R^n) \end{cases} \tag{3.11}$$

的均方指数鲁棒随机稳定的一个充分性判椐为

$$\begin{pmatrix} \Omega & PA_d & N_a^T & N_e^T & E^T \\ A_{di}^TP_i & -(1-\mu)Q & N_{ad}^T & N_{ed}^T & E_d^T \\ N_a & N_{ad} & -\varepsilon_1 I & 0 & 0 \\ N_e & N_{ed} & 0 & -\varepsilon_2 I & 0 \\ E & E_d & 0 & 0 & \varepsilon_2 MM^T-P^{-1} \end{pmatrix}<0. \tag{3.12}$$

此时，$\Omega=PA+A^TP+PMM^TP+Q$. 式 (3.12) 条件完全等价于 Xu, S., 2002[21] 的定理 1. 故本节中的定理的结论具有一定的广泛性.

进一步，将式 (3.8) 的条件转化为更容易计算的 LMI 条件.

定理 3.2　如果存在常数 $\varepsilon_1>0$, $\varepsilon_2>0$, 矩阵 $X_i>0\,(i\in S)$, $S_i>0\,(i\in S)$ 使下列 LMI 成立

$$\begin{pmatrix} \Omega^* & A_{di}X_i & X_iN_{ai}^T & X_iN_{ei}^T & X_iE_i^T & \Lambda_i \\ * & -(1-\mu)S_i & X_iN_{adi}^T & X_iN_{edi}^T & X_iE_{di}^T & 0 \\ * & * & -\varepsilon_1 I & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & -\varepsilon_2 I & 0 & 0 \\ * & * & * & * & \varepsilon_2MM^T-X_i & 0 \\ * & * & * & * & * & -J_i \end{pmatrix}<0. \tag{3.13}$$

其中,

$$\Omega_i^* = A_iX_i + X_iA_i^T + \varepsilon_1 MM^T + S_i,$$
$$\Lambda_i = (X_i, \cdots, X_i),$$
$$J_i = \mathrm{diag}(\lambda_{i1}^{-1}X_1, \lambda_{i2}^{-1}X_2, \cdots, \lambda_{iN}^{-1}X_N).$$

则系统 (2.3) 是均方指数鲁棒随机稳定.

证明: 令 $P_i = X_i$, $\mathrm{diag}\begin{pmatrix}P_i & P_i & I & I & I & I\end{pmatrix}$ 左乘和右乘式 (3.13), 得

$$\begin{pmatrix} \overline{\Omega} & P_iA_{di} & N_{ai}^T & N_{ei}^T & E_i^T & \Theta \\ * & -(1-\mu)P_iS_iP_i & N_{adi}^T & N_{edi}^T & E_{di}^T & 0 \\ * & * & -\varepsilon_1 I & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & -\varepsilon_2 I & 0 & 0 \\ * & * & * & * & \varepsilon_2 MM^T - P_i^{-1} & 0 \\ * & * & * & * & * & -J_i \end{pmatrix} < 0. \tag{3.14}$$

其中 $\overline{\Omega} = P_iA_i + A_i^TP_i + P_iMM^TP_i + P_iS_iP_i$, $\Theta = (I, I, \cdots, I)$, 记 $\overline{\Theta} = \begin{pmatrix}\Theta & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ 由引理 2.3 得, 并记 $P_iS_iP_i = Q_i$,

$$\begin{pmatrix} \overline{\Omega} & P_iA_{di} & N_{ai}^TP_i & N_{ei}^TP_i & E_i^TP_i \\ * & -(1-\mu)P_iS_iP_i & N_{adi}^TP_i & N_{edi}^TP_i & E_{di}^TP_i \\ * & * & -\varepsilon_1 I & 0 & 0 \\ * & * & * & -\varepsilon_2 I & 0 \\ * & * & * & * & \varepsilon_2 MM^T - P_i^{-1} \end{pmatrix} + \overline{\Theta} J_i^{-1} \overline{\Theta}^T$$
$$= \begin{pmatrix} \Omega^* & P_iA_{di} & N_{ai}^TP_i & N_{ei}^TP_i & E_i^TP_i \\ * & -(1-\mu)P_iS_iP_i & N_{adi}^TP_i & N_{edi}^TP_i & E_{di}^TP_i \\ * & * & -\varepsilon_1 I & 0 & 0 \\ * & * & * & -\varepsilon_2 I & 0 \\ * & * & * & * & \varepsilon_2 MM^T - P_i^{-1} \end{pmatrix} < 0.$$

由定理 3.1 和注 1, 可得系统 (2.3) 是均方指数鲁棒随机稳定. #

§4. 数值例子

这一节, 给出一个数值例子以说明本文提出的方法的有效性. 考虑一个两维两模态 Markov 切换随机微分系统, 系数如下,

$$A_1 = \begin{pmatrix} -2.0 & 0.1 \\ 0.1 & 1.0 \end{pmatrix},\ A_2 = \begin{pmatrix} -1.8 & -0.1 \\ -0.1 & 1.0 \end{pmatrix},\ A_{d1} = \begin{pmatrix} -0.2 & 0.1 \\ 0.1 & -0.5 \end{pmatrix},\ A_{d2} = \begin{pmatrix} -0.3 & 0.2 \\ 0.2 & -0.5 \end{pmatrix},$$

$$E_1 = \begin{pmatrix} 0.2 & -0.5 \\ 0.3 & -1 \end{pmatrix},\ E_2 = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.1 \\ -0.2 & 0.4 \end{pmatrix},\ E_{d1} = \begin{pmatrix} -0.1 & 0.3 \\ 0.3 & 0.1 \end{pmatrix},\ E_{d2} = \begin{pmatrix} -0.8 & 0.2 \\ 0.2 & 0.1 \end{pmatrix},$$

$$M = 0.2I_2, \qquad N_{a1} = 0.1I_2, \qquad N_{a2} = -0.1I_2, \qquad N_{ad1} = 0.2I_2, \qquad N_{ad2} = -0.2I_2,$$

$$N_{e1} = 0.1I_2, \qquad N_{e2} = -0.1I_2, \qquad N_{ed1} = 0.3I_2, \qquad N_{ed2} = -0.3I_2,$$

$$\Pi = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}, \qquad F(t) = \sin(t)I_2, \qquad h = 0.1, \qquad \mu = 0.2.$$

通过 MatlabLMI-Toolbox 解 (3.14) 式，得

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1.3472 & -0.3867 \\ -0.3867 & 2.5395 \end{pmatrix}, \qquad S_1 = \begin{pmatrix} 5.1745 & -0.4753 \\ -0.4753 & 5.1745 \end{pmatrix},$$

$$X_2 = \begin{pmatrix} 1.4309 & 0.1448 \\ 0.1448 & 2.8637 \end{pmatrix}, \qquad S_2 = \begin{pmatrix} 1.5572 & -0.0324 \\ -0.0324 & 3.4370 \end{pmatrix},$$

$$\varepsilon_1 = 2.1376, \qquad \varepsilon_2 = 1.5774.$$

§5.　小　　结

本文研究了一类时变时滞不确定性 Markov 切换随机微分系统的均方指数鲁棒稳定性．基于随机 Lyapunov 函数和 LMI, 给出了几个均方指数鲁棒稳定性的充分性判据．一个数值例子验证了所得结论的有效性．

参　考　文　献

[1] Basak, G.K., Bisi, A. and Ghosh, M.K., Stability of a random diffusion with linear drift, *J. Math. Anal. Appl.*, **202**(1996), 604–622.

[2] Benjelloun, K., Boukas, E.K. and Yang, H., Robust stabilizability of uncertain linear time-delay systems with Markovian jumping parameters, *J. Dyn. Syst. Meas. Contr.*, **118**(1996), 776–786.

[3] Boukas, E.K. and Yang, H., Robust stability nonlinear piecewise deterministic systems under matching conditions, 13th world congress international federation of automatic control, 1996, July, 1–5.

[4] Costa, O.L.V. and Fragoso, M.D., Stability results for discrete-time linear systems with Markovian jumping parameters, *J. Math. Anal. Appl.*, **179**(1993), 154–178.

[5] Feng, X., A.Loparo, K., Ji, Y. and Chizeck, H.J., Stochastic stability properties of jump linear systems, *IEEE Trans. Automat. Contr.*, **37**(1992), 38–53.

[6] Has'minskii, R.Z., *Stochastic Stability of Differential Equations*, Sijthoff and Noordhoff, 1981.

[7] Khargonekar, P.P., Petersen, I.R. and Zhou, K., Robust stabilization of uncertain linear systems: quadratic stabilizability, and H_∞ control theory, *IEEE Trans. Automat. Contr.*, **35(3)**(1990), 356–361.

[8] Lien, C.H., New stability criterion for a class of uncertain nonlinear neutral time delay systems, *Int. J. Syst. Sci.*, **32(2)**(2001), 215–219.

[9] Mariton, M., Almost sure and moments stability of jump linear systems, *Syst. Contr. Lett.*, **11**(1988), 393–397.

[10] Mao, X., *Stability of Stochastic Differential Equations with Respect to Semi-martingales*, Longman Scientific and Technical, 1991.

[11] Mao, X., *Exponential Stability of Stochastic Differential Equations*, Marcel Dekker, 1994.

[12] Mao, X., *Stochastic Differential Equations and Their Applications*, Horwood publishing limited, 1997.

[13] Mao, X., Stability of stochastic differential equations with Markovian switching, *Stochastic Processes and Their Applications*, **79**(1999), 45–67.

[14] Mao, X., Robustness of stability of stochastic differential delay equations with Markovian switching, *Stability and Control: Theory and Applications*, **3(1)**(2000), 48–61.

[15] Mao, X., Matasov, A. and Piunovskiy, A.B., Stochastic differential delay equations with Markovian switching, *Bernoulli*, **6(1)**(2000), 73–90.

[16] Shi, P. and Filar, J.A., Stability analysis and controller design for a class of uncertain systems with Markovian jumping parameters, *IMA J. Math. Control Inf.*, **17**(2000), 179–190.

[17] Skorohod, A.V., *Asymptotic Methods in the Theory of Stochastic Diffential Equations*, American Mahematical Society, Providence, 1989.

[18] Wang, Y., Xie, L. and De Souza, C.E., Robust control of a class of uncertain nonlinear systems, *Syst. Contr. Lett.*, **19**(1992), 139–149.

[19] Xie, L. and De Souza, C.E., Criteria for robust stability and stabilization of uncertain linear systems with time delay, *Automatica*, **33**(1997), 1657–1662.

[20] Xie, L. and De Souza, C.E., Delay-dependent robust stability and stabilization of uncertain linear delay systems: A linear matrix inequality approach, *Automatica*, **42**(1997), 1144–1148.

[21] Xu, S. and Chen, T., Robust H_∞ control for uncertain stochastic systems with state delay, *IEEE Tans. Automat. Contr.*, **47(12)**(2002), 2089–2094.

[22] Xue, X. and Qiu, D., Robust H_∞-compensator design for time-delay systems with norm-bounded time-varying uncertainties, *IEEE Trans. Automat. Contr.*, **45**(2000), 1363–1639.

Robust Exponential Stability for Uncertain Stochastic Linear Systems with Markovian switching and Time Delay

SHU HUISHENG WEI GUOLIANG

(*College of Science, Donghua University, Shanghai, 200051*)

In this paper, we investigate the robust stochastic stability for a class of continuous time-varying delay uncertain systems with Markovian switching. The Markovian switching considered here forms a continuous-time discrete-time homogeneous Markov process. In terms of stochastic Lyapunov function method and linear matrix inequality, sufficient criterion for testing the robust stochastic stability of systems are proposed respectively. Finally, a numerical example is given to illustrate the effectiveness of the proposed method.