应用概率统计　第二十三卷
第二期　2007 年 5 月

Chinese Journal of Applied Probability
and Statistics Vol. 23 No. 2 May 2007

自正则化和 Davis 大数律和重对数律的精确渐近性

袁　裕　泽

(福州大学数学与计算机科学学院，福州， 350002)

摘　要

本文证明了自正则化 Davis 大数律和重对数律的精确渐近性，即

定理 1　设 $\mathsf{E}X=0$, 且 $\mathsf{E}X^2I_{(|X|\le x)}$ 在无穷远处是缓变函数，则

$$\lim_{\varepsilon\searrow 0}\varepsilon^2\sum_{n\ge 3}\frac{1}{n\log n}\mathsf{P}\Big(\Big|\frac{S_n}{V_n}\Big|\ge\varepsilon\sqrt{\log\log n}\Big)=1.$$

定理 2　设 $\mathsf{E}X=0$, 且 $\mathsf{E}X^2I_{(|X|\le x)}$ 在无穷远处是缓变函数，则对 $0\le\delta\le 1$, 有

$$\lim_{\varepsilon\searrow 0}\varepsilon^{2\delta+2}\sum_{n\ge 1}\frac{(\log n)^\delta}{n}\mathsf{P}\Big(\Big|\frac{S_n}{V_n}\Big|\ge\varepsilon\sqrt{\log n}\Big)=\frac{1}{\delta+1}\mathsf{E}|N|^{2\delta+2},$$

其中 N 为标准正态随机变量.

关 键 词:　精确渐近性，自正则化和， Davis 大数律，重对数律.

学 科 分 类 号:　O211.4.

§ 1.　定义和引言

设 $\{X,X_n;n\ge 1\}$ 为 i.i.d. 随机变量序列，有共同的分布函数 F, 且 $\mathsf{E}X=0$, 令 $\mathsf{E}X^2=\sigma^2$, $S_n=\sum\limits_{i=1}^n X_i$, $V_n^2=\sum\limits_{j=1}^n X_j^2$.

Gut 和 Spătaru[5] 证明了 Davis 大数律的渐近性，即对 $\mathsf{E}X=0$, 且 $0\le\delta\le 1$, 有

$$\lim_{\varepsilon\searrow 0}\varepsilon^{2\delta+2}\sum_{n\ge 1}\frac{(\log n)^\delta}{n}\mathsf{P}(|S_n|\ge\varepsilon\sqrt{n\log n})=\frac{1}{\delta+1}\mathsf{E}|N|^{2\delta+2}\sigma^{2\delta+2},$$

其中N为标准正态随机变量. Gut 和 Spătaru[4] 还讨论了对重对数律的精确渐近性, 即当 $\mathsf{E}X=0$, 且 $\mathsf{E}X^2<\infty$ 时，有

$$\lim_{\varepsilon\searrow 0}\varepsilon^2\sum_{n\ge 3}\frac{1}{n\log n}\mathsf{P}(|S_n|\ge\varepsilon\sqrt{n\log\log n})=\sigma^2.$$

我们把 S_n/V_n 称为自正则化和. 在过去的十年中，许多专家对自正则化做了深入的研究. Giné, Götze 和 Mason[2] 证明了在序列随机有界时， S_n/V_n 的尾是一致次高斯的. Bentkus 和 Götze[1] 得到了自正则化的 Berry-Esseen 不等式. Griffin 和 Kuelbs[3] 得到了当分布属于正态或者平稳分布吸引域时，自正则化的重对数律. Wang 和 Jing[7] 得到了指数非一致的 Berry-Esseen 界. Shao[6] 证明了在不存在矩条件的情况下，自正则化的大偏差，即 $\mathsf{P}(S_n/V_n\ge x\sqrt{n})$. 本文则讨论了自正则化的 Davis 大数律和重对数律的精确渐近性.

本文 2005 年 1 月 26 日收到， 2005 年 9 月 27 日收到修改稿.

§2. 主要结果和证明

定理 1 设 $\mathsf{E}X=0$, 且 $\mathsf{E}X^2I_{(|X|\le x)}$ 在无穷远处是缓变函数，则

$$\lim_{\varepsilon\searrow 0}\varepsilon^2\sum_{n\ge 3}\frac{1}{n\log n}\mathsf{P}\Big(\Big|\frac{S_n}{V_n}\Big|\ge\varepsilon\sqrt{\log\log n}\Big)=1.$$

定理 2 设 $\mathsf{E}X=0$, 且 $\mathsf{E}X^2I_{(|X|\le x)}$ 在无穷远处是缓变函数，则对 $0\le\delta\le 1$, 有

$$\lim_{\varepsilon\searrow 0}\varepsilon^{2\delta+2}\sum_{n\ge 1}\frac{(\log n)^\delta}{n}\mathsf{P}\Big(\Big|\frac{S_n}{V_n}\Big|\ge\varepsilon\sqrt{\log n}\Big)=\frac{1}{\delta+1}\mathsf{E}|N|^{2\delta+2},$$

其中 N 为标准正态随机变量.

说明 我们称一个函数 $V(x)$ 在正无穷远处 (这里为了简便都简称为无穷远) 是缓变的，如果对于每个 $x>0$, 当 $t\to+\infty$ 时，都有 $V(tx)/V(t)\to 1$.

对于条件 $\mathsf{E}X^2I_{(|X|\le x)}$ 在无穷远处是缓变函数, 是许多随机变量具有的. 例如: 对于均值为 0, 二阶矩 $\mathsf{E}X^2$ 存在的随机变量 X, 对每个 $x>0$, 当 $t\to+\infty$ 时, 都有 $\mathsf{E}X^2I_{(|X|\le tx)}/\mathsf{E}X^2I_{(|X|\le t)}\to 1$. 而且，众所周知，二阶矩存在的随机变量是很多的.

定理 1 的证明:

先证明以下几个命题

命题 1 令 Φ 表示标准正态分布函数，设 $\Psi(x)=1-\Phi(x)+\Phi(-x)$, $x\ge 0$, 则

$$\lim_{\varepsilon\searrow 0}\varepsilon^2\sum_{n\ge 3}\frac{1}{n\log n}\Psi(\varepsilon\sqrt{\log\log n})=1.$$

证明: 注意到

$$\int_3^\infty\frac{1}{x\log x}\Psi(\varepsilon\sqrt{\log\log x})\mathrm{d}x\sim\sum_{n\ge 3}\frac{1}{n\log n}\Psi(\varepsilon\sqrt{\log\log n}).$$

所以，令 $y=\varepsilon\sqrt{\log\log x}$, 有

$$\begin{aligned}\lim_{\varepsilon\searrow 0}\varepsilon^2\sum_{n\ge 3}\frac{1}{n\log n}\Psi(\varepsilon\sqrt{\log\log n}) &= \lim_{\varepsilon\searrow 0}\varepsilon^2\int_3^\infty\frac{1}{x\log x}\Psi(\varepsilon\sqrt{\log\log x})\mathrm{d}x\\ &= \lim_{\varepsilon\searrow 0}\varepsilon^2\int_{\varepsilon\sqrt{\log\log 3}}^\infty\frac{2}{\varepsilon^2}y\Psi(y)\mathrm{d}y=1.\end{aligned}$$

所以命题得证.　　#

命题 2 令 $b(\varepsilon)=\exp\{\exp(M/\varepsilon^2)\}$, 这里 $M>1$, 有

$$\lim_{\varepsilon\searrow 0}\varepsilon^2\sum_{n\le b(\varepsilon)}\frac{1}{n\log n}\Big|\mathsf{P}\Big(\Big|\frac{S_n}{V_n}\Big|\ge\varepsilon\sqrt{\log\log n}\Big)-\Psi(\varepsilon\sqrt{\log\log n})\Big|=0.$$

引理 1[2] 设 $\mathsf{E}X=0$, 且 $\mathsf{E}X^2I_{(|X|\le x)}$ 在无穷远处是缓变函数，则

$$\sup_x\Big|\mathsf{P}\Big(\Big|\frac{S_n}{V_n}\Big|\ge x\Big)-\Psi(x)\Big|=o(1),\qquad n\to\infty.$$

命题 2 的证明: 由引理 1, 且注意到

$$\frac{1}{\log\log m}\sum_{n=1}^{m}\frac{\triangle_n}{n\log n}\to 0,\qquad m\to\infty,$$

这里 $\triangle_n=\sup\limits_x|\mathsf{P}(|S_n/V_n|\ge x)-\Psi(x)|\to 0$, 当 $n\to\infty$ 时. 所以有

$$\begin{aligned}&\varepsilon^2\sum_{n\le b(\varepsilon)}\frac{1}{n\log n}\Big|\mathsf{P}\Big(\Big|\frac{S_n}{V_n}\Big|\ge\varepsilon\sqrt{\log\log n}\Big)-\Psi(\varepsilon\sqrt{\log\log n})\Big|\\ \le\ &\varepsilon^2\sum_{n\le[b(\varepsilon)]}\frac{\triangle_n}{n\log n}=\varepsilon^2\log\log[b(\varepsilon)]\frac{1}{\log\log[b(\varepsilon)]}\sum_{n\le[b(\varepsilon)]}\frac{\triangle_n}{n\log n}\\ \le\ &M\frac{1}{\log\log[b(\varepsilon)]}\sum_{n\le[b(\varepsilon)]}\frac{\triangle_n}{n\log n}\to 0,\qquad\varepsilon\searrow 0.\qquad\#\end{aligned}$$

命题 3 对所有充分小的 $\varepsilon>0$, 一致的有

$$\lim_{M\to\infty}\varepsilon^2\sum_{n>b(\varepsilon)}\frac{1}{n\log n}\Psi(\varepsilon\sqrt{\log\log n})=0.$$

证明: 存在常数 $c>0$, 使得对 $\varepsilon\le c$, 有 $b(\varepsilon)-1\ge\sqrt{b(\varepsilon)}$. 所以对 $\varepsilon\le c$, 有

$$\begin{aligned}\sum_{n>b(\varepsilon)}\frac{1}{n\log n}\Psi(\varepsilon\sqrt{\log\log n})\ &\le\ \int_{b(\varepsilon)-1}^{\infty}\frac{1}{x\log x}\Psi(\varepsilon\sqrt{\log\log x})\mathrm{d}x\\ &\le\ \int_{\sqrt{b(\varepsilon)}}^{\infty}\frac{1}{x\log x}\Psi(\varepsilon\sqrt{\log\log x})\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

所以, 令 $y=\varepsilon\sqrt{\log\log x}$, 对充分小的 ε, 得到

$$\varepsilon^2\sum_{n>b(\varepsilon)}\frac{1}{n\log n}\Psi(\varepsilon\sqrt{\log\log n})\le 2\int_{\log(1/2)+M/\varepsilon^2}^{\infty}y\Psi(y)\mathrm{d}y\le 2\int_{M-1}^{\infty}y\Psi(y)\mathrm{d}y.$$

由此证明了命题. #

命题 4 对所有充分小的 $\varepsilon>0$, 一致的有

$$\lim_{M\to\infty}\varepsilon^2\sum_{n>b(\varepsilon)}\frac{1}{n\log n}\mathsf{P}\Big(\Big|\frac{S_n}{V_n}\Big|\ge\varepsilon\sqrt{\log\log n}\Big)=0.$$

引理 2[6] 设 $\mathsf{E}X=0$, 且 $\mathsf{E}X^2I_{(|X|\le x)}$ 在无穷远处是缓变函数, 则对任意的 $0<\eta<1/2$, 存在 $0<\delta<1$, $x_0>1$ 和 $n_0\ge 1$, 使得对任意的 $n\ge n_0$, $x_0<x<\delta\sqrt{n}$. 有

$$\mathsf{P}\Big(\frac{S_n}{V_n}\ge x\Big)\le e^{-\eta x^2}.$$

命题 4 的证明: 由引理 2, 知对所有充分小的 $\varepsilon>0$, 一致的有

$$\begin{aligned}&\lim_{M\to\infty}\varepsilon^2\sum_{n>b(\varepsilon)}\frac{1}{n\log n}\mathsf{P}\Big(\Big|\frac{S_n}{V_n}\Big|\ge\varepsilon\sqrt{\log\log n}\Big)\\ \le\ &\lim_{M\to\infty}2\varepsilon^2\sum_{n>b(\varepsilon)}\frac{1}{n(\log n)^{1+\eta}}\le\lim_{M\to\infty}2Ce^{-M\eta}=0.\end{aligned}$$

由此，命题 4 得证．　#

综合命题 1 ~ 4 定理得证．　#

定理 2 的证明：

先证明以下几个命题

命题 5
$$\lim_{\varepsilon\searrow 0}\varepsilon^{2\delta+2}\sum_{n\ge 1}\frac{(\log n)^{\delta}}{n}\Psi(\varepsilon\sqrt{\log n})=\frac{1}{\delta+1}\mathsf{E}|N|^{2\delta+2}.$$

证明：　令 $y=\varepsilon\sqrt{\log x}$, 有

$$\begin{aligned}\lim_{\varepsilon\searrow 0}\varepsilon^{2\delta+2}\sum_{n\ge 1}\frac{(\log n)^{\delta}}{n}\Psi(\varepsilon\sqrt{\log n}) &= \lim_{\varepsilon\searrow 0}\varepsilon^{2\delta+2}\int_2^{\infty}\frac{(\log x)^{\delta}}{x}\Psi(\varepsilon\sqrt{\log x})\mathrm{d}x\\ &= \lim_{\varepsilon\searrow 0}\int_{\varepsilon\sqrt{\log 2}}^{\infty}2y^{2\delta+1}\Psi(y)\mathrm{d}y=\frac{1}{\delta+1}\mathsf{E}|N|^{2\delta+2}.\end{aligned}$$

命题 5 得证．　#

命题 6　令 $c(\varepsilon)=\exp(M/\varepsilon^2)$, $M\ge 1$, 有
$$\lim_{\varepsilon\searrow 0}\varepsilon^{2\delta+2}\sum_{n\le c(\varepsilon)}\frac{(\log n)^{\delta}}{n}\left|\mathsf{P}\left(\left|\frac{S_n}{V_n}\right|\ge\varepsilon\sqrt{\log n}\right)-\Psi(\varepsilon\sqrt{\log n})\right|=0.$$

证明：　由引理 1, 且注意到
$$\frac{1}{(\log m)^{\delta+1}}\sum_{n=1}^{m}\frac{(\log n)^{\delta}}{n}\triangle_n\to 0,\qquad m\to\infty,$$
这里 $\triangle_n=\sup\limits_x|P(|S_n/V_n|\ge x)-\Psi(x)|\to 0$, 当 $n\to\infty$ 时．所以有
$$\begin{aligned}&\lim_{\varepsilon\searrow 0}\varepsilon^{2\delta+2}\sum_{n\le c(\varepsilon)}\frac{(\log n)^{\delta}}{n}\left|\mathsf{P}\left(\left|\frac{S_n}{V_n}\right|\ge\varepsilon\sqrt{\log n}\right)-\Psi(\varepsilon\sqrt{\log n})\right|\\ \le\ &\lim_{\varepsilon\searrow 0}\varepsilon^{2\delta+2}\sum_{n\le[c(\varepsilon)]}\frac{(\log n)^{\delta}}{n}\triangle_n\\ =\ &\lim_{\varepsilon\searrow 0}\varepsilon^{2\delta+2}(\log[c(\varepsilon)])^{\delta+1}\frac{1}{(\log[c(\varepsilon)])^{\delta+1}}\sum_{n\le[c(\varepsilon)]}\frac{(\log n)^{\delta}}{n}\triangle_n\\ \le\ &\lim_{\varepsilon\searrow 0}M^{\delta+1}\frac{1}{(\log[c(\varepsilon)])^{\delta+1}}\sum_{n\le[c(\varepsilon)]}\frac{(\log n)^{\delta}}{n}\triangle_n=0.\end{aligned}$$

所以命题得证．　#

命题 7　对所有充分小的 $\varepsilon>0$, 一致的有
$$\lim_{M\to\infty}\varepsilon^{2\delta+2}\sum_{n>c(\varepsilon)}\frac{(\log n)^{\delta}}{n}\Psi(\varepsilon\sqrt{\log n})=0.$$

证明：　令 $y=\varepsilon\sqrt{\log x}$, 有
$$\begin{aligned}\lim_{M\to\infty}\varepsilon^{2\delta+2}\sum_{n>c(\varepsilon)}\frac{(\log n)^{\delta}}{n}\Psi(\varepsilon\sqrt{\log n}) &\le C\lim_{M\to\infty}\varepsilon^{2\delta+2}\int_{c(\varepsilon)}^{\infty}\frac{(\log x)^{\delta}}{x}\Psi(\varepsilon\sqrt{\log x})\mathrm{d}x\\ &= C\lim_{M\to\infty}\int_{\sqrt{M}}^{\infty}2y^{2\delta+1}\Psi(y)\mathrm{d}y=0.\end{aligned}$$

命题得到证明. #

命题 8 对所有充分小的 $\varepsilon>0$, 一致的有

$$\lim_{M\to\infty}\varepsilon^{2\delta+2}\sum_{n>c(\varepsilon)}\frac{(\log n)^\delta}{n}\mathsf{P}\Big(\Big|\frac{S_n}{V_n}\Big|\geq\varepsilon\sqrt{\log n}\Big)=0.$$

证明: 由引理 2, 知对所有充分小的 $\varepsilon>0$, 一致的有

$$\lim_{M\to\infty}\varepsilon^{2\delta+2}\sum_{n>c(\varepsilon)}\frac{(\log n)^\delta}{n}\mathsf{P}\Big(\Big|\frac{S_n}{V_n}\Big|\geq\varepsilon\sqrt{\log n}\Big)\leq 2\lim_{M\to\infty}\varepsilon^{2\delta+2}\sum_{n>c(\varepsilon)}\frac{(\log n)^\delta}{n^{1+\eta\varepsilon^2}}=0.$$

命题得证. #

综合命题 5 ~ 8 定理得证. #

参 考 文 献

[1] Bentkus, V., Götze, F., The Berry-Esseen bound for student's statistic, *Ann. Probab.*, **24**(1996), 491–503.

[2] Giné, E., Götze, F., Mason, D.M., When is the student t-statistic asymptotically standard normal? *Annl. Probab.*, **25**(1997), 1514–1531.

[3] Griffin, P.S., Kuelbs, J.D., Self-normalized laws of the iterated logarithm, *Ann. Probab.*, **17**(1989), 1571–1601.

[4] Gut, A., Spătaru, A., Precise asymptotics in law of the iterated logarithm, *Ann. Probab.*, **28(4)**(2000), 1870–1883.

[5] Gut, A., Spătaru, A., Precise asymptotics in the Baum-Katz and Davis law of large numbers, *J. Math. Anal. Appl.*, **248**(2000), 233–246.

[6] Shao, Q.M., Self-normalized large deviations, *Ann. Probab.*, **25**(1997), 285–328.

[7] Wang, Q., Jing, B.Y., An exponential non-uniform Berry-Esseen bound for self-normalized sums, *Ann. Probab.*, **27**(1999), 2068–2088.

Precise Asymptotics in Davis's Law of Large Numbers and the Iterated Logarithm for Self-Normalized Sums

YUAN YUZE

(*College of Mathematics and Computer Science, Fuzhou University, Fuzhou, 350002*)

In this paper we obtained the precise asymptotics in Davis's law of law numbers and LIL for self-normalized sums, i.e.

Theorem 1 Let $\mathsf{E}X=0$, and $\mathsf{E}X^2I_{(|X|\leq x)}$ is slowly varying at ∞, then

$$\lim_{\varepsilon\searrow 0}\varepsilon^2\sum_{n\geq 3}\frac{1}{n\log n}\mathsf{P}\Big(\Big|\frac{S_n}{V_n}\Big|\geq\varepsilon\sqrt{\log\log n}\Big)=1.$$

Theorem 2 Let $\mathsf{E}X=0$, and $\mathsf{E}X^2I_{(|X|\leq x)}$ is slowly varying at ∞, then for $0\leq\delta\leq 1$, we have

$$\lim_{\varepsilon\searrow 0}\varepsilon^{2\delta+2}\sum_{n\geq 1}\frac{(\log n)^\delta}{n}\mathsf{P}\Big(\Big|\frac{S_n}{V_n}\Big|\geq\varepsilon\sqrt{\log n}\Big)=\frac{1}{\delta+1}\mathsf{E}|N|^{2\delta+2},$$

where N denote the standard normal random variable.