应用概率统计　第二十四卷
第四期　2008年8月

Chinese Journal of Applied Probability
and Statistics Vol.24 No.4 Aug. 2008

一类无穷区间的倒向随机微分方程及其应用 *

蔺香运
(山东科技大学理学院, 青岛, 266510)

王向荣　张　瑞
(山东科技大学信息学院, 青岛, 266510)

摘　要

本文讨论了一类基于无穷区间的倒向随机微分方程解的存在唯一性及其性质. 由方程解定义一类非线性g-期望, 并讨论其在经济金融中的应用.

关键词: 倒向随机微分方程, g-期望, 不确定厌恶.

学科分类号: O211.63.

§1. 引　言

1990年, Pardoux和Peng[1]提出一般形式的倒向随机微分方程理论, 证明了方程

$$\begin{cases} -\mathrm{d}y_t = f(t, y_t, z_t)\mathrm{d}t - g(t, y_t, z_t)\mathrm{d}W_t \\ y_T = \xi \end{cases}, \qquad 0 \le t \le T \tag{1.1}$$

解存在唯一性. 此后, 倒向随机微分方程理论的研究蓬勃发展, 相关的研究成果和应用范围逐渐扩大. Peng[2]提出非线性g-期望、g-鞅(上鞅、下鞅)等概念, 并证明了其在有限区间上的上鞅Doob-Meyer分解, 开拓了非线性g-期望和非线性鞅的研究领域. 进一步, Chen和Peng[3]证明了上鞅的上穿不等式, Peng讨论了一类无穷区间的终值$y_\infty = 0$的倒向随机微分方程. 为了将这一特殊情形一般化即$\xi \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$, Chen和Wang[4]将方程(1.1)推广到无穷区间($T = \infty$)情形得到解的存在唯一性定理, 并给出基于无穷区间的倒向随机微分方程的g-期望等概念并讨论g-鞅的收敛性等问题.

Duffie与Epstein在[5]中从经济学角度为了描述随机效用引用了下列一类积分型倒向随机微分方程

$$y_t = \mathsf{E}\Big[\xi + \int_t^T f(s, y_s)\mathrm{d}s \Big| \mathcal{F}_t\Big]. \tag{1.2}$$

本文主要将方程(1.2)推广到无穷区间情形$T = \infty$, $\xi \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$, 并由此引出一类g-期望、条件g-期望、鞅的概念并研究g-鞅的Doob-Meyer分解等问题, 最后, 讨论了这类非线性g-期望在经济金融理论中的应用.

*国家自然科学基金资助(10371067), 山东科技大学“春蕾计划”资助课题.
本文2004年9月29日收到, 2007年8月3日收到修改稿.

§2. 解的存在唯一性

设$(\Omega,\mathcal{F},\mathcal{F}_t,\mathsf{P})$为带信息流的完备的概率空间且$\mathcal{F}=\mathcal{F}_\infty=\bigvee\limits_{t\geq 0}\mathcal{F}_t$, $\mathcal{F}_0=\{\Phi,\Omega\}$. 下面考虑方程

$$y_t=\mathsf{E}\Big[\xi+\int_t^\infty f(s,y_s)\mathrm{d}s\Big|\mathcal{F}_t\Big],\tag{2.1}$$

其中$\xi\in L^1(\Omega,\mathcal{F})$, 对任意的$y\in\mathbb{R}$, $f(t,y,\omega)$为$\mathcal{F}_t$适应过程且满足

$$(\mathrm{H})\begin{cases}(\mathrm{H1})\ \ \mathsf{E}\displaystyle\int_0^\infty |f(t,0)|\mathrm{d}t<\infty,\\ (\mathrm{H2})\ \ \text{对任意的 } y_1,y_2\in\mathbb{R}, |f(t,y_1)-f(t,y_2)|\leq u(t)|y_1-y_2|,\\ \qquad\ \ \text{其中 } u(t)\text{为确定的非负函数且 }\displaystyle\int_0^\infty u(t)\mathrm{d}t<\infty.\end{cases}$$

记μ为$[0,\infty)$上由$g(t)=\displaystyle\int_0^t u(s)\mathrm{d}s$所诱导的Lebesgue-Stieltjes测度, B为关于$\mu\times\mathsf{P}$可积的循序可测过程$y=(y_t)_{t\geq 0}$全体且关于泛数$\|y\|=\displaystyle\int|y|\mathrm{d}\mu\times\mathrm{d}\mathsf{P}$完备化的Banach空间. 由Fubini定理有$\|y\|=\mathsf{E}\displaystyle\int u(t)|y_t|\mathrm{d}t$, 下面考虑方程(2.1)在条件(H)下解的存在唯一性及其性质. 首先, 介绍一个不动点定理, 它对证明解的存在唯一性起到关键作用.

引理 2.1 设T从距离空间(X,d)到自身的一个映射, 若存在正整数n及$0<\alpha<1$使

$$\mathrm{d}(T^nx,T^ny)\leq\alpha\mathrm{d}(x,y),\qquad\forall x,y\in X,$$

则T在X中存在唯一不动点.

证明: 显然T^n为一压缩映射, 存在唯一不动点$x_0\in X$, 满足$T^nx_0=x_0$, 也就有$T(T^nx_0)=Tx_0$即$T^n(Tx_0)=Tx_0$, 从而Tx_0也为T^n的不动点, 由不动点的唯一性可得$Tx_0=x_0$, 再由T为压缩映射可知x_0为T的唯一不动点. □

定理 2.1 在(H)的条件下, 方程(2.1)存在唯一适应解.

证明: 作B到自身的映射T如下:

$$(Ty)_t=\mathsf{E}\Big[\xi+\int_t^\infty f(s,y_s)\mathrm{d}s\Big|\mathcal{F}_t\Big].$$

设$y^{(i)}\in B$, $i=1,2$, 记$\widehat{y}=y^{(1)}-y^{(2)}$, $T^k\widehat{y}=T^ky^{(1)}-T^ky^{(2)}$, 则

$$(T\widehat{y})_t=\mathsf{E}\Big\{\int_t^\infty[f(s,y_s^{(1)})-f(s,y_s^{(2)})]\mathrm{d}s\Big|\mathcal{F}_t\Big\}.$$

由条件(H2)得

$$|(T\widehat{y})_t|\leq\mathsf{E}\Big\{\int_t^\infty u(s)|\widehat{y}_s|\mathrm{d}s\Big|\mathcal{F}_t\Big\},$$

所以

$$\mathsf{E}\Big[\int_0^\infty u(t)|(T\widehat{y})_t|\mathrm{d}t\Big] \le \int_0^\infty u(t)\mathrm{d}t\,\mathsf{E}\Big[\int_0^\infty u(s)|\widehat{y}_s|\mathrm{d}s\Big],$$

进一步, 由Fubini定理

$$\begin{aligned}|(T^2\widehat{y})_t| &\le \mathsf{E}\Big[\int_t^\infty u(s)|(T\widehat{y})_s|\mathrm{d}s|\mathcal{F}_t\Big]\\ &\le \mathsf{E}\Big\{\int_t^\infty u(s)\mathsf{E}\Big[\int_s^\infty u(r)|\widehat{y}_r|\mathrm{d}r|\mathcal{F}_s\Big]\mathrm{d}s|\mathcal{F}_t\Big\}\\ &\le \mathsf{E}\Big\{\int_t^\infty \Big[u(s)\int_s^\infty u(r)|\widehat{y}_r|\mathrm{d}r\Big]\mathrm{d}s|\mathcal{F}_t\Big\}.\end{aligned}$$

所以

$$\mathsf{E}\int_0^\infty u(t)|(T^2\widehat{y})_t|\mathrm{d}t \le \frac{1}{2!}\Big(\int_0^\infty u(s)\mathrm{d}s\Big)^2\mathsf{E}\int_0^\infty u(t)|\widehat{y}_t|\mathrm{d}t.$$

归纳可证, 对任意正整数k有

$$\mathsf{E}\int_0^\infty u(t)|(T^k\widehat{y})_t|\mathrm{d}t \le \frac{1}{k!}\Big(\int_0^\infty u(s)\mathrm{d}s\Big)^k\mathsf{E}\int_0^\infty u(t)|\widehat{y}_t|\mathrm{d}t.$$

又因为对任意x有$\sum\limits_{k=0}^{\infty} x^k/k!$绝对收敛, 所以可以存在正整数$n$使得$(1/n!)\cdot\Big(\int_0^\infty u(s)\mathrm{d}s\Big)^n<1$成立, 由引理2.1知方程(2.1)在$B$中存在唯一的适应解. $\square$

注记 1 条件(H2)是有穷区间$[0,T]$上Lipschitz-条件的推广形式, 若取$u(t)=L1_{[0,T]}(t)$ $(L>0)$, 即为$[0,T]$上的Lipschitz条件.

注记 2 f未必为有界函数, 如$f(t,y)=\begin{cases}\dfrac{y}{\sqrt{1-t}}1_{[0,1)}(t), & 0\le t<1\\ 0, & t\ge 1\end{cases}.$

如同一般的方程与倒向随机微分方程一样方程(2.1)也具有诸如比较定理、终值连续等性质, 为了证明这些性质, 我们需要下面几个引理:

引理 2.2 设a_t为适应过程, 且$\int_0^\infty |a_t|\mathrm{d}t<\infty$, 则方程

$$y_t=\mathsf{E}\Big[\xi+\int_t^\infty (a_sy_s+\varphi_s)\mathrm{d}s|\mathcal{F}_t\Big]$$

的唯一适应解为

$$y_t=\mathsf{E}\Big[\xi e^{\int_t^\infty a_s\mathrm{d}s}+\int_t^\infty \varphi_s e^{\int_t^s a_r\mathrm{d}r}\mathrm{d}s|\mathcal{F}_t\Big].$$

引理 2.3 (Gronwall引理) 设$\eta\in L^1(\Omega,\mathcal{F},\mathsf{P})$, 非负适应过程$(y_t)_{t\ge0}$及确定函数$0\le a_t\le u_t$满足下面不等式

$$y_t\le\mathsf{E}\Big[\eta+\int_t^\infty a_sy_s\mathrm{d}s|\mathcal{F}_t\Big]\qquad(\forall t\ge0),\tag{2.2}$$

则存在正数M使得$y_t\le M\mathsf{E}[\eta|\mathcal{F}_t]$.

证明: 由不等式(2.2)移项可得

$$\mathsf{E}\Big[y_t-\int_t^\infty a_sy_s\mathrm{d}s\Big|\mathcal{F}_t\Big]\le \mathsf{E}[\eta|\mathcal{F}_t].$$

两边同乘以确定函数$b_t=a_te^{-\int_t^\infty a_r\mathrm{d}r}$, 然后在$[t,+\infty)$上积分且取条件期望$\mathsf{E}[\cdot|\mathcal{F}_t]$得

$$\mathsf{E}\Big[\int_t^\infty \mathsf{E}\Big[b_sy_s-b_s\int_s^\infty a_vy_v\mathrm{d}v\Big|\mathcal{F}_s\Big]\mathrm{d}s\Big|\mathcal{F}_t\Big]\le \mathsf{E}\Big[\int_t^\infty \mathsf{E}[b_s\eta|\mathcal{F}_s]\mathrm{d}s\Big|\mathcal{F}_t\Big],$$

因为$t\le s$, 由Fubini定理及条件期望的平滑性得

$$\mathsf{E}\Big[\int_t^\infty b_sy_s\mathrm{d}s-\int_t^\infty b_s\int_s^\infty a_vy_v\mathrm{d}v\mathrm{d}s\Big|\mathcal{F}_t\Big]\le\int_t^\infty b_s\mathrm{d}s\mathsf{E}[\eta|\mathcal{F}_t],$$

将左边第二项改变积分次序并化简, 整理可得

$$\mathsf{E}\Big[\int_t^\infty a_sy_s\mathrm{d}s\Big|\mathcal{F}_t\Big]\le\int_t^\infty a_se^{\int_t^s a_r\mathrm{d}r}\mathrm{d}s\mathsf{E}[\eta|\mathcal{F}_t].$$

代入不等式(2.2), 即有结论成立. $\square$

定理 2.2 (比较定理) 设$\xi^{(i)}\in L^1(\Omega,\mathcal{F},\mathsf{P})$ $(i=1,2)$且$\xi^{(1)}\le\xi^{(2)}$ a.s., 对任意t,y都有$f_1(t,y)\le f_2(t,y)$ a.s., $y^{(i)}=(y_t^{(i)})_{t\ge0}$为方程(2.1)对应$\xi=\xi^{(i)}$, $f=f_i$的适应解, 则有

$$y^{(1)}\le y^{(2)}\qquad \text{a.s.}.$$

严格地, 若$\xi^{(1)}<\xi^{(2)}$或$f_1(t,y)<f_2(t,y)$ a.s., 则$y^{(1)}<y^{(2)}$ a.s..

证明: 记$\widehat{y}=y^{(2)}-y^{(1)}$, $\widehat{\xi}=\xi^{(2)}-\xi^{(1)}$, $\widehat{f}_s=f_2(s,y_s^{(2)})-f_1(s,y_s^{(1)})$, 则有

$$\widehat{y}_t=\mathsf{E}\Big[\widehat{\xi}+\int_t^\infty\widehat{f}_s\mathrm{d}s\Big|\mathcal{F}_t\Big].$$

记$a_s=\begin{cases}\dfrac{f_2(s,y_s^{(2)})-f_2(s,y_s^{(1)})}{y_s^{(2)}-y_s^{(1)}}, & y_s^{(2)}\ne y_s^{(1)}\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$, $\varphi_s=f_2(s,y_s^{(1)})-f_1(s,y_s^{(1)})\ge0$. 从而有 $\widehat{f}_s=a_s\widehat{y}_s+\varphi_s$且$a_s$与$\varphi_s$均满足引理2.2的条件, 所以

$$\widehat{y}_t=\mathsf{E}\Big[\widehat{\xi}e^{\int_t^\infty a_s\mathrm{d}s}+\int_t^\infty\varphi_se^{\int_t^s a_r\mathrm{d}r}\mathrm{d}s\Big|\mathcal{F}_t\Big]\ge0\qquad\text{a.s.}.$$

$\square$

定理 2.3 (关于ξ连续) 设$\xi^{(n)},\xi\in L^1(\Omega,\mathcal{F},\mathsf{P})$, y_t, $y_t^{(n)}$是方程(2.1)相应的解, 则当$\lim\limits_{n\to\infty}\mathsf{E}|\xi^{(n)}-\xi|=0$时, 有$\lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{t\ge0}\mathsf{E}|y_t^{(n)}-y_t|=0$.

证明: 记$\widehat{y}^{(n)}=y^{(n)}-y$, $\widehat{\xi}_n=\xi^{(n)}-\xi$, $\widehat{f}_s^{(n)}=f(s,y_s^{(n)})-f(s,y_s)$, 则

$$\widehat{y}_t^{(n)}=\mathsf{E}\Big[\widehat{\xi}_n+\int_t^\infty \widehat{f}_s\mathrm{d}s\big|\mathcal{F}_t\Big]$$

两边取绝对值, 再由条件(H2)得

$$\|\widehat{y}_t^{(n)}\|\le\mathsf{E}\Big[|\widehat{\xi}_n|+\int_t^\infty u_s|\widehat{y}_s^{(n)}|\mathrm{d}s\big|\mathcal{F}_t\Big].$$

再由引理2.3得$\|\widehat{y}_t^{(n)}\|\le M\mathsf{E}[|\widehat{\xi}_n||\mathcal{F}_t]$, 由此可证结论成立. □

定理 2.4 (关于f连续) 设f_n满足条件H1, H2及H3: f_n对应的$u_t^{(n)}$有$\sup\limits_n\int_0^\infty u_t^{(n)}\mathrm{d}t<\infty$, 若$\lim\limits_{n\to\infty}\mathsf{E}\int_0^\infty|f_n(t,y)-f(t,y)|\mathrm{d}t=0$关于$y$一致成立, 则对应方程的解也收敛即

$$\lim_{n\to\infty}\mathsf{E}\sup_{t\ge0}|y_t^{(n)}-y_t|=0.$$

证明: 由于

$$\widehat{y}_t^{(n)}\le\mathsf{E}\Big[\int_t^\infty u_s^{(n)}|\widehat{y}_s^{(n)}|\mathrm{d}s+\int_t^\infty|f_n(s,y_s)-f(s,y_s)|\mathrm{d}s\big|\mathcal{F}_t\Big],$$

根据引理2.3, 对任意的$t\ge0$有

$$|\widehat{y}_t^{(n)}|\le e^{\int_0^\infty u_s^{(n)}\mathrm{d}s}\mathsf{E}\Big[\int_0^\infty|f_n(s,y_s)-f(s,y_s)|\mathrm{d}s\big|\mathcal{F}_t\Big].$$

从而

$$\mathsf{E}\sup_{t\ge0}|\widehat{y}_t^{(n)}|\le M\mathsf{E}\Big[\int_0^\infty|f_n(s,y_s)-f(s,y_s)|\mathrm{d}s\Big],$$

其中$M=e^{\sup\limits_n\int_0^\infty u_s^{(n)}\mathrm{d}s}$, 由此可证结论成立. □

§3. g-期望与g-上鞅分解定理

定义 3.1 对方程(2.1)的解y_t^ξ, 记$\mathcal{E}[\xi]=y_0^\xi$, 称之为随机变量ξ基于方程(2.1)的g-期望, 称y_t^ξ为ξ基于方程(2.1)在$\mathcal{F}_t$上的条件g-期望, 记作$\mathcal{E}[\xi|\mathcal{F}_t]$.

定义 3.2 设适应过程$\{x_t\}_{t\ge0}$为$(\Omega,\mathcal{F},\mathsf{P})$可积, 若对任意的$s\le t$, 有

$$\mathcal{E}[x_t|\mathcal{F}_s]=x_s\quad(\mathcal{E}[x_t|\mathcal{F}_s]\le x_s,\ \mathcal{E}[x_t|\mathcal{F}_s]\ge x_s)$$

成立, 则称$\{x_t\}_{t\ge0}$为g-鞅(g-上鞅, g-下鞅).

定义 3.3 在定义3.2中, 若存在$Y\in L^1(\Omega,\mathcal{F},\mathsf{P})$, 使得对任意$s\geq 0$, 有

$$\mathcal{E}[Y|\mathcal{F}_s]=x_s\quad (\mathcal{E}[Y|\mathcal{F}_s]\leq x_s,\ \mathcal{E}[Y|\mathcal{F}_s]\geq x_s)$$

成立, 则称$\{x_t\}_{t\geq 0}$为基于方程(2.1)的正则g-鞅(或正则g-上鞅, 正则g-下鞅).

定理 3.1 设$\{x_t\}_{t\geq 0}$为基于方程(2.1)的正则g-上鞅, 其中$Y=x_\infty$且H4: $f(t,y)\geq 0$, 则存在唯一的非负循序增过程$\{A_t\}_{t\geq 0}$且$A_0=0$, 使得对任意的$t\geq 0$满足方程

$$x_t=\mathsf{E}\Big[x_\infty+A_\infty+\int_t^\infty f(s,x_s)\mathrm{d}s\Big|\mathcal{F}_t\Big]-A_t.$$

证明: 考虑含参方程

$$y_t^\epsilon=\mathsf{E}\Big\{x_\infty+\int_t^\infty\Big[f(s,y_s^\epsilon)+\frac{u(s)}{\epsilon}(x_s-y_s^\epsilon)^+\Big]\mathrm{d}s\Big|\mathcal{F}_t\Big\}.\tag{3.1}$$

由定理2.1, 对任意$\epsilon>0$方程3.1在B中存在唯一适应解y_t^ϵ, 再由比较定理2.2知y_t^ϵ关于参数ϵ单调不增, 并且$\mathsf{E}[x_\infty|\mathcal{F}_t]\leq y_t^\epsilon$. 下证$y_t^\epsilon\leq x_t$, 假设结论不成立, 则存在$\delta>0$, 令$\tau=\inf\{t$: $y_t^\epsilon>x_t+\delta\}$, 则有$\mathsf{P}(\tau<\infty)>0$, 再令$\sigma=\inf\{t\geq\tau: y_t^\epsilon\leq x_t\}$, 由方程解的半群性知

$$\begin{aligned}y_\tau^\epsilon &= \mathsf{E}\Big[y_\sigma^\epsilon+\int_\tau^\sigma f(s,y_s^\epsilon)\mathrm{d}s\Big|\mathcal{F}_\tau\Big]\\ &\leq \mathsf{E}\Big[x_\sigma+\int_\tau^\infty 1_{[\tau,\sigma]}(s)f(s,y_s^\epsilon)\mathrm{d}s\Big|\mathcal{F}_\tau\Big]\\ &\leq \mathcal{E}[x_\sigma|\mathcal{F}_\tau]\leq x_\tau.\end{aligned}$$

这与$y_\tau^\epsilon\geq x_\tau+\delta$矛盾. 所以$y_t^\epsilon\leq x_t$, 由单调有界准则知$y^\epsilon\to x$, 且

$$\int_0^t\frac{u(s)}{\epsilon}(x_s-y_s^\epsilon)^+\mathrm{d}s\to A_t,\qquad (\epsilon\downarrow 0).$$

再由定理2.4可得结论成立. □

§4. 在经济理论中的应用

在非确定市场环境下, 关于资产组合、个人消费和投资决策的选择常用预期效用假设来分析. 在这个假设下, 个人的消费和投资策略取决于个人对资产所有可能的赢利、各种可能消费支出的比例具有决定权, 从而可选取最优消费和投资策略使得预期效用最大. 确切的说, 每个人的偏好可以由一个预期效用函数来表示, 也就是根据每个人的偏好特征可以找到一个函数U, 使得消费项"$\widetilde{x}$比$\widetilde{y}$好"的个人心理偏好可用一个数学不等式定义

$$\mathsf{E}[U(\widetilde{x})]\geq\mathsf{E}[U(\widetilde{y})],$$

其中$\mathsf{E}[\cdot]$为代表个人信念的数学期望. 如果消费$\widetilde{x}$与$\widetilde{y}$具有上述关系, 则称$\widetilde{x}$优越于$\widetilde{y}$, 记作$\widetilde{x} \succ \widetilde{y}$. 根据概率空间是客观和主观的不同, 效用函数分为Von Neumannn-Morgenstern效用(1953)和Savage效用(1972), 不管是客观概率还是主观概率它们都具有线性特点, 但是, 著名的Allais悖论却得到与传统的预期效用定理相悖的结论, 而这一矛盾却是由于概率测度的线性引起的, 这一发现引起了大量的关于非线性容度和期望的研究, 常用的有著名Choquet积分等非线性期望的概念, 基本的思想就是将线性数学期望下的预期效用变成非线性期望来研究, 也就是将传统预期效用中的数学期望用非线性期望代替从而来描述人们心理偏好. 下面是Schmeidler定义的一个"不确定厌恶"关系, 它是von Neumannn-Morgenstern效用的推广形式:

定义 4.1　对已有关系"$\succ$"及经济行为ξ, η, X, 如果$\xi \succ X$, $\eta \succ X$且对任意$0 < \alpha < 1$总有$\alpha\xi + (1-\alpha)\eta \succ X$成立, 则称关系"$\succ$"为"暴露不确定厌恶"(reveal uncertainty aversion)关系.

这样定义的不确定厌恶关系表现了不同经济行为之间的不确定性的比较, 如果$\xi \succ X$我们认为经济行为ξ的不确定性要比X的不确定性要小, 也就是ξ比X要可靠一些, 不确定厌恶关系体现了人们在日常的经济活动中对风险和不确定的一种厌恶, 从而尽可能的避免这种不确定性和风险, 我们的问题是: 怎样定义这种不确定厌恶关系使得更容易的比较经济行为之间的不确定性和风险差异? 如何找到一个策略消除(或降低)这种不确定性和风险? 下面我们通过本文所讨论的非线性g-期望来描述经济行为间的不确定性比较, 并称这个关系为暴露不确定厌恶关系.

定理 4.1　设$\xi, \eta \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$, 且$f(t, y)$关于$y$为凸函数, 则$\forall\alpha \in [0, 1]$有

$$\mathcal{E}[\alpha\xi + (1-\alpha)\eta] \geq \alpha\mathcal{E}[\xi] + (1-\alpha)\mathcal{E}[\eta].$$

严格地, 若$\forall\alpha \in (0, 1)$, $f(t, y)$关于y严格凸且$\xi \neq \eta$, 则

$$\mathcal{E}[\alpha\xi + (1-\alpha)\eta] > \alpha\mathcal{E}[\xi] + (1-\alpha)\mathcal{E}[\eta].$$

证明:　记y_t^ξ, y_t^η分别为方程2.1对应的解, 则$\alpha y_t^\xi + (1-\alpha)y_t^\eta$为方程

$$y_t = \mathsf{E}\Big\{\alpha\xi + (1-\alpha)\eta + \int_t^\infty [f(s, y_s) + \varphi(s)]\mathrm{d}s \big| \mathcal{F}_t\Big\}$$

的解, 其中$\varphi(t) = \alpha f(t, y_t^\xi) + (1-\alpha)f(t, y_t^\eta) - f(t, \alpha y_t^\xi + (1-\alpha)y_t^\eta) \geq 0$. 由比较定理2.2知

$$y_t^{\alpha\xi+(1-\alpha)\eta} \geq \alpha y_t^\xi + (1-\alpha)y_t^\eta,$$

从而$\mathcal{E}[\alpha\xi + (1-\alpha)\eta] \geq \alpha\mathcal{E}[\xi] + (1-\alpha)\mathcal{E}[\eta]$.　　□

定义 4.2　对任一$L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$中可行的经济行为$\xi$, 称$\mathcal{E}[\xi]$为$\xi$的非线性预期收益(或称为效用), 若两个经济行为$\xi$, η有$\mathcal{E}[\xi] \geq \mathcal{E}[\eta]$, 则称经济行为$\xi$优于经济行为$\eta$, 且记$\xi \succ \eta$.

由定理4.1可知这里所定义的关系"$\succ$"为一暴露不确定厌恶关系. 对经济行为ξ (也就是一个经济计划), 若记$\Delta\xi$为其增量(改变部分), 则$\xi+\Delta\xi$为其改变后的计划, 则定义

$$\Delta\mathcal{E}=\big|\mathcal{E}[\xi+\Delta\xi]-\mathcal{E}[\xi]\big|$$

为由增量$\Delta\xi$引起的不确定性. 这里$\mathcal{E}$为增且凸, 在ξ在充分大以后, 不确定性$\Delta\xi$的增幅要比$\Delta\xi$大的多, 因此, 非线性g-期望在一定程度上更能准确地描述风险、刻画不确定性, 在不同的经济活动中, 所体现的不确定厌恶的具体描述是不一样的, 下面我们看两个例子.

例 1 在博奕活动中, 一个人不愿意参加任何的公平博奕或者对公平博奕总是嗤之以鼻, 这时我们说这个人是"不确定厌恶的", 如果有一场博奕, 参加者可以以概率p得到正的h_1元而以$1-p$的概率失去h_2元, 且为公平博奕即

$$ph_1+(1-p)h_2=0,$$

这样参加者的收入ξ为一个随机变量. 不妨假设现在某人的财产为W_0, 他是厌恶不确定的, 那么他不参加赌博的财产效用为$\mathcal{E}[W_0]$, 参加的效用为$\mathcal{E}[W_0+\xi]$, 并且$\mathcal{E}[W_0+\xi]\le\mathcal{E}[W_0]$, 所以对不确定厌恶的人来讲参加博奕的效用要比不参加博奕的效用要小, 也就是不参加博奕要优于参加博奕.

例 2 在投资组合的选取过程中, 暴露不确定厌恶的投资者表现在财产的盈利上是多多益善, 假设一个投资者现有总资产为W_0作投资组合, 其中在第j种股票(有风险)投入a_j元而$W_0-\sum\limits_j a_j$元投入债券(无风险), 那么他将来某时期的财产是一个随机变量$\widetilde{W}$且

$$\widetilde{W}=W_0(1+r_f)+\sum_j a_j(\widetilde{r}_j-r_f),$$

其中r_f为债券利率(无风险利率), $\widetilde{r}_f$为第j种股票的回报率(随机变量), 如果这个投资者的效用函数为$U(\cdot)$, 经典的投资组合问题为:

$$\sum_{a_j}\mathsf{E}\Big[U\Big(W_0(1+r_f)+\sum_j a_j(\widetilde{r}_j-r_f)\Big)\Big].$$

而基于非线性g-期望的投资组合问题则变为:

$$\sum_{a_j}\mathcal{E}\Big[W_0(1+r_f)+\sum_j a_j(\widetilde{r}_j-r_f)\Big].$$

由$\mathcal{E}$的严格凸性与单调性可知道, 一个人如果是暴露不确定厌恶的并且是对利润的追求是多多益善的(也就说是一个理性的人), 他会尽可能的避免风险, 尽管这些风险可以带来巨额风险回报.

参 考 文 献

[1] Pardoux, E. and Peng, S., Adapted solution of a backward stochastic differential equations, *Systems Control. Lett.*, **14**(1990), 55–61.

[2] Peng, S., Monotonic limit theorem of BSDE and nolinear decomposition theorem of Doob-Meyer's type, *Prob. Theory Rel. Fields*, **113(4)**(1999), 473–499.

[3] Chen, Z. and Peng, S., A general downcrossing inequality for g-martingales, *Statistics and Probability Letters*, **46**(2000), 169–175.

[4] Chen, Z. and Wang, B., Infinite time interval BSDEs and the convergence of g-martingales, *J. Austral. Math. Soc.*, **69**(2000), 187–211.

[5] Duffie and Epstein, Stochastic differential utility, *Econometrica*, **60(2)**(1992), 353–394.

A Backward Stochastic Differential Equations Based on Infinite Horizon and Its Application

Lin Xiangyun

(*College of Science, Shandong University of Science and technology, Qingdao, 266510*)

Wang Xiangrong   Zhang Rui

(*College of Information Science and Engineering, Shandong University of Science and technology, Qingdao, 266510*)

This paper discusses the existence and uniqueness of the solutions of a backward stochastic differential equations in infinite horizon. By the solution, we define a nonlinear g-expectation and discuss its application in finance and economics.

Keywords: Backward stochastic differential equation, g-expectation, uncertainty aversion.

AMS Subject Classification: 60H15.