应用概率统计 第二十五卷
第二期 2009年4月

Chinese Journal of Applied Probability
and Statistics Vol.25 No.2 Apr. 2009

不同标准差估计方法下的过程能力指数的置信区间的比较研究 *

孔祥芬[1,2] 何 桢[1] 车建国[3] 靳慧斌[4]

([1]天津大学管理学院工商管理系, 天津, 300072; [2]中国民航大学航空工程学院工业工程系, 天津, 300300)

([3]南开大学泰达学院, 天津, 300457; [4]民航安全科学研究所, 天津, 300300)

摘 要

采用样本标准差s、s/c_4、$\overline{R}/d_2$以及MVA分析后的$\widehat{\sigma}_{\mathrm{TOTAL}}$分别估计总体标准差, 介绍了相应的$\widehat{C}_p$和$\widehat{C}_{pk}$以及$C_p$的置信区间, 分析了每种标准差估计方法的特点, 结合案例进行比较研究.

关键词: MVA, 置信区间, 标准差, 过程能力指数.

学科分类号: O213.1, F273.2.

§1. 引 言

过程能力指数是衡量生产过程中的产品质量特性适合规格和接近目标值的能力[1]. 常常用来选择供应商和评估过程改进[2]. 最普遍使用的过程能力指数是C_p[3], C_{pk}[4],

$$C_p = \frac{\mathrm{USL}-\mathrm{LSL}}{6\sigma}, \qquad C_{pk} = \min\left\{\frac{\mathrm{USL}-\mu}{3\sigma}, \frac{\mu-\mathrm{LSL}}{3\sigma}\right\},$$

其中, USL和LSL分别是质量特性的上、下规格限, μ和σ分别是质量特性的均值和标准差. 但是, 如何正确使用C_p、C_{pk}, 仍是很值得讨论. 首先, 计算过程能力指数的前提条件是: ①质量特征值服从正态分布, ②质量特征值相互独立, ③过程处于稳定受控状态, 即过程质量特征值只受随机性变异的影响. 其次, 在实际应用中, 由于USL和LSL已知, 所要估计的参数就是总体均值和标准差, 总体均值一般采用样本均值无偏估计, 无所争议. 但是估计标准差的方法很多, 就其估计的准确性、合理性来讲, 也是非常值得研究的. 最后, 所估计的C_p、C_{pk}均为点估计, 不知道在一定条件下多次使用时其一致性程度如何, 如果能够给出置信区间则更为可靠.

文献[5]介绍了多变异分析(Multi-Vari Analysis, MVA), 它是用来分析工序过程质量特征值变异规律的一种重要方法, 其作用就是通过方差分析, 找到主要的随机性变异来源, 以此指导如何进行合理地抽样, 保证样本能捕获主要的随机性变异, 然后计算出科学正确

*国家自然科学基金项目(70572044)、中国民航大学科研启动基金项目(07QD02S, 07QD13X)、天津市社科规划项目(TJTJ08-008, TJJJ06-010)资助.

本文2006年5月29日收到, 2007年11月7日收到修改稿.

的方差. 这个方差是由产品内变异(Within Piece Variation或称为Positional Variation)产生的方差、产品间变异(Piece to Piece Variation)产生的方差和时间变异(Time to Time Variation)产生的方差组成, 分别表示为σ_e^2, σ_β^2, σ_τ^2, 所以总方差$\sigma^2_{\mathrm{TOTAL}}=\sigma_\tau^2+\sigma_\beta^2+\sigma_e^2$. 通过各个方差分量占总方差的比重和显著性检验就可以判定过程的情况, 如果产品内方差显著, 且占总方差比重较大, 则可认为过程所受的变异主要是产品内变异, 那么可采用的措施就是尽可能的加大产品内的抽样; 如果产品间方差显著, 且占总方差比重较大, 则可认为过程所受的变异主要是产品间变异, 那么可采用的措施就是尽可能的加大产品间的抽样如果时间方差显著, 且占总方差比重较大, 则可认为过程所受的变异主要是时间变异, 那么可采用的措施就是尽可能的多几个时间点抽样. 当然, 也会出现两种获三种变异源同时存在的情况, 那么根据具体情况进行相应的抽样, 详见文献[5].

本文的研究重点在于对比四种标准差估计方法下的常用过程能力指数情况, 这四种估计标准差的方法分别为: ①用样本标准差s估计; ②用无偏估计量s/c_4估计; ③用$\overline{R}/d_2$估计; ④用多变异方法计算的$\widehat{\sigma}_{\mathrm{TOTAL}}$估计. 最后, 结合一个案例进行比较研究.

§2. 常用的过程能力指数及其置信区间

尽管过程能力指数有很多种[6], 但是实际应用中, 还是以C_p和C_{pk}较为常用. 对于质量特性值服从正态分布的情况, 由于μ和σ是未知参数, 所以往往是通过对稳定状态的过程所采集的样本对μ和σ进行估计. 通常情况下, 采用样本均值$\overline{x}$作为对μ的估计, 而对σ进行估计则有几种方法: ①用样本标准差s估计; ②用无偏估计量s/c_4估计, 其中, c_4为一与样本容量n有关的常数[7]; ③用$\overline{R}/d_2$估计其中, 其中, d_2为一与样本容量n有关的常数[8]; ④用多变异方法计算的$\widehat{\sigma}_{\mathrm{TOTAL}}$估计.

若样本均值

$$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i,\qquad R_j=x_{j\,\max}-x_{j\,\min},\qquad \overline{R}=\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}R_j,$$

样本标准差

$$S=\left\{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2\right\}^{1/2},$$

那么$\widehat{C}_p$和$\widehat{C}_{pk}$分别为:

①

$$\widehat{C}_p=\frac{\mathrm{USL}-\mathrm{LSL}}{6S},\qquad \widehat{C}_{pk}=\min\left\{\frac{\mathrm{USL}-\overline{X}}{3S},\frac{\overline{X}-\mathrm{LSL}}{3S}\right\};$$

②

$$\widehat{C}_p=\frac{\mathrm{USL}-\mathrm{LSL}}{6s/c_4},\qquad \widehat{C}_{pk}=\min\left\{\frac{\mathrm{USL}-\overline{X}}{3s/c_4},\frac{\overline{X}-\mathrm{LSL}}{3s/c_4}\right\};$$

③ 由于极差没有考虑样本在$x_{\max}$与$x_{\min}$之间的观测值信息, 故在样本容量较大时不适用. 在实际工作中, 样本一般取$n=4$、5或6, 所以极差法是令人满意的.

$$\widehat{C}_p=\frac{\mathrm{USL}-\mathrm{LSL}}{6\overline{R}/d_2},\qquad \widehat{C}_{pk}=\min\left\{\frac{\mathrm{USL}-\overline{X}}{3\overline{R}/d_2},\frac{\overline{X}-\mathrm{LSL}}{3\overline{R}/d_2}\right\};$$

④

$$\widehat{C}_p=\frac{\mathrm{USL}-\mathrm{LSL}}{6\widehat{\sigma}_{\mathrm{TOTAL}}},\qquad \widehat{C}_{pk}=\min\left\{\frac{\mathrm{USL}-\overline{X}}{3\widehat{\sigma}_{\mathrm{TOTAL}}},\frac{\overline{X}-\mathrm{LSL}}{3\widehat{\sigma}_{\mathrm{TOTAL}}}\right\},$$

$\overline{X}=\Big(\sum\limits_{i=1}^{a}\sum\limits_{j=1}^{b}\sum\limits_{k=1}^{n}x_{ijk}\Big)\Big/(abn)$, $\widehat{\sigma}_{\mathrm{TOTAL}}=\sqrt{\widehat{\sigma}_e^2+\widehat{\sigma}_\beta^2+\widehat{\sigma}_\tau^2}$.

通过$\overline{x}$和$\widehat{\sigma}$计算出$\widehat{C}_p$和$\widehat{C}_{pk}$后, 通常情况下, 将$\widehat{C}_p$和$\widehat{C}_{pk}$的点估计值和推荐值进行比较, 若估计值大于或等于推荐值, 就认为过程是有能力的. 但是, 由于样本随机误差的存在, 用样本计算得到的$\widehat{C}_p$和$\widehat{C}_{pk}$来对实际过程能力进行评价会产生误差, 甚至会导致错误的结论, 也就是说即使估计值大于等于临界值, 也不能100%的确信真实值大于等于临界值, 从而认为过程具有能力, 我们只能认为真实值大于等于临界值的概率是多少. 因此, 不能仅凭一个估计值就给过程能力下一个肯定的结论. 在样本容量能够反映估计值的估计的正确性和精确性的情况下, 通过计算C_p和C_{pk}的置信区间来确定C_p和C_{pk}的可信度概率. 采用区间估计代替点估计, 以抵消工序不利因素的影响, 增加过程能力评价的可信度和有效性. 本文只研究C_p的置信区间, 采用以上四种对标准差的估计方法, 可以得出相应的置信区间:

① 由于$C_p/\widehat{C}_p=S/\sigma$, 又因为$(n-1)S^2/\sigma^2\sim\chi^2(n-1)$, 所以$C_p$的置信区间为

$$\widehat{C}_p\sqrt{\frac{\chi^2_{\alpha/2,n-1}}{n-1}}\le C_p\le\widehat{C}_p\sqrt{\frac{\chi^2_{1-\alpha/2,n-1}}{n-1}};$$

② 由于$s/c_4=\Big\{(n-1)^{-1}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2\Big\}^{1/2}\Big/c_4$, 则$C_p/\widehat{C}_p=S/(c_4\sigma)$, 又因为$(n-1)S^2/\sigma^2\sim\chi^2(n-1)$, 所以$C_p$的置信区间为

$$\frac{\widehat{C}_p}{c_4}\sqrt{\frac{\chi^2_{\alpha/2,n-1}}{n-1}}\le C_p\le\frac{\widehat{C}_p}{c_4}\sqrt{\frac{\chi^2_{1-\alpha/2,n-1}}{n-1}};$$

③ 由于$C_p/\widehat{C}_p=(\overline{R}/d_2)/\sigma$, $\nu(\overline{R}/d_2)^2/\sigma^2\sim\chi^2(\nu)$[9], 其中, ν为带小数的常数, 称为等价自由度, d_2和ν都是样本容量n的函数, 对不同的样本容量可以查表求得[8]. 所以C_p的置信区间为

$$\widehat{C}_p\sqrt{\frac{\chi^2_{\alpha/2,\nu}}{\nu}}\le C_p\le\widehat{C}_p\sqrt{\frac{\chi^2_{1-\alpha/2,\nu}}{\nu}};$$

④ 基于MVA方法计算的$\widehat{\sigma}_{\mathrm{TOTAL}}$估计标准差推导$C_p$的置信区间较为复杂, 具体推导过程参见相关文章[10], 本文只给出结论. σ_e^2永远大于等于零, 而σ_β^2和σ_τ^2却未必如此, 根据方差定义要求$\sigma_\beta^2\ge0$, $\sigma_\tau^2\ge0$, 所以我们可以分为4种情况加以讨论.

Ⅰ. $(\mathrm{MS}_{\mathrm{Between}}-\mathrm{MS}_{\mathrm{Within}}-\sqrt{V_{\beta L}})/n<0$, $(\mathrm{MS}_{\mathrm{Time}}-\mathrm{MS}_{\mathrm{Between}}-\sqrt{V_{\tau L}})/(bn)<0$, 此种情况只有一种变异源存在, 就是产品内变异, C_p的置信上限为

$$\frac{\mathrm{USL}-\mathrm{LSL}}{6\sqrt{\dfrac{\mathrm{MS}_{\mathrm{Within}}}{F_{\alpha/2:n_3,\infty}}}};$$

Ⅱ. $(\mathrm{MS}_{\mathrm{Between}}-\mathrm{MS}_{\mathrm{Within}}-\sqrt{V_{\beta L}})/n<0$, $(\mathrm{MS}_{\mathrm{Time}}-\mathrm{MS}_{\mathrm{Between}}-\sqrt{V_{\tau L}})/(bn)>0$, 此种情况存在两种变异源, 就是时间变异和产品内变异, C_p的置信上限为

$$\frac{\mathrm{USL}-\mathrm{LSL}}{6\sqrt{\dfrac{\mathrm{MS}_{\mathrm{Within}}}{F_{\alpha/2:n_3,\infty}}+\dfrac{\mathrm{MS}_{\mathrm{Time}}-\mathrm{MS}_{\mathrm{Between}}-\sqrt{V_{\tau L}}}{bn}}};$$

Ⅲ. $(\mathrm{MS}_{\mathrm{Between}}-\mathrm{MS}_{\mathrm{Within}}-\sqrt{V_{\beta L}})/n>0$, $(\mathrm{MS}_{\mathrm{Time}}-\mathrm{MS}_{\mathrm{Between}}-\sqrt{V_{\tau L}})/(bn)<0$, 此种情况存在两种变异源, 就是产品内变异和产品间变异, C_p的置信上限为

$$\frac{\mathrm{USL}-\mathrm{LSL}}{6\sqrt{\dfrac{\mathrm{MS}_{\mathrm{Within}}}{F_{\alpha/2:n_3,\infty}}+\dfrac{\mathrm{MS}_{\mathrm{Between}}-\mathrm{MS}_{\mathrm{Within}}-\sqrt{V_{\beta L}}}{n}}};$$

Ⅳ. $(\mathrm{MS}_{\mathrm{Between}}-\mathrm{MS}_{\mathrm{Within}}-\sqrt{V_{\beta L}})/n>0$, $(\mathrm{MS}_{\mathrm{Time}}-\mathrm{MS}_{\mathrm{Between}}-\sqrt{V_{\tau_L}})/(bn)>0$, 此种情况存在三种变异源, 就是时间变异和产品间变异以及产品内变异, C_p的置信上限为

$$\frac{\mathrm{USL}-\mathrm{LSL}}{6\sqrt{\dfrac{\mathrm{MS}_{\mathrm{Within}}}{F_{\alpha/2:n_3,\infty}}+\dfrac{\mathrm{MS}_{\mathrm{Between}}-\mathrm{MS}_{\mathrm{Within}}-\sqrt{V_{\beta L}}}{n}+\dfrac{\mathrm{MS}_{\mathrm{Time}}-\mathrm{MS}_{\mathrm{Between}}-\sqrt{V_{\tau L}}}{bn}}},$$

无论哪种情况, C_p的置信下限为

$$\frac{\mathrm{USL}-\mathrm{LSL}}{6\sqrt{\dfrac{\mathrm{MS}_{\mathrm{Within}}}{F_{1-\alpha/2:n_3,\infty}}+\dfrac{\mathrm{MS}_{\mathrm{Between}}-\mathrm{MS}_{\mathrm{Within}}+\sqrt{V_{\beta U}}}{n}+\dfrac{\mathrm{MS}_{\mathrm{Time}}-\mathrm{MS}_{\mathrm{Between}}+\sqrt{V_{\tau U}}}{bn}}}.$$

C_p的置信区间最长的也是第Ⅰ种情况, 即

$$\left\{\frac{\mathrm{USL}-\mathrm{LSL}}{6\sqrt{\dfrac{\mathrm{MS}_{\mathrm{Within}}}{F_{1-\alpha/2:n_3,\infty}}+\dfrac{\mathrm{MS}_{\mathrm{Between}}-\mathrm{MS}_{\mathrm{Within}}+\sqrt{V_{\beta U}}}{n}+\dfrac{\mathrm{MS}_{\mathrm{Time}}-\mathrm{MS}_{\mathrm{Between}}+\sqrt{V_{\tau U}}}{bn}}},\ \frac{\mathrm{USL}-\mathrm{LSL}}{6\sqrt{\dfrac{\mathrm{MS}_{\mathrm{Within}}}{F_{\alpha/2:n_3,\infty}}}}\right\}.$$

C_p的置信区间最短的就是第Ⅳ种情况, 即

$$\left\{\frac{\text{USL}-\text{LSL}}{6\sqrt{\dfrac{\text{MS}_{\text{Within}}}{F_{1-\alpha/2:n_3,\infty}}+\dfrac{\text{MS}_{\text{Between}}-\text{MS}_{\text{Within}}+\sqrt{V_{\beta U}}}{n}+\dfrac{\text{MS}_{\text{Time}}-\text{MS}_{\text{Between}}+\sqrt{V_{\tau U}}}{bn}}},\right.$$
$$\left.\frac{\text{USL}-\text{LSL}}{6\sqrt{\dfrac{\text{MS}_{\text{Within}}}{F_{\alpha/2:n_3,\infty}}+\dfrac{\text{MS}_{\text{Between}}-\text{MS}_{\text{Within}}-\sqrt{V_{\beta L}}}{n}+\dfrac{\text{MS}_{\text{Time}}-\text{MS}_{\text{Between}}-\sqrt{V_{\tau L}}}{bn}}}\right\}.$$

§3. 比较研究

某电子产品制造企业前线采用表面封装技术(SMT)生产其所需的电路板, 电路板锡浆厚度的工艺规格要求为5.5~8.5 mil. 在工序稳定后, 进行多变异分析, 确定变异源, 根据$\hat\sigma_{\text{TOTAL}}$估计$\hat\sigma$. 同时, 当过程稳定后, 可根据传统方法, 分别采用样本标准差s、无偏估计量s/c_4、$\overline{R}/d_2$估计标准差, 然后按照公式计算计算出$\widehat{C}_p$和$\widehat{C}_{pk}$以及C_p的置信区间. 抽样方案为选择4个时间点(8:00AM, 10:00AM, 12:00AM, 14:00AM), 在每个时间点随机选择了3块PCB板, 并且在每块上选了5个测量点, 工程师采用三维激光测厚仪进行测量, 其测量结果见表1.

假设置信水平为95%, 分别对本试验进行四种标准差估计方法进行比较, 计算$\widehat{C}_p$和$\widehat{C}_{pk}$以及C_p的置信区间, 结果整理成表2.

表1 试验数据

时间		8:00AM			10:00AM			12:00AM			14:00AM		
产品间		1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3
产品内	1	6.4	6.8	6.3	6.1	6.4	6.6	6.3	6.4	6.3	6.7	6.6	6.8
	2	7.0	6.4	7.1	6.8	6.9	6.0	6.9	5.6	6.7	5.9	7.0	6.2
	3	6.4	6.4	6.5	5.9	6.8	6.1	6.6	6.2	6.6	5.8	6.5	6.5
	4	6.4	6.3	6.4	5.8	6.5	6.2	6.2	6.0	6.4	6.3	6.4	6.2
	5	7.1	6.5	7.0	6.0	6.9	5.9	6.8	5.8	6.3	6.2	7.1	5.8

表2 四种标准差估计方法的比较

标准差估计方法	s	s/c_4	$\overline{R}/d_2$	$\hat\sigma_{\text{TOTAL}}$
$\hat\sigma$	.374	0.398	0.310	0.387
$\widehat{C}_p$	1.336	1.256	1.613	1.292
$\widehat{C}_{pk}$	0.817	0.768	0.986	0.790
C_p的置信区间	[1.107,1.588]	[1.107,1.588]	[1.276,1.950]	[0.750,1.777]
置信区间宽度	0.481	0.481	0.674	1.027

由表2可知, 不同标准差估计方法所计算的标准差差距较大, 这种差距部分源于统计性能, 部分源于抽样方案, 部分源于多变异分析. 首先, 对于s和s/c_4两种方法来讲, 其统计原理相同, 由于$c_4 \le 1$, 所以采用s/c_4估计的标准差永远大于s估计的标准差. 对于$\overline{R}/d_2$估计方法来讲, 极差的大小与样本数据息息相关, 不能从根本上比较$\overline{R}/d_2$与s/c_4的大小, 相对不同的案例, 这种比较都会不同. 而对于MVA分析后的$\widehat{\sigma}_{\mathrm{TOTAL}}$是一定大于$s$的, 这是因为MVA分析通过方差分析对质量特征值的变异来源进行了充分分析和估计. 在各个方差分量的计算过程中, 会出现负值(这恰好说明某个方差分量很小, 也就是那个方差分量所对应的变异源很小——这也是MVA分析的精髓所在), 这是方差定义所不允许的, 所以产品间方差分量和时间方差分量都有可能放大, 所以总方差就会相应较大.

从置信区间的角度来看, s和s/c_4两种方法相同, 这是因为这两种方法的计算原理相同, 而且置信区间的宽度较小, 说明置信度较高; $\overline{R}/d_2$估计标准差的结果是C_p的置信区间稍大一些, 这个也是个案的表现, 不代表同一性. 但是有一点能够确定的是, 对于样本容量大于10的情况, $\overline{R}/d_2$的估计结果非常不理想, 因为它忽略了大部分中间值的信息; MVA分析后的C_p的置信区间最大, 相对来讲, 置信度比较低, 这与MVA分析的本质有关.

§4. 结　论

通过对四种不同标准差估计方法进行较为有深度的分析和比较, 可以初步得出这样的结论: MVA分析通过方差分析对质量特征值的变异来源进行了充分分析和估计, 可以科学合理的计算过程能力指数, 为工序控制指明了方向. 但是, 较宽的置信区间略显不足. 需要注意的是, 经过MVA分析的C_p的置信区间的长度与抽样方案密切相关, 也就是a, b, n的确定直接影响着C_p的置信区间.

参 考 文 献

[1] Kotz, S. and Lovelace, C., *Process Capability Indices in Theory and Practice*, London, Arnold, 1998.

[2] Juarn, J.M., Gryna, F.M. and Bingham, R.S.Jr, *Quality Control Handbook*, McGraw-Hill, New York, 1974.

[3] Kane, V.E., Process capability indices, *Journal of Quality Technology*, **18(1)**(1986), 41–52.

[4] Kotz, S. and Johnson, N.L., Process capability indices — A review, 1992-2000, *Journal of Quality Technology*, **34(1)**(2002), 2–19.

[5] 何桢, 李国春, 石春桥, 工序质量分析与控制种的多变异分析方法, *系统工程理论与实践*, **20(5)**(2000), 42–46.

[6] Kotz, S. and Johnson, N.L., *Process Capability Indices*, Chapman & Hall, London, 1993.

[7] 张公绪, *新编质量管理学*, 高等教育出版社, 北京, 1998.

[8] 中科院数学研究所统计组, *方差分析*, 科学出版社, 北京, 1994.

[9] Yamauti, Z., *Statistical Tables and Formulas with Computer Application*, Japanese Standards Association, Tokyo, 1992.

[10] 何桢, 孔祥芬, 宗志宇, 董延峰, 基于MVA分析的过程能力指数的推断研究, 管理科学学报, **28(6)**(2008), 75–79.

A Comparativen Study on Confidence Interval of C_p in Terms of Standard Deviation Estimated by Different Methods

Kong Xiangfen[1,2] He Zhen[1] Che Jianguo[3] Jin Huibin[4]

([1] *Department of Business Administration, School of Management of Tianjin University, Tianjin, 300072*)

([2] *Department of Industrial Engineering, Aeronatical Mechanics & Avionics Engineering College, Civil Aviation University of China, Tianjin, 300300*)

([3] *TEDA College, Nankai University, Tianjin, 300457*)

([4] *Research Institute of Civil Aviation Safety, Tianjin, 300300*)

The estimator of population standard deviation can be represented by sample standard deviation s, s/c_4, $\overline{R}/d_2$ and $\widehat{\sigma}_{\text{TOTAL}}$ based on MVA, respectively. This paper presents the estimation of C_p and C_{pk} as well as the confidence interval of C_p using different estimation methods of population standard deviation. Further, each estimation method is analyzed in an example.

Keywords: MVA, confidence interval, standard deviation, process capability indices.

AMS Subject Classification: 62P30.