应用概率统计　第二十四卷
第五期　2008年10月

Chinese Journal of Applied Probability
and Statistics Vol.24 No.5 Oct. 2008

有摩擦金融市场中的美式未定权益定价 *

孟庆欣[1,2]　劳兰珺[3⋆]　赵学雷[1]

([1]复旦大学数学研究所, 上海, 200433; [2]湖州师范学院理学院, 湖州, 313000)

([3]复旦大学管理学院, 上海, 200433)

摘　要

本文研究了高借款利率下投资策略受限制的美式未定权益的定价问题. 文章通过引入反映上述金融市场摩擦的辅助的无摩擦金融市场类给出了美式未定权益的上下套期保值价格$h_{\rm up}(K)$和$h_{\rm low}(K)$的定价公式. 进一步, 在基于金融市场无套利的准则下证明了$[h_{\rm low}(K),h_{\rm up}(K)]$是美式未定权益的无套利价格区间. 最后在投资策略受到某些具体限制的情形下, 以美式看涨期权为例, 给出了上下套期保值价格的显式表达式或估计式.

关键词:　未定权益, 套期保值, 摩擦市场, Doob-Meyer分解, 等价鞅测度.

学科分类号:　O211.6.

§1.　引言和基本模型

Bensoussan[1]在1984年, Karatzas[2]在1988年对完备的无摩擦的金融市场中的美式未定权益定价问题进行了研究, 得到了标准性的定价理论. 在此金融市场中美式未定权益的无套利价格是唯一的. Karatzas[3]又在1998年对投资策略受限制的美式未定权益定价问题进行了研究, 此时市场变得不再完备, 而且美式未定权益的无套利价格不再唯一, 而是变成了一个无套利价格区间. 本文研究的也是有摩擦金融市场中的美式未定权益的定价问题. 在标的资产价格方程服从连续时间Itô过程模型的金融市场中, 我们考虑金融市场的摩擦性同时表现在两个方面: 一是借款利率总是高于存款利率; 二是投资策略受到限制. 类似于文献[3][4][5][6]中的证明方法, 本文通过适当引入反映上述金融市场摩擦的辅助无摩擦的金融市场类给出了美式未定权益的上下套期保值价格$h_{\rm up}(K)$和$h_{\rm low}(K)$的定价公式. 进一步, 在基于金融市场无套利的准则下证明了$[h_{\rm low}(K),h_{\rm up}(K)]$是美式未定权益的无套利价格区间. 最后在投资策略受到某些具体限制的情形下, 以美式看涨期权为例, 给出了上下套期保值价格的显式表达式或估计式.

我们考虑金融市场中有$d+1$种标的资产. 一种是所谓的无风险资产, 我们称之为债券或投资者的银行账户, t时刻的价格用$P_0(t)$表示, 假定它在时刻区间$[0,T]$满足如下常微分

*国家自然科学基金资助项目(70371010); 浙江省自然科学基金资助项目(Y605478, Y606667).

⋆通讯作者, E-mail: lao@fudan.edu.cn.

本文2004年6月11日收到.

方程:

$$\mathrm{d}P_0(t) = P_0(t)r(t)\mathrm{d}t, \qquad P_0(0) = 1. \tag{1.1}$$

其中, $r(t)$称为时刻t的短期利率. 另外d种资产是所谓的风险资产, 我们称之为股票, t时刻价格用$P_i(t)$表示, $i = 1, \cdots, d$, 假定它们在时刻区间$[0, T]$满足如下的随机微分方程:

$$\mathrm{d}P_i(t) = P_i(t)\Big(b_i(t)\mathrm{d}t + \sum_{j=1}^{d} \sigma_{ij}(t)\mathrm{d}W_j(t)\Big), \qquad 1 \le i \le d,\ \ P_i(0) = p_i \in (0, +\infty). \tag{1.2}$$

在方程(1.2)中，$W(t) = (W_1(t), \cdots, W_d(t))^*, 0 \le t \le T$ ($*$表示向量的转置)为带域流的完全概率空间$(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{0\le t\le T}, \mathsf{P})$上的一个$d$维标准Brown运动, 其中$(\mathcal{F}_t)_{0\le t\le T}$为Brown运动$W(\cdot)$生成的自然$\sigma$-域流. $b_i(\cdot)$称为股票的平均回报率, $\sigma_{ij}(\cdot)$称为股票价格的波动系数, $p_i > 0$为第i种股票的初始价格. 记$b(t) = (b_1(t), \cdots, b_d(t))^*$, $\sigma(t) = (\sigma_{ij}(t))_{d\times d}$, $0 \le t \le T$. 设$b(t)$, $r(t)$, $\sigma(t)$, $0 \le t \le T$满足通常的假设H_1: 过程$b(\cdot)$, $r(\cdot)$, $\sigma(\cdot)$为$[0, T] \times \Omega$上的$(\mathcal{F}_t)_{0\le t\le T}$循序可测过程; 过程$b(\cdot)$, $r(\cdot)$, $\sigma(\cdot)$在$[0, T] \times \Omega$是一致有界的; 对$\forall\,(t, \omega) \in [0, T] \times\Omega$, 矩阵$\sigma(t, \omega)$的逆$\sigma^{-1}(t, \omega)$存在, 并且在$[0, T] \times \Omega$是一致有界的. 从而由假设$H_1$知, 风险市价过程$\theta(\cdot) \triangleq \sigma^{-1}(\cdot)[b(\cdot) - r(\cdot)\mathbf{1}]$在$[0, T] \times \Omega$是一致有界的, 因此过程

$$Z_0(t) \triangleq \exp\Big(-\int_0^t \theta^*(s)\mathrm{d}W(s) - \frac{1}{2}\int_0^t \|\theta(s)\|^2\mathrm{d}s\Big), \qquad 0 \le t \le T$$

在概率测度P下为鞅. 定义$\mathcal{F}_T$上与P等价的概率测度P^0: $\mathsf{P}^0(A) \triangleq \mathsf{E}[Z_0(T)1_A]$, $A \in \mathcal{F}(T)$. 则由Girsanov定理([7])知在概率测度P^0下,

$$W^{(0)}(t) \triangleq W(t) + \int_0^t \theta(s)\mathrm{d}s, \qquad 0 \le t \le T$$

为一个标准Brown运动. 定义贴现因子过程

$$\beta_0(t) \triangleq \frac{1}{P_0(t)} = \exp\Big(-\int_0^t r(s)\mathrm{d}s\Big), \qquad 0 \le t \le T.$$

则由Itô乘积公式易知贴现股票价格过程$\beta_0(\cdot)P_i(\cdot)$满足下述随机微分方程

$$\mathrm{d}\beta_0(t)P_i(t) = \beta_0(t)P_i(t)\sum_{j=1}^{d}\sigma_{ij}(t)\mathrm{d}W_j^{(0)}(t), \qquad \beta_0(0)P_i(0) = p_i.$$

从而在P^0下, 贴现股票价格过程$\beta_0(\cdot)P_i(\cdot)$, $i = 1, \cdots, d$为鞅. P^0就是所谓的等价鞅测度.

§2. 财富方程和凸投资策略

在实际的金融市场中, 存款利率和借款利率总是不一样的, 借款的利率总是高于存款的利率. 设t时刻借款利率为$R(t)$并假设它满足如下假设H_2: $R(\cdot)$是$[0, T] \times \Omega$上的$(\mathcal{F}_t)_{0\le t\le T}$循序可测过程; $R(t, \omega) \ge r(t, \omega)$, a.e. $(t, \omega) \in [0, T] \times \Omega$; $R(\cdot)$在$[0, T] \times \Omega$上一致有界. 特别的, 如果$R(t, \omega) = r(t, \omega)$, a.e. $(t, \omega) \in [0, T] \times \Omega$, 我们就称金融市场无摩擦.

定义 2.1　一个$(\mathcal{F}_t)_{0\le t\le T}$循序可测过程$\pi:[0,T]\times\Omega\to R^d$称为一个**投资策略**, 如果$\int_0^T \|\pi(t)\|^2\mathrm{d}t<+\infty$, a.e..

定义 2.2　一个$(\mathcal{F}_t)_{0\le t\le T}$循序可测过程$C:[0,T]\times\Omega\to[0,+\infty)$称为**消费过程**, 如果$C(0)=0$, $C(T)<\infty$, a.e., 并且它的轨道是右连左极递增的.

定义 2.3　任给一对投资消费策略(π,C)和初始财富$x\in R$, 考虑如下随机微分方程

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}X(t) &= \sum_{i=1}^{d}\frac{\pi_i(t)}{P_i(t)}\mathrm{d}P_i(t)-\mathrm{d}C(t)+\Big(X(t)-\sum_{i=1}^{d}\pi_i(t)\Big)^{+}r(t)\mathrm{d}t\\
&\quad -\Big(X(t)-\sum_{i=1}^{d}\pi_i(t)\Big)^{-}R(t)\mathrm{d}t\\
&= r(t)X(t)\mathrm{d}t-\mathrm{d}C(t)+\pi^*(t)((b(t)-r(t))\mathrm{d}t+\sigma(t)\mathrm{d}W(t))\\
&\quad -(R(t)-r(t))\Big(X(t)-\sum_{i=1}^{d}\pi_i(t)\Big)^{-}\mathrm{d}t,\qquad X(0)=x.
\end{aligned}\tag{2.1}
$$

方程(2.1)的解$X(\cdot)$称为初始财富x和投资消费策略(π,C)所对应的**财富过程**, 记作$X^{x,\pi,c}$.

方程(2.1)的经济意义是显而易见的, $\pi_i(t)$表示投资者t时刻持有第i种股票的市值, $\pi_i(t)$是允许取负值的, 这表示股票是允许卖空的; $X(t)-\sum_{i=1}^{d}\pi_i(t)$表示投资者$t$时刻持有债券的市值, 取正值时表示以投资者在以利率$r(t)$存款, 取负值时表示以利率$R(t)$借款; 方程(2.1)的左端$\mathrm{d}X(t)$表示投资者t时刻财富的增加量; 方程右端的$\sum_{i=1}^{d}(\pi_i(t)/P_i(t))\mathrm{d}P_i(t)$表示投资者$t$时刻股票的市值增加量; $\Big(X(t)-\sum_{i=1}^{d}\pi_i(t)\Big)^{+}r(t)\mathrm{d}t$表示$t$时刻由于存款而造成的财富增加量; $\Big(X(t)-\sum_{i=1}^{d}\pi_i(t)\Big)^{-}\times R(t)\mathrm{d}t$表示$t$时刻由于借款而造成的财富减少量; $\mathrm{d}C(t)$表示t时刻由于消费而造成的财富减少量. 由Itô乘积公式([7]), 方程(2.1)可以改写为

$$
\begin{aligned}
&\beta_0(t)X(t)+\int_0^t\beta_0(s)\mathrm{d}C(s)+\int_0^t\beta_0(s)(R(s)-r(s))\Big(X(s)-\sum_{i=1}^{d}\pi_i(s)\Big)^{-}\mathrm{d}s\\
=&\ x+\int_0^t\beta_0(s)\pi^*(s)\sigma(s)\mathrm{d}W^{(0)}(s),\qquad 0\le t\le T.
\end{aligned}\tag{2.2}
$$

为了上下文连贯性, 我们在此引入两个重要的随机过程$\rho(\cdot)=(\rho_1(\cdot),\cdots,\rho_d(\cdot))$和$N(\cdot)=(N_1(\cdot),\cdots,N_d(\cdot))$

$$
\rho_i(t)\triangleq\begin{cases}\dfrac{\pi_i(t)}{X(t)}, & X(t)\ne 0;\\ 0, & X(t)=0,\end{cases}\qquad i=1,\cdots,d,\quad 0\le t\le T,\tag{2.3}
$$

$$
N_i(t)\triangleq\frac{\pi_i(t)}{S_i(t)},\qquad i=1,\cdots,d,\quad 0\le t\le T.\tag{2.4}
$$

显然$\rho_i(t)$表示投资者t时刻持有第i种股票的市值占总财富的比, 即投资比例; $N_i(t)$表示投资者t时刻持有第i种股票的股数.

定义 2.4 称一对投资消费策略(π, C)关于初始财富$x \in R$是**可允许**的, 如果存在一个非负随机变量Λ, 且对某个实数$p > 1$, $\mathsf{E}^0(\Lambda)^p < \infty$, 使得$X^{x,\pi,C}(t) \geq -\Lambda$ a.e., $\forall\, 0 \leq t \leq T$. 这种关于初始财富$x$的可允许投资消费策略$(\pi, C)$的全体记作$\mathcal{A}_0(x)$.

在实际的金融市场中, 投资策略总是受到一定的限制. 这种限制主要来自两个方面的原因: 一方面是金融市场的监管者为防止投资者特别是大投资者操纵市场而强制规定的一些限制条件; 另一方面, 投资者本身为防范风险也会做出一些投资策略限制. 下面对投资策略受到限制的情况给出一种数学模型.

设K_+和K_-是R^d上的两个凸闭集, $K_+ \cap K_-$非空, K_+包含原点, 且对任意$\rho_+ \in K_+$, $\rho_- \in K_-$, 满足条件:

$$\gamma\rho_+ + (1-\gamma)\rho_- \in \begin{cases} K_+, & \gamma > 1, \\ K_-, & \gamma < 0. \end{cases} \tag{2.5}$$

我们对可允许投资消费策略作出如下限制

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(x) \quad \triangleq \quad & \{(\pi, C) \in \mathcal{A}_0(x) |\, \text{在}\ \{X^{x,\pi,C}(t) \geq 0\}\ \text{上},\ \rho(t) \in K_+; \\ & \text{在}\ \{X^{x,\pi,C}(t) \leq 0\}\ \text{上},\ \rho(t) \in K_-,\ \forall\, 0 \leq t \leq T\}, \end{aligned}$$

其中$\rho(\cdot)$为(2.3)式所定义的投资比例. 记这种可允许投资消费策略取值于$\mathcal{A}(x)$的市场模型((1.1) (1.2) (2.1))为$M(K)$.

下面我们讨论一下在本文中起着重要作用的$-K_+$与K_-的支撑函数, 设$-K_+$的支撑函数为$\delta(x) \triangleq \sup\limits_{\rho \in K_+}(-\rho^* x) : R^d \longrightarrow [0, +\infty]$, 其有效定义域为$\overline{K} \triangleq \{x \in R^d | \delta(x) < \infty\}$. 由凸分析的知识易知支撑函数$\delta(x)$为闭的正齐次正常凸函数(参见[8]). 设$K_-$的支撑函数为$\widetilde{\delta}(x)$, 其有效定义域为$\widetilde{K}$, 则由[6]中的命题7.2知条件(2.5)可以保证成立

$$\overline{K} = \widetilde{K}; \qquad \delta(x) + \widetilde{\delta}(x) = 0, \qquad \forall\, x \in \overline{K}. \tag{2.6}$$

在本文中我们还假设$\delta(\cdot)$在$\overline{K}$上是连续的.

本节最后给出了一些投资策略受到某些具体限制并且满足上述条件的实际金融市场的例子.

例 2.1 投资策略无限制, 则$K_+ = K_- = R^d$, $\overline{K} = \{0\}$; 在$\overline{K}$上, $\delta(\cdot) = 0$.

例 2.2 股票交易禁止: 设金融市场中只有前m种股票可以交易, 其中$1 \leq m \leq d-1$, 则$K_+ = K_- = \{\rho \in R^d | \rho_i = 0, \forall\, i = m+1, \cdots, d\}$, $\overline{K} = \{x \in R^d | x_i = 0, \forall\, i = 1, \cdots, m\}$; 在$\overline{K}$上, $\delta(\cdot) \equiv 0$.

例 2.3 卖空禁止: 即$\varphi_i \geq 0$, $1 \leq i \leq d$, 则$K_+ = [0, +\infty)^d$, $K_- = (-\infty, 0]^d$, $\overline{K} = [0, +\infty)^d$; 在$\overline{K}$上, $\delta(\cdot) \equiv 0$.

例 2.4　借款禁止: 即$X(t)-\sum\limits_{i=1}^{d}\pi_i(t)\geq 0$, 则

$$K_+=\Big\{\rho\in R^d\Big|\sum_{i=1}^{d}\rho_i\leq 1\Big\},\qquad K_-=\Big\{\rho\in R^d\Big|\sum_{i=1}^{d}\rho_i\geq 1\Big\},$$

$\overline{K}=\{x\in R^d|x_1=\cdots=x_d\leq 0\}$; 在$\overline{K}$上, $\delta(x)=-x_1$.

例 2.5　借款限制: 设对某个正数$k>1$, 有$X^{x,\pi,C}(t)-\sum\limits_{i=1}^{d}\pi_i(t)\geq -kX^{x,\pi,C}(t)$, a.e., $\forall\, 0\leq t\leq T$, 则

$$K_+=\Big\{\rho\in R^d\Big|\sum_{i=1}^{d}\rho_i\leq k\Big\},\qquad K_-=\Big\{\rho\in R^d\Big|\sum_{i=1}^{d}\rho_i\geq k\Big\},$$

$\overline{K}=\{x\in R^d|x_1=\cdots=x_d\leq 0\}$; 在$\overline{K}$上, $\delta(x)=-kx_1$.

§3.　美式未定权益的上下套期保值价格

定义 3.1　给定一个非负随机过程$B:[0,T]\times\Omega\to[0,\infty)$, 它是$(\mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq T}$-适应过程, 具有连续轨道, 并且存在实数$\epsilon>1$, 使得$\mathsf{E}\Big[\sup\limits_{0\leq t\leq T}(\beta_0(t)B(t))^{\epsilon}\Big]<+\infty$. 对应于该随机过程的**美式未定权益**是这样一份合同: 持有合同者如果在任何时刻$\tau\in\varphi$执行该合同, 则将获得收益$B(\tau)$, 否则, 在时刻T获得收益$B(T)$. 我们称T时刻为到期时刻, $B(\cdot)$为收益过程. 其中φ表示取值于$[0,T]$的一切停时全体.

类似于[3]美式未定权益$B(\cdot)$在市场$M(K)$中上下套期保值价格分别定义为

$$\begin{aligned}h_{\rm up}(K)&\triangleq\inf\mathcal{U}\\&\triangleq\inf\{x\geq 0|\exists\,(\widehat{\pi},\widehat{C})\in\mathcal{A}_+(x)\ \text{s.t.}\ X^{x,\widehat{\pi},\widehat{C}}(\tau)\geq B(\tau),\forall\,\tau\in\varphi\},\end{aligned}\tag{3.1}$$

$$\begin{aligned}h_{\rm low}(K)&\triangleq\sup\mathcal{L}\\&\triangleq\sup\{x\geq 0|\exists\,\check{\tau}\in\varphi,\exists\,(\check{\pi},\check{C})\in\mathcal{A}_-(-x)\ \text{s.t.}\ X^{-x,\check{\pi},\check{C}}(\check{\tau})+B(\check{\tau})\geq 0\}.\end{aligned}\tag{3.2}$$

其中

$$\mathcal{A}_+(x)\triangleq\{(\pi,C)\in\mathcal{A}(x)|\rho(t)\in K_+,X^{x,\pi,C}(t)\geq 0,\ \text{a.e.},\ \forall\,0\leq t\leq T\},$$
$$\mathcal{A}_-(x)\triangleq\{(\pi,C)\in\mathcal{A}(x)|\rho(t)\in K_-,X^{x,\pi,C}(t)\leq 0,\ \text{a.e.},\ \forall\,0\leq t\leq T\}.$$

为了计算$h_{\rm up}(K)$和$h_{\rm low}(K)$, 我们首先引入辅助的无摩擦金融市场类. 定义

$$\begin{aligned}\mathcal{H}\ &\triangleq\ \Big\{v:[0,T]\times\Omega\to\overline{K}\Big|v\ \text{为}\ \{\mathcal{F}_t\}_{0\leq t\leq T}\ \text{循序可测过程},\\&\qquad \text{且}\ \sup_{(t,\omega)\in[0,T]\times\Omega}\|v(t,\omega)\|<+\infty\Big\},\\\mathcal{Y}\ &\triangleq\ \{\mu:[0,T]\times\Omega\to R^d\big|\mu\ \text{为}\ \{\mathcal{F}_t\}_{0\leq t\leq T}\ \text{循序可测过程},\\&\qquad \text{且}\ \mu_1=\mu_2=\cdots=\mu_d\geq-(R-r),\ \text{a.e.}\ [0,T]\times\Omega\}.\end{aligned}$$

对$\forall\,(\nu,\mu)\in\mathcal{H}\times\mathcal{Y}\triangleq\mathcal{D}$所对应的无摩擦的金融市场$M_{\nu,\mu}$中有一种无风险资产和$d$种风险资产, 他们的价格方程分别为

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}P_0^{\nu,\mu}(t) &= P_0^{\nu,\mu}(t)(r(t)+\delta(\nu(t))-\mu_1(t))\mathrm{d}t\triangleq P_0^{\nu,\mu}(t)r^{(\nu,\mu)}(t)\mathrm{d}t, \qquad P_0^{\nu,\mu}(0)=1,\\
\mathrm{d}P_i^{\nu,\mu}(t) &= P_i^{\nu,\mu}(t)((b_i(t)+v_i(t)+\delta(\nu(t)))\mathrm{d}t+\sum_{j=1}^{d}\sigma_{ij}(t)\mathrm{d}W_j(t))\\
&\triangleq P_i^{\nu,\mu}(t)(b_i^{\nu,\mu}(t)\mathrm{d}t+\sum_{j=1}^{d}\sigma_{ij}(t)\mathrm{d}W_j(t)), \qquad P_i^{\nu,\mu}(0)=p_i.
\end{aligned}$$

则$r^{\nu,\mu}(\cdot)$, $b^{\nu,\mu}(\cdot)$, $\sigma(\cdot)$分别为市场$M_{\nu,\mu}$中的短期利率、股票的平均回报率、股票的波动系数. 在金融市场$M_{\nu,\mu}$中, 定义贴现因子过程

$$\beta_{\nu,\mu}(t)\triangleq\frac{1}{P_0^{\nu,\mu}(t)}=\exp\Big[-\int_0^t(r(s)+\delta(\nu(s))-\mu_1(s))\mathrm{d}s\Big].$$

风险市价过程

$$\theta_{\nu,\mu}(t)\triangleq\sigma^{-1}(t)(b^{(\nu,\mu)}(t)-r^{(\nu,\mu)}(t))=\theta(t)+\sigma^{-1}(t)(\nu(t)+\mu(t)).$$

再定义

$$\begin{aligned}
&Z_{\nu,\mu}(t)\triangleq\exp\Big[-\int_0^t\theta^*_{\nu,\mu}(s)\mathrm{d}W(s)-\frac{1}{2}\int_0^t\|\theta_{\nu,\mu}(s)\|^2\mathrm{d}t\Big],\\
&W^{(\nu,\mu)}(t)\triangleq W(t)+\int_0^t\theta_{\nu,\mu}(s)\mathrm{d}s, P^{\nu,\mu}(A)\triangleq\mathsf{E}[Z_{\nu,\mu}(T)\mathbf{1}_A], \qquad A\in F_T,
\end{aligned}$$

则由Girsanov定理知$W^{(\nu,\mu)}(\cdot)$在概率测度$\mathsf{P}^{\nu,\mu}$下为一个标准Brown运动. 对$\forall\,(\nu,\mu)\in\mathcal{D}$定义

$$\begin{aligned}
&U_{\nu,\mu}(0)\triangleq\sup_{\tau\in\varphi}\mathsf{E}^{\nu,\mu}[\beta_{\nu,\mu}(\tau)B(\tau)],\\
&V\triangleq\sup_{(\nu,\mu)\in\mathcal{D}}U_{\nu,\mu}(0), \qquad v\triangleq\inf_{(\nu,\mu)\in\mathcal{D}}U_{\nu,\mu}(0),\\
&\widehat{X}_{\nu,\mu}(t)\triangleq\frac{1}{\beta_{\nu,\mu}(t)}\operatorname*{ess\ sup}_{\tau\in\varphi_{t,T}}\mathsf{E}^{\nu,\mu}[\beta_{\nu,\mu}(\tau)B(\tau)|\mathcal{F}(t)].\\
&\underline{X}(t)\triangleq\operatorname*{ess\ inf}_{(\nu,\mu)\in\mathcal{D}}\widehat{X}_{\nu,\mu}(t), \qquad \overline{X}(t)\triangleq\operatorname*{ess\ sup}_{(\nu,\mu)\in\mathcal{D}}\widehat{X}_{\nu,\mu}(t).
\end{aligned}$$

其中$\mathsf{E}^{\nu,\mu}$表示在概率测度$\mathsf{P}^{\nu,\mu}$下求数学期望. 由美式未定权益的标准性定价理论(参见文献[9])知$U_{\nu,\mu}(0)$是美式未定权益$B(\cdot)$在无摩擦金融市场$M_{\nu,\mu}$中的公平价格, $\widehat{X}_{\nu,\mu}(\cdot)$是$B(\cdot)$在$[0,T]$上的价格过程.

引理 3.1 过程$\overline{X}(\cdot)$具有右连左极修正, 而且对$\forall\,(\nu,\mu)\in\mathcal{D}$, $\beta_{\nu,\mu}(\cdot)\overline{X}(\cdot)$是$\mathsf{P}^{\nu,\mu}$上鞅.

证明可用类似于文献[3][5][6]的方法获得, 限于篇幅, 证明省略.

定理 3.1 在金融市场$M(K)$中, 美式未定权益$B(\cdot)$的上套期保值价格为

$$h_{\rm up}(K)=V=\sup_{(\nu,\mu)\in\mathcal{D}}U_{\nu,\mu}(0)=\sup_{(\nu,\mu)\in\mathcal{D}}\sup_{\tau\in\varphi}\mathsf{E}^{\nu,\mu}[\beta_{\nu,\mu}(\tau)B(\tau)].$$

如果$V<\infty$, 则存在投资消费策略$(\widehat{\pi},\widehat{C})\in\mathcal{A}_+(V)$, 使得$X^{V,\widehat{\pi},\widehat{C}}(\tau)=\overline{X}(\tau)\ge B(\tau)$, $\forall\,\tau\in\varphi$.

证明: 我们先证$h_{\rm up}(K)\ge V$. 如果$h_{\rm up}(K)=\infty$, 则不等式自然成立. 若$h_{\rm up}(K)<+\infty$, 则(3.1)式中的集合$\mathcal{U}$非空. 对$\forall\,x\in\mathcal{U}$, 由$\mathcal{U}$的定义知存在$(\widehat{\pi},\widehat{C})\in\mathcal{A}_+(x)$, 使得对$\forall\,\tau\in\varphi$, $X^{x,\widehat{\pi},\widehat{C}}(\tau)\ge B(\tau)$. 由方程(2.1)和Itô乘积公式可得

$$\begin{aligned}
&\beta_{\nu,\mu}(t)X^{x,\widehat{\pi},\widehat{C}}(t)+\int_0^t\beta_{\nu,\mu}(s)\mathrm{d}\widehat{C}(s)+\int_0^t\beta_{\nu,\mu}(s)X^{x,\widehat{\pi},\widehat{C}}(s)(\delta(\nu(s))+\widehat{\rho}^*(s)\nu(s))\mathrm{d}s\\
&+\int_0^t\beta_{\nu,\mu}(s)\Big(\widehat{\pi}^*(s)\mu(s)-X^{x,\widehat{\pi},\widehat{C}}(s)\mu_1(s)+(R(s)-r(s))\Big(X^{x,\widehat{\pi},\widehat{C}}(s)-\sum_{i=1}^d\widehat{\pi}_i(s)\Big)^-\Big)\mathrm{d}s\\
=\ &x+\int_0^t\beta_{\nu,\mu}(s)\widehat{\pi}^*(s)\sigma(s)\mathrm{d}W^{(\nu,\mu)}(s),\qquad 0\le t\le T.
\end{aligned}\tag{3.3}$$

其中

$$\widehat{\rho}(\cdot)=(\widehat{\rho}_1(\cdot),\cdots,\widehat{\rho}_d(\cdot)),\qquad \widehat{\rho}_i(t)\triangleq\begin{cases}\dfrac{\widehat{\pi}_i(t)}{X^{x,\widehat{\pi},\widehat{C}}(t)}, & \text{如果 } X^{x,\widehat{\pi},\widehat{C}}(t)>0;\\ 0, & \text{如果 } X^{x,\widehat{\pi},\widehat{C}}(t)=0,\end{cases}$$

即股票的投资比例. 由$(\widehat{\pi},\widehat{C})\in\mathcal{A}_+(x)$知$\widehat{\rho}(t,\omega)\in K_+$ a.e. $[0,T]\times\Omega$, 从而由$\delta(x)$的定义知

$$\delta(v(t,\omega))+\widehat{\rho}^*(t,\omega)v(t,\omega)\ge 0\qquad \text{a.e.}\qquad (t,\omega)\in[0,T]\times\Omega.\tag{3.4}$$

再由$0\ge\mu_1=\mu_2=\cdots=\mu_d\ge r-R$知

$$\begin{aligned}
&\widehat{\pi}^*(t)\mu(t)-X^{x,\widehat{\pi},\widehat{C}}(t)\mu_1(t)+(R(t)-r(t))\Big(X^{x,\widehat{\pi},\widehat{C}}(t)-\sum_{i=1}^d\widehat{\pi}_i(t)\Big)^-\\
=\ &-\mu_1(t)\Big(X^{x,\widehat{\pi},\widehat{C}}(t)-\sum_{i=1}^d\widehat{\pi}_i(t)\Big)^++\Big(X^{x,\widehat{\pi},\widehat{C}}(t)-\sum_{i=1}^d\widehat{\pi}_i(t)\Big)^-(\mu_1(t)+R(t)-r(t))\\
\ge\ &0.
\end{aligned}\tag{3.5}$$

因此由(3.4)和(3.5)知过程(3.3)为非负$\mathsf{P}^{\nu,\mu}$局部鞅, 从而为$\mathsf{P}^{\nu,\mu}$-上鞅. 于是由可选轨道理论可得

$$x\ge\mathsf{E}^{\nu,\mu}[\beta_{\nu,\mu}(\tau)X^{x,\widehat{\pi},\widehat{C}}(\tau)]\ge\mathsf{E}^{\nu,\mu}[\beta_\nu(\tau)B(\tau)],\qquad\forall\,\tau\in\varphi.$$

从而由$x\in\mathcal{U}$, $\tau\in\varphi$, $(\nu,\mu)\in\mathcal{D}$的任意性可得$h_{\rm up}(K)\ge V$.

下面来证明$h_{\rm up}(K)\le V$. 如果$V=\infty$, 结论显然成立, 若$V<\infty$, 由Doob-meyer分解和鞅表示理论我们可以把引理3.1中的$\mathsf{P}^{\nu,\mu}$-上鞅$\beta_{\nu,\mu}(\cdot)\overline{X}(\cdot)$表示成

$$\begin{aligned}
\beta_{\nu,\mu}(t)\overline{X}(t)&=V+M_{\nu,\mu}(t)-A_{\nu,\mu}(t)\\
&=V+\int_0^t\psi^*_{\nu,\mu}(s)\mathrm{d}W^{(\nu,\mu)}(s)-A_{\nu,\mu}(t),\qquad 0\le t\le T.
\end{aligned}\tag{3.6}$$

其中$\psi_{\nu,\mu}$是$[0,T]\times\Omega$上取值于R^d的$(\mathcal{F}_t)_{0\le t\le T}$循序可测过程, 且$\int_0^T\|\psi_{\nu,\mu}(t)\|^2\mathrm{d}t<\infty$ a.e.; $A_{\nu,\mu}$是定义在$[0,T]\times\Omega$上的具有右连左极递增轨道的非负$(\mathcal{F}_t)_{0\le t\le T}$适应过程, 而且$A_{\nu,\mu}(0)=0$, $A(T)\le\infty$.

由(3.6)和Itô乘积公式可得

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\beta_{\lambda,\varphi}(t)\overline{X}(t) &= \mathrm{d}\exp\Big\{\int_0^t(\delta(\nu(s))-\delta(\lambda(s))+\varphi_1(s)-\mu_1(s))\mathrm{d}s\Big\}\beta_{\nu,\mu}(t)\overline{X}(t)\\ &= \exp\Big\{\int_0^t(\delta(\nu(s))-\delta(\lambda(s))+\varphi_1(s)-\mu_1(s))\mathrm{d}s\Big\}\\ &\quad\cdot[\beta_{\nu,\mu}(t)\overline{X}(t)(\delta(\nu(t))-\delta(\lambda(t))+\varphi_1(t)-\mu_1(t))\mathrm{d}t\\ &\quad+\psi^*_{\nu,\mu}(t)\sigma^{-1}(t)(\nu(t)+\mu(t)-\lambda(t)-\varphi(t))\mathrm{d}t\\ &\quad-\mathrm{d}A_{\nu,\mu}(t)+\psi^*_{\nu,\mu}(t)\mathrm{d}W^{(\lambda,\varphi)}(t)].\end{aligned}\tag{3.7}$$

设$\beta_{\lambda,\varphi}(\cdot)\overline{X}(\cdot)$有Doob-meyer分解,

$$\mathrm{d}\beta_{\lambda,\varphi}(t)\overline{X}(t)=\psi^*_{\lambda,\varphi}(t)\mathrm{d}W^{(\lambda,\varphi)}(t)-\mathrm{d}A_{\lambda,\varphi}(t).\tag{3.8}$$

与(3.7)比较得

$$\psi_{\lambda,\varphi}(t)\cdot\exp\int_0^t(\delta(\lambda(s))-\varphi_1(s))\mathrm{d}s=\psi_{\nu,\mu}(t)\cdot\exp\int_0^t(\delta(\nu(s))-\mu_1(s))\mathrm{d}s\triangleq h(t),\tag{3.9}$$

则$h(t)$和(ν,μ)无关. 定义一个随机过程$\widehat{\pi}^*(\cdot)=(\widehat{\pi}_1(\cdot),\cdots,\widehat{\pi}_d(\cdot))^*$:

$$\widehat{\pi}^*(t)\triangleq P_0(t)h^*(t)\sigma^{-1}(t),\qquad 0\le t\le T.\tag{3.10}$$

显然$\widehat{\pi}(\cdot)$是$(\mathcal{F}_t)_{0\le t\le T}$循序可测过程, 并且$\int_0^T\|\widehat{\pi}(t)\|^2\mathrm{d}t<\infty$, 从而$\widehat{\pi}(\cdot)$可以看作一个投资策略过程. 再定义一个随机过程

$$\widehat{\rho}(t)\triangleq\frac{\widehat{\pi}(\cdot)}{\overline{X}(t)}\mathbf{1}_{\{\overline{X}(t)>0\}},\qquad 0\le t\le T.\tag{3.11}$$

则$\widehat{\rho}(\cdot)$可以看作股票的投资比例. 由(3.9)(3.10)(3.11)知随机过程$\psi_{\nu,\mu}(\cdot)$可以表示成

$$\psi^*_{\nu,\mu}(t)=\beta_0(t)\overline{X}(t)\exp\Big\{\int_0^t(\mu_1(s)-\delta(\nu(s)))\mathrm{d}s\Big\}\widehat{\rho}^*(t)\sigma(t)=\beta_{\nu,\mu}(t)\widehat{\pi}^*(t)\sigma(t).\tag{3.12}$$

将(3.12)代入(3.7)再与(3.8)比较可得

$$\begin{aligned}&P_0^{\nu,\mu}(t)\mathrm{d}A_{\nu,\mu}(t)-\overline{X}(t)[\delta(\nu(t))+\widehat{\rho}^*(t)\nu(t)+\widehat{\rho}^*(t)\mu(t)-\mu_1(t)]\mathrm{d}t\\ =\;&P_0^{\lambda,\varphi}(t)\mathrm{d}A_{\lambda,\varphi}(t)-\overline{X}(t)[\delta(\lambda(t))+\widehat{\rho}^*(t)\lambda(t)+\widehat{\rho}^*(t)\varphi(t)-\varphi_1(t)]\mathrm{d}t\\ \triangleq\;&\mathrm{d}g(t).\end{aligned}\tag{3.13}$$

则$g(t)$与(ν,μ)无关, 再定义一个随机过程$\widehat{C}(\cdot):[0,T]\times\Omega\to R$

$$\widehat{C}(t)\triangleq g(t)-\int_0^t (R(s)-r(s))\Big(\overline{X}(s)-\sum_{i=1}^d \widehat{\pi}_i(s)\Big)^- \mathrm{d}s. \tag{3.14}$$

特别地取$v=0$, $\mu_1=(r-R)\mathbf{1}_{\{\sum_{i=1}^d \widehat{\pi}_i\geq \overline{X}\}}$, 则$\widehat{C}(t)=\int_0^t \beta_{0,\mu}(s)\mathrm{d}A_{0,\mu}(s)$, $0\leq t\leq T$. 于是$\widehat{C}(\cdot)$是一个右连左极增的非负$(\mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq T}$循序可测过程. 且$\widehat{C}(0)=0, \widehat{C}(T)<\infty$, 从而$\widehat{C}(\cdot)$可以看作一个消费过程.

由(3.13)(3.14)知随机过程$A_{\nu,\mu}(\cdot)$可以表示成

$$\begin{aligned}&A_{\nu,\mu}(t)\\ =&\int_0^t \beta_{\nu,\mu}(s)\mathrm{d}\widehat{C}(s)+\int_0^t \beta_{\nu,\mu}(s)\overline{X}(s)(\delta(\nu(s))+\widehat{\rho}^*(s)\nu(s))\mathrm{d}s\\ &+\int_0^t \beta_{\nu,\mu}(s)\Big(\widehat{\pi}^*(s)\mu(s)-\overline{X}(s)\mu_1(s)+(R(s)-r(s))\Big(\overline{X}(s)-\sum_{i=1}^d \widehat{\pi}_i(s)\Big)^-\Big)\mathrm{d}s.\end{aligned} \tag{3.15}$$

用类似于文献[4]中命题6.2中的方法可以证明一个重要的不等式: 对$\forall\,(\nu,\mu)\in\mathcal{D}$,

$$\delta(v(t,\omega))+\widehat{\rho}^*(t)v(t,\omega)\geq 0, \qquad \text{a.e.} \qquad (t,\omega)\in[0,T]\times\Omega. \tag{3.16}$$

从而由[5]的定理9.1中的讨论知$\widehat{\pi}(t,\omega)\in K$ a.e. $[0,T]\times\Omega$.

现将(3.12)(3.15)代入(3.6)可得

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\beta_{\nu,\mu}(t)\overline{X}(t) &= \varphi^*_{\nu,\mu}\mathrm{d}W_{\nu,\mu}(t)-\mathrm{d}A_{\nu,\mu}(t)\\ &= -\beta_{\nu,\mu}(t)\mathrm{d}\widehat{C}(t)-\beta_{\nu,\mu}(t)\overline{X}(t)(\delta(\nu(t))+\widehat{\rho}^*(t)\nu(t))\mathrm{d}t\\ &\quad -\beta_{\nu,\mu}(t)\Big(\widehat{\pi}^*(t)\mu(t)-\overline{X}(t)\mu_1(t)+(R(t)-r(t))\Big(\overline{X}(t)-\sum_{i=1}^d \widehat{\pi}_i(t)\Big)^-\Big)\mathrm{d}t\\ &\quad +\beta_{\nu,\mu}(t)\overline{X}(t)\widehat{\rho}^*(t)\sigma(t)\mathrm{d}W^{(\nu,\mu)}(t), \qquad \overline{X}(0)=V.\end{aligned}$$

特别地取$(\nu,\mu)\equiv 0$, 可得

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\beta_0(t)\overline{X}(t) &= -\beta_0(t)\mathrm{d}\widehat{C}(t)+\beta_0(t)\widehat{\pi}^*(t)\sigma(t)\mathrm{d}W^{(0)}(t)\\ &\quad -\beta_0(t)(R(t)-r(t))\Big(\overline{X}(t)-\sum_{i=1}^d \widehat{\pi}_i(t)\Big)^-\mathrm{d}t, \qquad \overline{X}(0)=V.\end{aligned}$$

从而由(2.2)式可得$X^{V,\widehat{\pi},\widehat{C}}(\cdot)=\overline{X}(\cdot)$. 再由(3.16)式知$(\widehat{\pi},\widehat{C})\in\mathcal{A}_+(V)$. 由于$\overline{X}(\cdot)\geq B(\cdot)\geq 0$, 从而$X^{V,\widehat{\pi},\widehat{C}}(\tau)=\overline{X}(\tau)\geq B(\tau)$, $\forall\,\tau\in\varphi$, 因此$V\in\mathcal{U}$, $h_{\text{up}}(K)\leq V<\infty$. 至此定理证明完毕. $\square$

下面给出美式未定权益的下套期值价格的定价公式.

引理 3.2 设$V<+\infty$, $\sigma_t\triangleq\inf\{u\in[t,T]|\underline{X}(u)=B(u)\}\wedge T$, $0\le t\le T$, 则$Q_{\nu,\mu}(t)\triangleq\beta_{\nu,\mu}(t\wedge\sigma_0)\underline{X}(t\wedge\sigma_0)$, $0\le t\le T$为$\mathsf{P}_{\nu,\mu}$-下鞅, 而且过程$\underline{X}(t\wedge\sigma_0)$, $0\le t\le T$具有右连左极修正.

定理 3.2 金融市场$M(K)$中的美式未定权益$B(\cdot)$的下套期保值价格为:

$$h_{\text{low}}(K)\le v=\inf_{(\nu,\mu)\in\mathcal{D}}U_{\nu,\mu}(0)=\inf_{(\nu,\mu)\in\mathcal{D}}\sup_{\tau\in\varphi}\mathsf{E}^{\nu,\mu}[\beta_{\nu,\mu}(\tau)B(\tau)],$$

等式在$V<\infty$和$v=0$成立. 如果$V<\infty$, 则一定存在投资消费策略$(\check{\pi},\check{C})\in\mathcal{A}_-(-v)$使得$-X^{-v,\check{\pi},\check{C}}(\sigma_0)=B(\sigma_0)$.

证明类似于定理3.1, 限于篇幅, 证明省略.

§4. 美式未定权益的无套利价格区间

假如在一个金融市场中, 人们可以身无分文入市, 通过资产的买卖能够最终保证不欠债并且有正概率的机会获得盈利, 此时称该金融市场存在套利机会. 假如金融市场中不存在套利机会, 则称市场无套利. 下面给出在市场$M(K)$中, 美式未定权益$B(\cdot)$产生套利机会的严格定义:

定义 4.1 设u为$M(K)$中美式未定权益$B(\cdot)$在$t=0$时刻的价格, 我们称三元组$(M(K),u,B(\cdot))$产生套利机会, 如果下面两个条件至少有一个成立

(i) 存在正数$x\in(0,u)$及投资消费策略$(\widehat{\pi},\widehat{C})\in\mathcal{A}_+(x)$, 使得$X^{x,\widehat{\pi},\widehat{C}}(\tau)\ge B(\tau)$, $\forall\,\tau\in\varphi$;

(ii) 存在正数$x>u$及停时$\check{\tau}\in\varphi$和投资消费策略$(\check{\pi},\check{C})\in\mathcal{A}_-(-x)$, 使得$X^{-x,\check{\pi},\check{C}}(\check{\tau})+B(\check{\tau})\ge 0$.

上述条件(i)和(ii)的经济意义是显而易见的. 事实上, 如果(i)成立, 那么未定权益的卖方可以在$t=0$时刻以价格u卖出美式未定权益$B(\cdot)$, 同时以初始财富x出售. 以投资消费策略$(\widehat{\pi},\widehat{C})\in\mathcal{A}_+(x)$进行投资, 再将剩余的现金$u-x$存入银行, 如果该美式未定权益在$\tau\in\varphi$被执行, 则由于$X^{x,\widehat{\pi},\widehat{C}}(\tau)\ge B(\tau)$, 卖方能够支付承诺的$B(\tau)$, 而且能够获得利润$(u-x)\exp\Big(\displaystyle\int_0^\tau r(t)\mathrm{d}t\Big)+X^{x,\widehat{\pi},\widehat{C}}(\tau)-B(\tau)>0$, 从而市场产生套利. 同理如果(ii)成立, 市场也一定产生套利. 在公平的金融市场中, 产生套利机会的美式未定权益的价格应该被排除.

下面我们给出$M(K)$中的美式未定权益$B(\cdot)$的无套利价格区间.

定理 4.1 设$u>0$为$M(K)$中的美式未定权益$B(\cdot)$在$t=0$时刻的价格, 如果$u\in[h_{\text{low}}(K),h_{\text{up}}(K)]$, $(M(K),u,B(\cdot))$不产生套利机会; 如果$u\,\overline{\in}\,[h_{\text{low}}(K),h_{\text{up}}(K)]$, $(M(K),u,B(\cdot))$产生套利机会.

限于篇幅, 证明省略.

§5. 美式看涨期权的上下套期保值

本节讨论的是在投资策略受到某些具体限制的金融市场$M(K)$中, 以美式看涨期权为例, 利用定理3.1和定理3.2的结果给出上下套期保值价格的显式表达式或估计式.

设美式看涨期权为$B(\cdot)=(P_i(\cdot)-q)^+$, 其中$P_i(\cdot)$是第$i$种股票的价格过程, q为敲定价格.

引理 5.1 设$M(K)$中, $-K_+$的支撑函数$\delta(x)$满足条件

$$-l\leq\delta(x)+x_i\leq 0,\qquad \forall x\in\overline{K},\ \text{其中 } 0\leq l<+\infty. \tag{5.1}$$

则对$\forall\,(\nu,\mu)\in\mathcal{D}$, $\beta_{\nu,\mu}(\cdot)P_i(\cdot)$为$\mathsf{P}^{\nu,\mu}$-下鞅, 进而对$\forall\,(\nu,\mu)\in\mathcal{D}$, $\beta_{\nu,\mu}(\cdot)B(\cdot)=\beta_{\nu,\mu}(\cdot)(P_i(\cdot)-q)^+$为$\mathsf{P}^{\nu,\mu}$-下鞅.

证明: 由Itô乘积公式可知

$$\begin{aligned}\beta_{\nu,\mu}(t)P_i(t)&=p_i\exp\Big(-\int_0^t(\delta(\nu(s))+v_i(s))\mathrm{d}s\Big)\\&\quad\cdot\exp\Big(\int_0^t\sigma_i^*(s)\mathrm{d}W^{\nu,\mu}(s)-\frac{1}{2}\int_0^t\|\sigma_i(s)\|^2\mathrm{d}s\Big)\\&\triangleq p_iA_\nu(t)N_{\nu,\mu}(t),\end{aligned}\tag{5.2}$$

其中

$$A_\nu(t)\triangleq\exp\Big(-\int_0^t(\delta(\nu(s))+v_i(s))\mathrm{d}s\Big),\tag{5.3}$$

$$N_{\nu,\mu}(t)\triangleq\exp\Big(\int_0^t\sigma_i^*(s)\mathrm{d}W^{\nu,\mu}(s)-\frac{1}{2}\int_0^t\|\sigma_i(s)\|^2\mathrm{d}s\Big).\tag{5.4}$$

由$\sigma_i(\cdot)=(\sigma_{i1}(\cdot),\cdots,\sigma_{id}(\cdot))$在$[0,T]\times\Omega$是一致有界知$N_{\nu,\mu}(\cdot)$为$\mathsf{P}^{\nu,\mu}$-鞅. 由条件(5.1)知$A_\nu(\cdot)$增过程, 从而$\beta_{\nu,\mu}(\cdot)P_i(\cdot)$为$\mathsf{P}^{\nu,\mu}$-下鞅. 因此由Jenson不等式可得$\beta_{\nu,\mu}(\cdot)(P_i(\cdot)-q)^+=(\beta_{\nu,\mu}(\cdot)P_i(\cdot)-q\beta_{\nu,\mu}(\cdot))^+$为$\mathsf{P}^{\nu,\mu}$-下鞅. □

命题 5.1 假设条件(5.1)成立, 则在$M(K)$中, 美式看涨期权$B(\cdot)=(P_i(\cdot)-q)^+$的上下套期保值价格分别为

$$\begin{aligned}h_{\rm up}(K)&=\sup_{(\nu,\mu)\in\mathcal{D}}\mathsf{E}^{\nu,\mu}[\beta_{\nu,\mu}(T)(P_i(T)-q)^+],\\h_{\rm low}(K)&=\inf_{(\nu,\mu)\in\mathcal{D}}\mathsf{E}^{\nu,\mu}[\beta_{\nu,\mu}(T)(P_i(T)-q)^+].\end{aligned}\tag{5.5}$$

证明: 首先由条件(5.1)来证明$V=\sup\limits_{(\nu,\mu)\in\mathcal{D}}\sup\limits_{\tau\in\varphi}\mathsf{E}^{\nu,\mu}[\beta_{\nu,\mu}(\tau)(P_i(\tau)-q)^+]<\infty$. 事实上, 对$\forall\,\tau\in\varphi$, $(\nu,\mu)\in\mathcal{D}$,

$$\begin{aligned}\mathsf{E}^{\nu,\mu}[\beta_{\nu,\mu}(\tau)(P_i(\tau)-q)^+]&\leq\mathsf{E}^{\nu,\mu}[\beta_{\nu,\mu}(\tau)P_i(\tau)]=p_i\mathsf{E}^{\nu,\mu}[A_\nu(\tau)N_{\nu,\mu}(\tau)]\\&\leq p_i\cdot\exp(lT)\cdot\mathsf{E}^{\nu,\mu}[N_{\nu,\mu}(\tau)]=p_i\cdot\exp(lT)<\infty.\end{aligned}$$

从而$V \le p_i \cdot \exp(lT) < \infty$.

再由引理5.1和可选轨道理论知

$$\sup_{\tau\in\varphi} \mathsf{E}^{\nu,\mu}[\beta_{\nu,\mu}(\tau)(P_i(\tau)-q)^+] = \mathsf{E}^{\nu,\mu}[\beta_{\nu,\mu}(T)(P_i(T)-q)^+]. \tag{5.6}$$

因此由定理3.1和定理3.2可得

$$\begin{aligned} h_{\text{up}}(K) &= \sup_{(\nu,\mu)\in\mathcal{D}} \sup_{\tau\in\varphi} \mathsf{E}^{\nu,\mu}[\beta_{\nu,\mu}(\tau)(P_i(\tau)-q)^+] \\ &= \sup_{(\nu,\mu)\in\mathcal{D}} \mathsf{E}^{\nu,\mu}[\beta_{\nu,\mu}(T)(P_i(T)-q)^+], \\ h_{\text{low}}(K) &= \inf_{(\nu,\mu)\in\mathcal{D}} \sup_{\tau\in\varphi} \mathsf{E}^{\nu,\mu}[\beta_{\nu,\mu}(\tau)(P_i(\tau)-q)^+] \\ &= \inf_{(\nu,\mu)\in\mathcal{D}} \mathsf{E}^{\nu,\mu}[\beta_{\nu,\mu}(T)(P_i(T)-q)^+]. \end{aligned}$$

显然从上式可以看出在条件(5.1)下, 美式看涨期权$B(\cdot)=(P_i(\cdot)-q)^+$在市场$M(K)$中的上下套期保值价格就是欧式看涨期权$(P_i(T)-q)^+$市场$M(K)$中的上下套期保值价格. □

注 在例2.2中, 取$i: 1\le i\le m$, 则由$\delta(x)=0$, $\overline{K}=\{x\in R^\infty | x_i=0, \forall\, i=1,2,\cdots,m\}$可得$\delta(x)+x_i=0$, $\forall\, x\in\overline{K}$即条件(5.1)成立.

引理 5.2 设金融市场$M(K)$中的短期利率$r(t)\le m$, $\forall\, 0\le t\le T$, 其中$m\ge 0$为常数, 而且$-K_+$的支撑函数$\delta(x)$满足条件

$$x| \to \delta(x)+x_i \text{ 为有效定义域 } \overline{K}\text{上非负、无上界的函数}. \tag{5.7}$$

则对$\forall\,(\nu,\mu)\in\mathcal{D}$, $\beta_{\nu,\mu}(\cdot)P_i(\cdot)$为$\mathsf{P}^{\nu,\mu}$-上鞅.

证明略.

命题 5.2 假设条件(5.7)成立, 则$M(K)$中的美式看涨期权$B(\cdot)=(P_i(\cdot)-q)^+$的上下套期保值价格满足$h_{\text{up}}(K)\le P_i(0)$, $h_{\text{low}}(K)=B(0)=(P_i(0)-q)^+$.

证明: 由引理5.2可得

$$\begin{aligned} U_{\nu,\mu}(0) &= \sup_{\tau\in\varphi} \mathsf{E}^{\nu,\mu}[\beta_{\nu,\mu}(\tau)(P_i(\tau)-q)^+] \le \sup_{\tau\in\varphi} \mathsf{E}^{\nu,\mu}[\beta_{\nu,\mu}(\tau)P_i(\tau)] \\ &= \mathsf{E}^{\nu,\mu}[\beta_{\nu,\mu}(0)P_i(0)] = P_i(0), \qquad \forall\,(\nu,\mu)\in\mathcal{D}. \end{aligned}$$

因此由定理3.1可得$h_{\text{up}}(K)=\sup\limits_{(\nu,\mu)\in\mathcal{D}} U_{\nu,\mu}(0)\le P_i(0)$.

下证$h_{\text{low}}(K)=B(0)=(P_i(0)-q)^+$. 任取$\xi: 0<\xi<T$以及$\tau\in\varphi$, 定义$\mathcal{D}_b\triangleq\{(\nu,\mu)\in\mathcal{D}$

$|\nu$和μ均为确定性函数$\}$, 则对$\forall\,(\nu,\mu)\in\mathcal{D}_b$, 由引理5.2和(5.2)可得

$$\begin{aligned}
&\mathsf{E}^{\nu,\mu}[\beta_{\nu,\mu}(\tau)(P_i(\tau)-q)^+]\\
\le\;&\mathsf{E}^{\nu,\mu}[\beta_{\nu,\mu}(\tau)P_i(\tau)\mathbf{1}_{\{\tau>\xi\}}]\\
&+\mathsf{E}^{\nu,\mu}\Big[\Big(\beta_{\nu,\mu}(\tau)P_i(\tau)-q\exp\Big(-\int_0^\tau(r(s)+\delta(\nu(s))-\mu_1(s))\mathrm{d}s\Big)\Big)^+\mathbf{1}_{\{\tau\le\xi\}}\Big]\\
\le\;&\mathsf{E}^{\nu,\mu}[\beta_{\nu,\mu}(\xi)P_i(\xi)]\\
&+\mathsf{E}^{\nu,\mu}\Big[\Big(P_i(0)N_{v,\mu}(\tau)-q\exp\Big(-\int_0^\xi(r(s)+\delta(\nu(s))-\mu_1(s))\mathrm{d}s\Big)\Big)^+\mathbf{1}_{\{\tau\le\xi\}}\Big]\\
\le\;&P_i(0)\exp\Big(-\int_0^\xi(\delta(\nu(s))+v_i(s))\mathrm{d}s\Big)\mathsf{E}^{\nu,\mu}[N_{\nu,\mu}(\xi)]+\mathsf{E}^{\nu,\mu}[(P_i(0)N_{\nu,\mu}(\xi)-q_{\nu,\mu}(\xi))^+]\\
=\;&P_i(0)A_\nu(\xi)+G_{\nu,\mu}(\xi),
\end{aligned}\tag{5.8}$$

其中

$$G_{\nu,\mu}(\xi)=(P_i(0)N_{\nu,\mu}(\xi)-q_{\nu,\mu}(\xi))^+,$$
$$q_{\nu,\mu}(\xi)=q\exp\Big(-\int_0^\xi(r(s)+\delta(\nu(s))-\mu_1(s)\mathrm{d}s)\Big).$$

由(5.8)和定理3.2可得

$$\begin{aligned}
h_{\text{low}}(K)&=\inf_{(\nu,\mu)\in\mathcal{D}}\sup_{\tau\in\varphi}\mathsf{E}^{\nu,\mu}[\beta_{\nu,\mu}(\tau)(P_i(\tau)-q)^+]\\
&\le\inf_{(\nu,\mu)\in\mathcal{D}_b}\sup_{\tau\in\varphi}\mathsf{E}^{\nu,\mu}[\beta_{\nu,\mu}(\tau)(P_i(\tau)-q)^+]\\
&\le\inf_{(\nu,\mu)\in\mathcal{D}_b}\Big[P_i(0)\exp\Big(-\int_0^\xi(\delta(\nu(s))+v_i(s))\mathrm{d}s\Big)+G_{\nu,\mu}(\xi)\Big]\\
&\le G_0(\xi)+P_i(0)\inf_{(\nu,\mu)\in\mathcal{D}_b}\exp\Big(-\int_0^\xi(\delta(\nu(s))+v_i(s))\mathrm{d}s\Big)\\
&=G_0(\xi).
\end{aligned}$$

再由Fatou引理可得$h_{\text{low}}(K)\le\overline{\lim_{\xi\to0}}G_0(\xi)=(P_i(0)-q)^+=B(0)$, 但又由于

$$\begin{aligned}
h_{\text{low}}(K)&=\inf_{(\nu,\mu)\in\mathcal{D}}\sup_{\tau\in\varphi}\mathsf{E}^{\nu,\mu}[\beta_{\nu,\mu}(\tau)(s_i(\tau)-q)^+]\\
&\ge\inf_{(\nu,\mu)\in\mathcal{D}}\mathsf{E}^{\nu,\mu}[\beta_{\nu,\mu}(0)(s_i(0)-q)^+]=(P_i(0)-q)^+.
\end{aligned}$$

从而$h_{\text{low}}(K)=(P_i(0)-q)^+$. □

注 在例2.3中, $\overline{K}\equiv[0,+\infty)^d$, $\delta(x)\equiv0$, 从而对$\forall\,i:0\le i\le d$, $x\to\delta(x)+x_i$均为$\overline{K}$上非负无上界的函数, 即条件(5.7)成立.

在例2.5中, $\overline{K}=\{x\in R^d|x_1=\cdots=x_d\le0\}$, $\delta(x)=-kx_1$, 从而对$\forall\,i:0\le i\le d$, $x\to\delta(x)+x_i=(1-k)x_i$为$\overline{K}$上非负无上界的函数, 即条件(5.7)成立.

参 考 文 献

[1] Bensoussan, A., On the theory of option pricing, *Acta Appl. Math.*, **2**(1984), 139–158.

[2] Karatzas, I., On the pricing of American options, *Appl. Math. Optimiz.*, **7**(1988), 37–60.

[3] Karatzas, I. and Kou, S.G., Hedging American contingent claims with constrained portfolios, *Finance Stochast*, **2**(1998), 215–258.

[4] Cvitanić, J. and Karatzas, I., Convex duality in constrained portfolio optimization, *Annals Appl. Probab.*, **2**(1992), 767–818.

[5] Cvitanić, J. and Karatzas, I, Hedging contigent claims with constrained portfolios, *Annals Appl. Probab.*, **3**(1993), 652–681.

[6] Karatzas, I., Kou, S.G., On the pricing of contingent claims under constraints, *Annals Appl. Probab.*, **6**(1996), 321–369.

[7] Karatzas, I. and Shreve, S.E., *Brownian Motion and Stochasitc Caculous*, 2nd edu, New York: Springer, 1991.

[8] 刘光中, 凸分析与极值问题, 高等教育出版社, 1991.

[9] Karatzas, I., Shreve, S.E., *Methods of Mathematical Finance*, New York: Springer, 1998.

Pricing American Contingent Claims with Frictions

Meng Qingxin[1,2] Lao Lanjun[3] Zhao Xuelei[1]

([1] *Institute of Mathematics, Fudan University, Shanghai, 200433*)

([2] *Department of Mathematics, Huzhou Teachers College, Huzhou, 313000*)

([3] *School of Management, Fudan University, Shanghai, 200433*)

The paper addresses the problem of pricing American Contingent Claims (ACCs) under constraints on portfolio choice and a higher interest rate for borrowing than for lending. In this paper, the formulae of the upper hedging price $h_{\rm up}(K)$ and the lower hedging price $h_{\rm low}(K)$ of an ACC is derived by introducing a family of auxiliary frictionless financial markets. Furthermore, the arbitrage-free interval $[h_{\rm low}(K), h_{\rm up}(K)]$ is identified, based on the principle of absence of arbitrage. In the end, for several concrete constraints on portfolio, explicit computations or estimations of the upper hedging price and the lower hedging price are carried out in the case of American call-option.

Keywords: Contingent claims, hedging, frictional markets, Doob-Meyer decomposition, equivalent martingale measure.

AMS Subject Classification: 90A09, 93E20, 60H30, 60G44.