一种概率分布的极值分位数的最优估计 *

欧阳资生[1,2]　杨向群[1]　陈内萍[2]

([1]湖南师范大学数学与计算机科学学院, 长沙, 410081; [2]湖南商学院信息学院, 长沙, 410205)

摘　要

在本文中, 我们构造了一种新的极值分位数估计, 给出了估计量的极限性质. 同时, 在渐近二阶矩最小的准则下, 利用子样本自助法给出了计算所构造的极值分位数估计时的样本点分割方法, 从理论上证明了这一极限结果, 说明了这种分割在渐近二阶矩最小的准则下是渐近最优分割, 同时提出了自适应的样本点分割的自助算法.

关键词:　极值分位数, 极值指数, 自助法.

学科分类号:　O212.7.

§1.　引　　言

假设$X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$是一列正的, 独立同分布的随机变量序列, 具有共同的分布函数F. 我们现在希望估计一个发生概率接近于1的极值分位数(也称为高分位数), 即我们希望寻找满足条件$1 - F(x_p) = p$ ($p \le c/n$, 很接近于0)的极值分位数x_p. 如果将F的逆函数定义为分位函数Q, $Q(r) := \inf\{x : F(x) \ge r\}$, 我们就是要寻找$x_p = Q(1-p)$. 这个不等式意味着: 如果我们运用渐近理论, 并要求这个基本的特征在极限过程中保持不变, 那么我们就必须假设p依赖于n, 且$\lim\limits_{n\to\infty} p_n = 0$. 这时, 我们仍然还有两种可能性: $np_n \to c \in (0,\infty)$或$np_n \to 0$ $(n\to\infty)$. 对这两种情形, 纯非参数估计方法并不能用. 事实上, 仅当$np_n \to \infty$时, 非参数方法才可行(Einmahl (1990)). 但由于极值分位数估计涉及分布函数的尾部特征, 这就提示我们利用极值理论来进行估计和推断.

对于分位数估计, 目前文献中的诸如区组最大方法、POT方法、矩估计、Pickands估计和指数回归模型估计, 事实上, 都有一个怎样选取门限值, 从而对样本点实施最优分割的问题. 目前的文献一般都在讨论估计极值指数时样本点最优分割问题, 对分位数情形下的样本点最优分割问题的研究不多. De Haan, L. et al. (1993)构造了极值分位数估计量, 并讨论了其大样本性质.Danielsson, J. (1997)引入k阶矩率估计量, 借助于自助法, 讨论了极值分位数和超出概率的问题. Bermudez et al. (2001)利用贝叶斯方法对极值分位数进行了估计. Ferreira (2002a)同样利用自助法讨论了极值分位数的逆问题和尾概率的估计问题, Ferreira (2002b)研究了利用矩估计方法求极值分位数时的样本点最优分割问题, 他采

*资助项目: 湖南省软科学项目(2006ZK3028).
本文2004年6月25日收到, 2007年11月10日收到修改稿.

用的方法是自助法. 这里, 我们仍将采用自助法. 在本文中, 我们将极值指数γ的取值限制为$\gamma>0$. 我们只考虑$\gamma>0$, 主要是因为这个范围在实际中用的很广泛.

§2. 主要结果

设$X_{n,1}\leq X_{n,2}\leq\cdots\leq X_{n,n}$为$n$个观测值$X_1,X_2,\cdots,X_n$的顺序统计量, 对于我们的问题, 我们考虑用插值法来得到极值分位数

$$\log\widehat{x}_{n,1}(k)=\log X_{n,k}+\widehat{\gamma}_{n,1}\Big(\log\frac{1}{p_n}-\log\Big(\frac{n}{k}\Big)\Big),$$

即

$$\widehat{x}_{n,1}(k):=X_{n,n-k}\Big(\frac{k}{np_n}\Big)^{\widehat{\gamma}_{n,1}(k)}. \tag{2.1}$$

其中$\widehat{\gamma}_{n,1}(k)$为极值指数$\gamma$的估计, 形式为

$$\widehat{\gamma}_{n,1}(k):=M_n^{(1)}=\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\log X_{n,n-i+1}-\log X_{n,n-k}. \tag{2.2}$$

由于我们考虑的是尾部的特征, 因此, 我们将对k作一些限制, 限制k为一中间序列, 即

$$k(n)\to\infty,\qquad \frac{k(n)}{n}\to 0.$$

另外, 我们还要求$k\in(\log n,n/\log n)$.

本文主要的思路是寻找最优的k, 使得

$$k_0(n)=\arg\inf_k \text{as.}\mathsf{E}(\widehat{x}_{n,1}(k)-x_n)^2. \tag{2.3}$$

这里as.E表示渐近期望, x_n满足$1-F(x_n)=p_n$. 由于在上式中, 我们在寻找最优的k时, x_n未知, 所以, 我们转而考虑

$$\mathsf{E}_n(\widehat{x}_{n,1}(k)-\widehat{x}_{n,2}(k))^2I(|\widehat{x}_{n,1}(k)-\widehat{x}_{n,2}(k)|\leq k^{\delta-1/2}),\qquad (k=1,2,\cdots,n). \tag{2.4}$$

这里$\delta>0$, $\widehat{x}_{n,1}(k)$如前,

$$\widehat{x}_{n,2}(k):=X_{n,n-k}\Big(\frac{k}{np_n}\Big)^{\widehat{\gamma}_{n,2}(k)}, \tag{2.5}$$

其中

$$\widehat{\gamma}_{n,2}(k):=\frac{M_n^{(2)}}{2M_n^{(1)}}, \tag{2.6}$$

$$M_n^{(2)}=\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}(\log X_{n-i+1,n}-\log X_{n-k,n})^2. \tag{2.7}$$

这里, 我们对极值指数γ采用$\widehat{\gamma}_{n,2}(k)$进行估计, 主要出于以下两个方面的考虑. (1) 估计量$\widehat{\gamma}_{n,2}(k)$由Danielsson, J. (1997)在估计极值指数γ时提出, 并且说明了估计量$\widehat{\gamma}_{n,2}(k)$的构建是基于矩率估计量, 因此具有很好的大样本性质; (2) 在极值指数$\gamma\in\mathcal{R}$时, 文献中一般选用Dekkers, A.L.M., Einmahl, J.H.J. and De Haans, L. (1989)所构建的矩估计量. 但是, 当我们只考虑$\gamma>0$的情况时, 显然, 我们的估计量$\widehat{\gamma}_{n,2}(k)$要比Dekkers, A.L.M., Einmahl, J.H.J. and De Haans, L. (1989)所构建的矩估计量更简捷, 门限值的选取也更方便. 当然, 如果我们选用矩估计量, 我们还是可以得到与本文相类似的结论, 只不过要增加更多的限制条件, 所得到的结论也更复杂(参见Ferreira (2002b)).

为了说明我们的结论, 我们需要引进一个二阶条件.

$$\lim_{t\to\infty}\frac{[U(tx)-U(t)]/a(t)-(x^{\gamma}-1)/\gamma}{A(t)}=h_{\gamma,\rho}(x)=\frac{1}{\rho}\Big[\frac{x^{\gamma+\rho}-1}{\gamma+\rho}-\frac{x^{\gamma}-1}{\gamma}\Big]. \tag{2.8}$$

其中$\rho<0$, 函数$a(t)>0$, $U(t):=(1/(1-F))^{-1}(t)$. $A(t)\to 0$, 且$A(t)$永远不改变符号. 在后面的结果中, 我们将进一步假定$a(t)=c_1t^{\gamma}$, $A(t)=\widetilde{c}_2t^{\rho}$. 事实上, 在$\gamma+\rho\neq 0$时, (2.8)等价于

$$U(t)=c_0+c_1\frac{t^{\gamma}-1}{\gamma}+c_2t^{\gamma+\rho}+o(t^{\gamma+\rho}). \tag{2.9}$$

其中$c_1>0$, $c_2\neq 0$.

在选取门限值, 对样本点实施分割时, 我们还是采取自助法, 从样本$X_1,X_2,\cdots,X_n$开始, 按以下步骤进行:

(1) 从样本$\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}$中随机, 独立地选取n_1个($n_1=O(n^{1-\varepsilon})$), $0<\varepsilon<1/2$, 记为$\{X_1^*,X_2^*,\cdots,X_{n_1}^*\}$, 对其顺序统计量$X_{n_1,1}^*,X_{n_1,2}^*,\cdots,X_{n_1,n_1}^*$计算$\widehat{x}_{n_1,1}^*(k)$和$\widehat{x}_{n_1,2}^*(k)$得到

$$q_{n_1,k}^*=(\widehat{x}_{n_1,1}^*(k)-\widehat{x}_{n_1,2}^*(k))^2I(|\widehat{x}_{n_1,1}^*(k)-\widehat{x}_{n_1,2}^*(k)|\le k^{\delta-1/2}),\qquad \delta>0,\ k=1,2,\cdots,n_1.$$

(2) 独立地重复步骤(1)r次, 记所得结果为$q_{n_1,k,s}^*$, $k=1,2,\cdots,n_1$, $s=1,2,\cdots,r$, 计算$(1/r)\cdot\sum\limits_{s=1}^{r}q_{n_1,k,s}^*$. 其中数$r$可以根据计算机的速度快慢选取.

(3) 求出使$(1/r)\cdot\sum\limits_{s=1}^{r}q_{n_1,k,s}^*$最小的$k$, 表示为$k_0^*(n_1)$.

(4) 设$n_2=(n_1)^2/n$, 显然$n_2<n_1$. 将步骤(1), (2), (3)中的n_1换成n_2, 重复这三步, 记所得结果为$k_0^*(n_2)$.

(5) 计算

$$\widehat{k}_0(n)=\frac{(k_0^*(n_1))^2}{k_0^*(n_2)}\frac{l(\widehat{\gamma}_n(k),\widehat{\rho}_{n_1}(k_0^*))}{\bar{l}(\widehat{\gamma}_n(k),\widehat{\rho}_{n_1}(k_0^*))}.$$

其中$\widehat{\gamma}_n(k),\widehat{\rho}_{n_1}(k_0^*)$分别为$\gamma,\rho$的任意相合估计, l和$\bar{l}$的定义见定理2.1和定理2.2. 例如$\widehat{\gamma}_n(k)=\widehat{\gamma}_{n,1}$,

$$\widehat{\rho}_{n_1}(k_0^*)=\frac{\log k_0^*(n_1)}{-2\log n_1+2\log k_0^*(n_1)}.$$

以上所得$\widehat{k}_0(n)$就是所要求的最优值.

定理 2.1 假设对$\gamma>0$, $\rho<0$, $\gamma\neq-\rho$, 且U满足(2.9), $U(\infty)>0$, 进一步, $np_n\to c$ (有限, 非负), 对$\varepsilon>0$, $\log p_n=o(n^{\varepsilon})$, 则当$n\to\infty$时,

$$k_0(n)\to\Big(\frac{-\rho(1-\rho)^2}{2\tilde{c_2}^2}\Big)^{1/(1-2\rho)}n^{-2\rho/(1-2\rho)}:=l(\gamma,\rho)n^{-2\rho/(1-2\rho)},\tag{2.10}$$

其中$k_0(n)=\arg\inf_k \mathrm{as.E}(\widehat{x}_{n,1}(k)-x_n)^2$.

推论 2.1 在定理2.1的条件下, 进一步假设$\sqrt{k}A(n/k)\to\lambda\in(-\infty,\infty)$, 则我们有

$$\frac{\sqrt{k_0}\gamma}{a(n/k_0)(k_0/(np_n))^{\gamma}\log(k_0/(np_n))}(\widehat{x}_{n,1}(k)-x_n)$$

依分布收敛于一个正态随机变量, 该正态随机变量的均值为$\lambda/[\rho(1-\rho)]$, 方差为1.

定理 2.2 在定理2.1的条件下, 当$n\to\infty$时,

$$\overline{k}_0(n)\to\Big(\frac{-\rho(1-\rho)^4}{\tilde{c_2}^2}\Big)^{1/(1-2\rho)}n^{-2\rho/(1-2\rho)}:=\overline{l}(\gamma,\rho)n^{-2\rho/(1-2\rho)},\tag{2.11}$$

其中$\overline{k}_0(n)=\arg\inf_k \mathrm{as.E}(\widehat{x}_{n,1}(k)-\widehat{x}_{n,2}(k))^2$.

为保证渐近二阶矩的收敛性, 我们考虑下面统计量

$$q_{n,k}=(\widehat{x}_{n,1}(k)-\widehat{x}_{n,2}(k))^2I(|\widehat{x}_{n,1}(k)-\widehat{x}_{n,2}(k)|\le k^{\delta-1/2}),\qquad \delta>0.$$

定理 2.3 在定理2.1的条件下, 当$n\to\infty$时, 我们有$\overline{k}_{0,1}(n)/\overline{k}_0(n)\to1$. 因此

$$\overline{k}_{0,1}(n)\to\Big(\frac{-\rho(1-\rho)^4}{\tilde{c_2}^2}\Big)^{1/(1-2\rho)}n^{-2\rho/(1-2\rho)}:=\overline{l}(\gamma,\rho)n^{-2\rho/(1-2\rho)},\tag{2.12}$$

其中$\overline{k}_{0,1}(n)=\arg\inf_k \mathrm{as.E}(q_{n,k})$.

现在, 我们介绍自助程序, 我们从$\mathcal{X}_n:=\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}$中独立选取样本量为$n_1$ ($n_1<n$)的样本, 记为$\mathcal{X}^*_{n_1}:=\{X^*_1,X^*_2,\cdots,X^*_{n_1}\}$, 记其顺序统计量$X^*_{n_1,1},X^*_{n_1,2},\cdots,X^*_{n_1,n_1}$, 对$k_1<n_1$, 定义

$$q^*_{n,k}=(\widehat{x}^*_{n,1}(k)-\widehat{x}^*_{n,2}(k))^2I(|\widehat{x}^*_{n,1}(k)-\widehat{x}^*_{n,2}(k)|\le k^{\delta-1/2}),\qquad \delta>0,\ k=1,2,\cdots,n_1.$$

现在, 我们使用如下的自助估计的平均平方误

$$\mathrm{E}\{(q^*_{n,k})|\mathcal{X}_n\}.$$

定理 2.4 在定理2.1的条件下, 令$n_1=O(n^{1-\varepsilon})$. 则当$n\to\infty$时,

$$\overline{k}^*_0(n_1)\xrightarrow{p}\Big(\frac{-\rho(1-\rho)^4}{\tilde{c_2}^2}\Big)^{1/(1-2\rho)}n_1^{-2\rho/(1-2\rho)}:=\overline{l}(\gamma,\rho)n_1^{-2\rho/(1-2\rho)},\tag{2.13}$$

其中$\overline{k}^*_0(n_1)=\arg\inf_k \mathrm{as.E}(q^*_{n_1,k})$.

推论 2.2 假设定理2.4的条件成立, 那么

$$\overline{k}_0(n)\Big/\left\{\overline{k}_0^*(n_1)\left(\frac{n}{n_1}\right)^{-2\rho/(1-2\rho)}\right\} \xrightarrow{p} 1. \tag{2.14}$$

定理 2.5 在定理2.4的条件下, 令$n_2=(n_1)^2/n$. 设$\overline{k}_0^*(n_2)=\arg\inf_k \text{as.}\mathsf{E}(q_{n_2,k}^*)$, 则当$n\to\infty$时,

$$\overline{k}_0(n)/\{\overline{k}_0^*(n_1)^2/\overline{k}_0^*(n_2)\} \xrightarrow{p} 1. \tag{2.15}$$

推论 2.3 在定理2.5的条件下,

$$k_0(n)\Big/\left\{\frac{(k_0^*(n_1))^2}{k_0^*(n_2)}\frac{l(\widehat{\gamma}_n(k),\widehat{\rho}_{n_1}(k_0^*))}{\overline{l}(\widehat{\gamma}_n(k),\widehat{\rho}_{n_1}(k_0^*))}\right\} \xrightarrow{p} 1. \tag{2.16}$$

定理 2.6 在定理2.5的条件下, 当$n\to\infty$时, k_0满足

$$\frac{\widehat{k}_0(n)}{k_0(n)} \xrightarrow{p} 1. \tag{2.17}$$

这里

$$\widehat{k}_0(n)=\frac{(k_0^*(n_1))^2}{k_0^*(n_2)}\frac{l(\widehat{\gamma}_n(k),\widehat{\rho}_{n_1}(k_0^*))}{\overline{l}(\widehat{\gamma}_n(k),\widehat{\rho}_{n_1}(k_0^*))},$$

其中$\widehat{\gamma}_n(k),\widehat{\rho}_{n_1}(k_0^*)$分别为$\gamma,\rho$的任意相合估计, 例如$\widehat{\gamma}_n(k)=\widehat{\gamma}_{n,1}$,

$$\widehat{\rho}_{n_1}(k_0^*)=\frac{\log k_0^*(n_1)}{-2\log n_1+2\log k_0^*(n_1)}. \tag{2.18}$$

§3. 定理的证明

为证明上一节定理, 我们首先来介绍几个引理. 在后面的内容中, 我们均定义$(x^0-1)/0=\log x$, 不再另行说明.

引理 3.1 设$Y_1,\cdots,Y_n$是一独立同分布的随机变量序列, 具有共同的分布函数$1-y^{-1}$ $(y>1)$, $Y_{n,1}\le\cdots\le Y_{n,n}$为其顺序统计量. 假设$k\to\infty$, $k/n\to0$. 那么, 我们有

(i) $Y_{n,n-k}/(n/k)\xrightarrow{p}1$.

(ii) 定义

$$P_n:=\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\log Y_{n,n-i+1}-\log Y_{n,n-k}-1,$$
$$Q_n:=\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}(\log Y_{n,n-i+1}-\log Y_{n,n-k})^2-2.$$

我们有$\sqrt{k}(P_n,Q_n)\xrightarrow{d}(P,Q)$, P,Q为正态分布, 它们的均值矢量为0, 协方差矩阵元素为

$$\mathsf{E}P^2=1,\qquad \mathsf{E}Q^2=20,\qquad \mathsf{E}(PQ)=4.$$

进一步

$$kEP_n^2 \to EP^2, \qquad kEQ_n^2 \to EQ^2.$$

(iii) 对$j=1,2$, 定义

$$d_n^j = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} jh_{\gamma,\rho}\Big(\frac{Y_{n,n-i+1}}{Y_{n,n-k}}\Big)(\log Y_{n,n-i+1}-\log Y_{n,n-k})^{j-1}.$$

则

$$d_1 = 1/(1-\rho), \qquad d_2 = 2(3-2\rho)/(1-\rho)^2.$$

证明: 由Drasma et al. (1999)中引理5.1立即可得. □

引理 3.2 (Drasma et al. (1999)) 设f为一可测函数, 假设存在一实参数α和函数$a_1(t)>0$和$A_1(t)\to 0$, 使得对所有的$x>0$, 有

$$\lim_{t\to\infty}\frac{[f(tx)-f(t)]/a_1(t)-(x^\alpha-1)/\alpha}{A_1(t)} = h_1(x) := \frac{1}{\beta}\Big[\frac{x^{\alpha+\beta}-1}{\alpha+\beta}-\frac{x^\alpha-1}{\alpha}\Big] \qquad (\beta\le 0).$$

那么, 对任意给定的$\varepsilon>0$, 存在$t_0>0$使得对所有的$t\ge t_0$, $tx\ge t_0$,

$$\Big|\frac{[f(tx)-f(t)]/a_1(t)-(x^\alpha-1)/\alpha}{A_1(t)}-h_1(x)\Big| \le \varepsilon[1+x^\alpha+2x^{\alpha+\beta}e^{\varepsilon|\log x|}].$$

引理 3.3 (Ferreira (2002b)) 假设$U(\infty)>0$, 函数$a(t)>0$和$A(t)\to 0$, 且$A(t)$永远不改变符号, 同时

$$\lim_{t\to\infty}\frac{[U(tx)-U(t)]/a(t)-(x^\gamma-1)/\gamma}{A(t)} = h_{\gamma,\rho}(x) \qquad (\rho<0).$$

那么, 当$\gamma>0$时,

$$\lim_{t\to\infty}\frac{a(t)/U(t)-\gamma}{A(t)} = \frac{\gamma}{\rho}.$$

引理 3.4 (Ferreira (2002b)) 设$\widehat{b}(n/k)=U(Y_{n,n-k})$, 在定理2.1条件下,

$$\frac{\widehat{b}(n/k)-U(n/k)}{a(n/k)} = \frac{B}{\sqrt{k}}+o_p\Big(\frac{1}{\sqrt{k}}\Big)+o_p\Big(A\Big(\frac{n}{k}\Big)\Big).$$

这里, B是一个标准正态分布, 且与P,Q独立.

引理 3.5 在定理2.1的条件下,

$$\widehat{\gamma}_{n,1} = M_n^{(1)} \overset{d}{=} \gamma+\gamma\frac{P}{\sqrt{k}}+\frac{\gamma}{\rho(1-\rho)}A\Big(\frac{n}{k}\Big)+o_p\Big(A\Big(\frac{n}{k}\Big)\Big),$$

$$\widehat{\gamma}_{n,2} \overset{d}{=} \gamma+\gamma\frac{Q}{2\sqrt{k}}+\frac{\gamma(2-\rho)}{\rho(1-\rho)^2}A\Big(\frac{n}{k}\Big)+o_p\Big(A\Big(\frac{n}{k}\Big)\Big).$$

证明: 在引理3.2中, 令$\alpha = 0$. 对任意给定的$\varepsilon > 0$, 存在$t_0 > 0$使得对所有的$t \geq t_0$, $tx \geq t_0$,

$$\left|\frac{[\log U(tx) - \log U(t)]/[a(t)/U(t)] - \log x}{A(t)} - h_{\gamma,\rho}(x)\right| \leq \varepsilon[1 + 2x^{\rho}e^{\varepsilon|\log x|}]. \tag{3.1}$$

在上式中, 对$i = 0, 1, 2, \cdots, k-1$依次令$t = Y_{n,n-k}$, $x = Y_{n,n-i}/Y_{n,n-k}$, 然后将k个不等式相加, 再除以k, 注意到$\{X_{n,n-i+1}\}_{i=1}^{n} \stackrel{d}{=} \{U(Y_{n,n-i+1})\}_{i=1}^{n}$, 我们就可以得到

$$\begin{aligned}
&\frac{M_n^{(1)}(k)}{a(Y_{n,n-k})/U(Y_{n,n-k})} \\
\leq\ & \Big(\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\log Y_{n,n-i+1} - \log Y_{n,n-k}\Big) + A(Y_{n,n-k})\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}h_{\gamma,\rho}\Big(\frac{Y_{n,n-i+1}}{Y_{n,n-k}}\Big) \\
&+ \varepsilon A(Y_{n,n-k})\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\Big\{1 + 2\Big(\frac{Y_{n,n-i+1}}{Y_{n,n-k}}\Big)^{\rho}e^{\varepsilon\log(Y_{n,n-i+1}/Y_{n,n-k})}\Big\}.
\end{aligned}$$

注意到

$$\Big\{\frac{Y_{n,n-i+1}}{Y_{n,n-k}}\Big\}_{i=1}^{k} \stackrel{d}{=} \{Y_i'\}_{i=1}^{k}.$$

这里$Y_1', \cdots, Y_k'$为独立同分布的, 具有共同的分布函数$1 - 1/y$, $(y > 1)$.

对$(1/k)\cdot\sum_{i=1}^{k}\{1 + 2(Y_{n,n-i+1}/Y_{n,n-k})^{\rho}e^{\varepsilon\log(Y_{n,n-i+1}/Y_{n,n-k})}\}$运用大数律. 同时, 由于

$$\frac{k}{n}Y_{n,n-k} \xrightarrow{p} 1,$$

而$|A(t)|$为一正则变换, 亦即

$$\frac{A(Y_{n,n-k})}{A(n/k)} \xrightarrow{p} 1.$$

因此, 由引理3.1, 我们有

$$\frac{M_n^{(1)}(k)}{a(Y_{n,n-k})/U(Y_{n,n-k})} = 1 + P_n + d_1 A\Big(\frac{n}{k}\Big) + o_p\Big(A\Big(\frac{n}{k}\Big)\Big),$$

即

$$\begin{aligned}
\widehat{\gamma}_{n,1} = M_n^{(1)} &\stackrel{d}{=} \Big(1 + \frac{P}{\sqrt{k}} + d_1 A\Big(\frac{n}{k}\Big) + o_p\Big(A\Big(\frac{n}{k}\Big)\Big)\Big)\Big(\gamma + \frac{\gamma}{\rho}A\Big(\frac{n}{k}\Big)\Big) \\
&= \gamma + \gamma\frac{P}{\sqrt{k}} + \frac{\gamma}{\rho(1-\rho)}A\Big(\frac{n}{k}\Big) + o_p\Big(A\Big(\frac{n}{k}\Big)\Big).
\end{aligned}$$

同理

$$\frac{M_n^{(2)}(k)}{a(Y_{n,n-k})^2/U(Y_{n,n-k})^2} = 2 + Q_n + d_2 A\Big(\frac{n}{k}\Big) + o_p\Big(A\Big(\frac{n}{k}\Big)\Big).$$

因此

$$\begin{aligned}
M_n^{(2)} &\stackrel{d}{=} \Big(2+\frac{Q}{\sqrt{k}}+d_2A\Big(\frac{n}{k}\Big)+o_p\Big(A\Big(\frac{n}{k}\Big)\Big)\Big)\Big(\gamma+\frac{\gamma}{\rho}A\Big(\frac{n}{k}\Big)\Big)^2\\
&= 2\gamma^2+\gamma^2\frac{Q}{\sqrt{k}}+\frac{2\gamma^2(2-\rho)}{\rho(1-\rho)^2}A\Big(\frac{n}{k}\Big)+o_p\Big(A\Big(\frac{n}{k}\Big)\Big).
\end{aligned}$$

注意到

$$M_n^{(1)} \stackrel{\text{a.s.}}{\to} \gamma,$$

我们就有

$$\widehat{\gamma}_{n,2} \stackrel{d}{=} \gamma+\gamma\frac{Q}{2\sqrt{k}}+\frac{\gamma(2-\rho)}{\rho(1-\rho)^2}A\Big(\frac{n}{k}\Big)+o_p\Big(A\Big(\frac{n}{k}\Big)\Big).$$

□

定理2.1的证明： 记$a_n:=k/(np_n)$, 不考虑$o_p(1/\sqrt{k})$和$o_p(A(n/k))$,

$$\begin{aligned}
\widehat{x}_{n,1}(k)-x_n &= \widehat{b}\Big(\frac{n}{k}\Big)a_n^{\widehat{\gamma}_{n,1}}-U\Big(\frac{1}{p_n}\Big)\\
&= \frac{\widehat{b}(n/k)-U(n/k)}{a(n/k)}a_n^{\widehat{\gamma}_{n,1}}a\Big(\frac{n}{k}\Big)+\frac{U(n/k)}{a(n/k)}(a_n^{\widehat{\gamma}_{n,1}}-1)a\Big(\frac{n}{k}\Big)\\
&\quad -\frac{U(1/p_n)-U(n/k)}{a(n/k)}a\Big(\frac{n}{k}\Big)\\
&= \frac{B}{\sqrt{k}}a_n^{\widehat{\gamma}_{n,1}}a\Big(\frac{n}{k}\Big)+\frac{1}{\gamma+(\gamma/\rho)\cdot A(n/k)}(a_n^{\widehat{\gamma}_{n,1}}-1)a\Big(\frac{n}{k}\Big)\\
&\quad -a\Big(\frac{n}{k}\Big)\Big(\frac{a_n^{\gamma}-1}{\gamma}+\frac{1}{\rho}\Big[\frac{a_n^{\gamma+\rho}-1}{\gamma+\rho}-\frac{a_n^{\gamma}-1}{\gamma}\Big]A\Big(\frac{n}{k}\Big)\Big)\\
&\to a\Big(\frac{n}{k}\Big)a_n^{\gamma}\Big[\frac{B}{\sqrt{k}}a_n^{\widehat{\gamma}_{n,1}-\gamma}+\frac{a_n^{\widehat{\gamma}_{n,1}-\gamma}-1}{\gamma}+\Big(\frac{a_n^{\rho}-a_n^{-\gamma}}{\rho(\rho+\gamma)}-\frac{1-a_n^{-\gamma}}{\rho\gamma}\Big)A\Big(\frac{n}{k}\Big)\Big],
\end{aligned}$$

在最优情形下, 我们应有$a_n^{\widehat{\gamma}_{n,1}-\gamma}\stackrel{p}{\to}1$.

注意到

$$a\Big(\frac{n}{k}\Big)a_n^{\gamma}=c_1p_n^{-\gamma}.$$

由引理3.5可知

$$\widehat{\gamma}_{n,1}-\gamma=O_p((k(n))^{-1/2}).$$

因此, 我们可以用$(\log a_n(\widehat{\gamma}_{n,1}-\gamma))/\gamma$来替代$(a_n^{\widehat{\gamma}_{n,1}-\gamma}-1)/\gamma$, 最后, 我们注意到这一项控制了上式中括号内的其他各项, 因此, 我们有

$$\begin{aligned}
&\widehat{x}_{n,1}(k)-x_n\to\frac{c_1p_n^{-\gamma}}{\gamma}\log a_n(\widehat{\gamma}_{n,1}-\gamma),\\
&\inf_k \text{as.}\mathsf{E}(\widehat{x}_{n,1}(k)-x_n)^2\to\Big(\frac{c_1p_n^{-\gamma}}{\gamma}\Big)^2\inf_k \text{as.}\mathsf{E}(\log a_n)^2(\widehat{\gamma}_{n,1}-\gamma)^2.
\end{aligned}$$

由引理3.5, 忽略无穷小量$o_p(A(n/k))$,

$$\begin{aligned} \mathrm{asE}(\widehat{\gamma}_{n,1}-\gamma)^2 &= \mathsf{E}\Big(\gamma\frac{P}{\sqrt{k}}+\frac{\gamma}{\rho(1-\rho)}A\Big(\frac{n}{k}\Big)\Big)^2=\frac{\gamma^2}{k}+\frac{\gamma^2}{\rho^2(1-\rho)^2}\Big(A\Big(\frac{n}{k}\Big)\Big)^2 \\ &= \frac{\gamma^2}{k}+\frac{\gamma^2}{\rho^2(1-\rho)^2}(\widetilde{c}_2)^2\Big(\frac{n}{k}\Big)^{2\rho}, \end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned} \mathrm{as.E}(\widehat{x}_{n,1}-x_n)^2 &\to \Big(\frac{c_1p_n^{-\gamma}}{\gamma}\Big)^2\Big(\log\Big(\frac{k}{np_n}\Big)\Big)^2\Big(\frac{\gamma^2}{k}+\frac{\gamma^2}{\rho^2(1-\rho)^2}\widetilde{c}_2^2\Big(\frac{n}{k}\Big)^{2\rho}\Big) \\ &= c_1^2p_n^{-2\gamma}\Big(\log\Big(\frac{k}{np_n}\Big)\Big)^2\Big\{\frac{p_n^{-1}}{[k/(np_n)]}\frac{1}{n}+\frac{\widetilde{c}_2^2}{\rho^2(1-\rho)^2}\Big(\frac{n}{k}\Big)^{2\rho}\Big\} \\ &= c_1^2p_n^{-2\gamma-2\rho}\Big(\log\Big(\frac{k}{np_n}\Big)\Big)^2\Big\{\frac{p_n^{2\rho-1}}{[k/(np_n)]}\frac{1}{n}+\frac{\widetilde{c}_2^2}{\rho^2(1-\rho)^2}\Big(\frac{np_n}{k}\Big)^{2\rho}\Big\}. \end{aligned}$$

为方便记, 我们记$u=k/(np_n)$, 那么问题转化为

$$\arg\inf_u c_1^2p_n^{-2\gamma-2\rho}\Big\{(\log u)^2\frac{p_n^{2\rho-1}}{u}\frac{1}{n}+\frac{\widetilde{c}_2^2}{\rho^2(1-\rho)^2}(\log u)^2u^{-2\rho}\Big\}.$$

记$s=(\log u)^2/u$, 则$u\to(\log s)^2/s$, $(u\to\infty)$. 问题进一步转化为

$$\arg\inf_s c_1^2p_n^{-2\gamma-2\rho}\Big\{\frac{p_n^{2\rho-1}}{n}s+\frac{\widetilde{c}_2^2}{\rho^2(1-\rho)^2}s^{2\rho}(\log s)^{2(1-2\rho)}\Big\}.$$

对s求导, 并令导数等于0,

$$\begin{aligned} -\frac{p_n^{2\rho-1}}{n} &= \frac{2\widetilde{c}_2^2}{\rho(1-\rho)^2}s^{2\rho-1}(\log s)^{2(1-2\rho)}+\frac{2\widetilde{c}_2^2(1-2\rho)}{\rho^2(1-\rho)^2}s^{2\rho}(\log s)^{2(1-2\rho)-1} \\ &\to \frac{2\widetilde{c}_2^2}{\rho(1-\rho)^2}s^{2\rho-1}(\log s)^{2(1-2\rho)}, \end{aligned}$$

也即

$$\frac{1}{u}\to\frac{s}{(\log s)^2}=\Big(\frac{2\widetilde{c}_2^2}{-\rho(1-\rho)^2}\Big)^{1/(1-2\rho)}p_nn^{1/(1-2\rho)}.$$

因此

$$\frac{k}{np_n}\to\Big(\frac{2\widetilde{c}_2^2}{-\rho(1-\rho)^2}\Big)^{-1/(1-2\rho)}(p_n)^{-1}n^{-1/(1-2\rho)},$$

即

$$k_0(n)\to\Big(\frac{-\rho(1-\rho)^2}{2\widetilde{c}_2{}^2}\Big)^{1/(1-2\rho)}n^{-2\rho/(1-2\rho)}:=l(\gamma,\rho)n^{-2\rho/(1-2\rho)}.$$

□

推论2.1的证明: 由引理3.5和定理2.1的证明, 我们很容易得到该推论的结论. □

定理2.2的证明:

$$\begin{aligned}
\widehat{x}_{n,1}(k)-\widehat{x}_{n,2}(k) &= (\widehat{x}_{n,1}(k)-x_n)-(\widehat{x}_{n,2}(k)-x_n)\\
&= \Big(\widehat{b}\Big(\frac{n}{k}\Big)a_n^{\widehat{\gamma}_{n,1}}-U\Big(\frac{1}{p_n}\Big)\Big)-\Big(\widehat{b}\Big(\frac{n}{k}\Big)a_n^{\widehat{\gamma}_{n,2}}-U\Big(\frac{1}{p_n}\Big)\Big)\\
&= \frac{\widehat{b}(n/k)-U(n/k)}{a(n/k)}a_n^{\widehat{\gamma}_{n,1}}a\Big(\frac{n}{k}\Big)+\frac{U(n/k)}{a(n/k)}(a_n^{\widehat{\gamma}_{n,1}}-1)a\Big(\frac{n}{k}\Big)\\
&\quad -\frac{U(1/p_n)-U(n/k)}{a(n/k)}a(n/k)\\
&\quad -\Big(\frac{\widehat{b}(n/k)-U(n/k)}{a(n/k)}a_n^{\widehat{\gamma}_{n,2}}a\Big(\frac{n}{k}\Big)+\frac{U(n/k)}{a(n/k)}(a_n^{\widehat{\gamma}_{n,2}}-1)a\Big(\frac{n}{k}\Big)\\
&\quad -\frac{U(1/p_n)-U(n/k)}{a(n/k)}a\Big(\frac{n}{k}\Big)\Big)\\
&= \frac{B}{\sqrt{k}}a_n^{\widehat{\gamma}_{n,1}}a\Big(\frac{n}{k}\Big)+\frac{1}{\gamma+(\gamma/\rho)\cdot A(n/k)}(a_n^{\widehat{\gamma}_{n,1}}-1)a\Big(\frac{n}{k}\Big)\\
&\quad -\Big(\frac{B}{\sqrt{k}}a_n^{\widehat{\gamma}_{n,2}}a\Big(\frac{n}{k}\Big)+\frac{1}{\gamma+(\gamma/\rho)\cdot A(n/k)}(a_n^{\widehat{\gamma}_{n,2}}-1)a\Big(\frac{n}{k}\Big)\Big)\\
&\to a\Big(\frac{n}{k}\Big)a_n^{\gamma}\Big[\frac{B}{\sqrt{k}}(a_n^{\widehat{\gamma}_{n,1}-\gamma}-a_n^{\widehat{\gamma}_{n,2}-\gamma})+\frac{a_n^{\widehat{\gamma}_{n,1}-\gamma}-1}{\gamma}-\frac{a_n^{\widehat{\gamma}_{n,2}-\gamma}-1}{\gamma}\Big].
\end{aligned}$$

类似于定理2.1的讨论, 我们可以得到

$$\widehat{x}_{n,1}(k)-\widehat{x}_{n,2}(k))\to\frac{c_1p_n^{-\gamma}}{\gamma}\log a_n(\widehat{\gamma}_{n,1}-\widehat{\gamma}_{n,2}),$$

也即

$$\inf_k \text{as.}\mathsf{E}(\widehat{x}_{n,1}(k)-\widehat{x}_{n,2})^2\to\Big(\frac{c_1p_n^{-\gamma}}{\gamma}\Big)^2\inf_k \text{as.}\mathsf{E}(\log a_n)^2(\widehat{\gamma}_{n,1}-\widehat{\gamma}_{n,2})^2.$$

由引理3.5, 忽略无穷小量$o_p(A(n/k)$,

$$\mathsf{E}(\widehat{\gamma}_{n,1}-\widehat{\gamma}_{n,2})^2=\mathsf{E}\Big(\gamma\frac{P}{\sqrt{k}}-\gamma\frac{Q}{2\sqrt{k}}-\frac{\gamma}{\rho(1-\rho)^2}A\Big(\frac{n}{k}\Big)\Big)^2.$$

由引理3.1, $\widehat{\gamma}_{n,1}-\widehat{\gamma}_{n,2}$的偏差为

$$\text{Bias}(\widehat{\gamma}_{n,1}-\widehat{\gamma}_{n,2})=\frac{\gamma}{\rho(1-\rho)^2}A\Big(\frac{n}{k}\Big),$$

方差为

$$\mathsf{Var}\,(\widehat{\gamma}_{n,1}-\widehat{\gamma}_{n,2})=\mathsf{Var}\Big(\gamma\frac{P}{\sqrt{k}}\Big)+\mathsf{Var}\Big(\gamma\frac{Q}{2\sqrt{k}}\Big)-2\mathsf{Cov}\Big(\gamma\frac{P}{\sqrt{k}},\gamma\frac{Q}{2\sqrt{k}}\Big)=\frac{2\gamma^2}{k}.$$

因此,

$$\mathsf{E}(\widehat{\gamma}_{n,1}-\widehat{\gamma}_{n,2})^2=\frac{2\gamma^2}{k}+\frac{\gamma^2}{\rho^2(1-\rho)^4}\Big(A\Big(\frac{n}{k}\Big)\Big)^2.$$

令$\overline{k}_0(n) = \arg\inf_k \mathsf{E}(\widehat{x}_{n,1}(k) - \widehat{x}_{n,2}(k))^2$, 类似于定理2.1, 可得

$$\overline{k}_0(n) \to \Big(\frac{-\rho(1-\rho)^4}{\widetilde{c}_2^{\,2}}\Big)^{1/(1-2\rho)} n^{-2\rho/(1-2\rho)} := \bar{l}(\gamma,\rho)n^{-2\rho/(1-2\rho)}.$$

□

定理2.3的证明: 定理的证明类似于Ferreira, A. (2002b), 我们这里只给出简单证明. 设$k_{0,1}$满足

$$k_{0,1} = \arg\inf_k \mathsf{E}(\widehat{x}_{n,1}(k) - \widehat{x}_{n,2}(k))^2 I(|\widehat{x}_{n,1}(k) - \widehat{x}_{n,2}(k)| \le k^{\delta-1/2}), \qquad \delta > 0,$$

则从Draisma et al. (1999)的定理3.3的证明, 我们立即可以得到, 当$n \to \infty$时, $k_{0,1}/\overline{k}_0(n) \to 1$和

$$\frac{\mathsf{E}(\widehat{x}_{n,1}(k_{0,1}) - \widehat{x}_{n,2}(k_{0,1}))^2 I(|\widehat{x}_{n,1}(k_{0,1}) - \widehat{x}_{n,2}(k_{0,1})| \le k_{0,1}^{\delta-1/2})}{\text{a.s.}\mathsf{E}(\widehat{x}_{n,1}(\overline{k}_0) - \widehat{x}_{n,2}(\overline{k}_0))^2} \to 1$$

成立. 因此定理2.3成立. □

定理2.4的证明: 对于自助估计量, 给定$\mathcal{X}_n := \{X_1, X_2, \cdots, X_n\}$, 注意到

$$M_{n_1}^{(1)*}(k_1) \stackrel{d}{=} \frac{1}{k_1}\sum_{i=1}^{k_1} \log U_n(Y_{n_1,n_1-i+1}) - \log U_n(Y_{n_1,n_1-k_1}).$$

在引理3.5中, 将(3.1)换成Draisma et al. (1999)的引理5.3, 我们就可以得到

$$\frac{M_{n_1}^{(1)*}(k_1)}{a(Y_{n_1,n_1-k_1})/U(Y_{n_1,n_1-k_1})} = 1 + P_{n_1} + d_1 A\Big(\frac{n_1}{k_1}\Big) + o_p\Big(A\Big(\frac{n_1}{k_1}\Big)\Big) + O_p\Big(\frac{\sqrt{n_1/k_1}\log n}{\sqrt{n}}\Big).$$

注意到$\sqrt{n_1/k_1}\log n/\sqrt{n} = o(1/\sqrt{k_1})$, 因此, 我们得到在给定$\mathcal{X}_n$时, $M_{n_1}^{(1)*}(k_1)$与$M_{n_1}^{(1)}(k_1)$有相同的展开式. 同理, 对$M_{n_1}^{(2)*}(k_1)$, 我们有相同的结果. 所以, 当我们将定理2.1、定理2.2、定理2.3中的n替换成n_1和n_2时, 相应的定理仍然成立. 因此, 定理2.4的结论成立. □

推论2.2的证明: 由定理2.2、定理2.3, 我们立即有推论2.2成立. □

定理2.5的证明: 对$\overline{k}_0^*(n_1)$和$\overline{k}_0^*(n_2)$, 使用推论2.2即可得定理2.5成立. □

推论2.3的证明: 由定理2.1、定理2.2、定理2.3、定理2.5, 我们立即有推论2.3成立. □

定理2.6的证明: 由推论2.3, 我们只须说明(2.18)的$\widehat{\rho}_n$为ρ的相合估计即可. 事实上, 由定理2.4, 我们有$\overline{k}_0^*(n_1) \in \mathcal{R}_{-2\rho/(1-2\rho)}$ (in Probability). 因此

$$\log \overline{k}_0^*(n_1)/\log n_1 \xrightarrow{p} \frac{-2\rho}{1-2\rho}$$

(参见Geluk and De Haan (1987)命题1.7.1), 即

$$\frac{\log \overline{k}_0^*(n_1)}{2(\log \overline{k}_0^*(n_1) - \log n_1)} \xrightarrow{p} \rho.$$

这就证明了相合性. 也就得到了定理2.6的结论. □

参 考 文 献

[1] Bermudez, P.D.Z., Turkman, M.A. and Turkman, K.F., A predictive approach to tail probability estimation, *Extremes*, **4(4)**(2001), 295–314.

[2] Danielsson, J. and De Vries, C.G., Beyond the sample: extreme quantile and probability estimation, *Technical Report*, Tinbergen Institute, Rotterdam, 1997.

[3] De Haan, L. and Rootzén, K., On the estimation of high quantiles, —it J. of Statistical Planning and Inference, **35**(1993), 1–13.

[4] Dekkers, A.L.M., Einmahl, J.H.J. and De Haans, L., A moment estimator for the index of an extreme-value distribution, *Ann. Statist.*, **17(4)**(1989), 1833–1855.

[5] Draisma, G. and Pereira, T.T. A bootstrap-based method to achieve optimality in estimating the extreme-value index, *Extremes*, **2(4)**(1999), 367–404.

[6] Einmahl, J.H.J., The empirical distribution function as a tail estimator, *Statist. Neerlandica*, **44**(1990), 79–82.

[7] Ferreira, A., Optimal asymptotic estimation of small exceedance probabilities, *J. of Statistical Planning and Inference*, **104**(2002a), 83–102.

[8] Ferreira, A., de Haan, L. and Peng, L., On optimising the estimation of high quantiles of a probability distribution, *Statistics*, **37**(2003), 401–434.

[9] Geluk, J. and De Hall, L., Regular variation extensions and tauberian theorems, *Technical Report CWI Tract 40*, CWI, Amsterdam, 1987.

On Optimising the Estimation of Extreme Value Quantiles of a Probability Distribution

Ouyang Zisheng[1,2] Yang Xiangqun[1] Chen Neiping[2]

([1] *College of Mathematics and Computer Science, Hunan Normal University, Changsha, 410081*)

([2] *Information Department of Hunan University of Commerce, Changsha, 410205*)

In this paper, a new extreme value quantile estimator is given and its limit properties are discussed. Under the asymptotic second moment principle, recurring to sub-sample bootstrap method, the optimality problem of sample fraction in extreme value quantile estimation is solved, and the limit properties are proved. We prove our sample fraction is optimal under the asymptotic second moment principle, also an adaptive bootstrap procedure is given.

Keywords: Extreme value quantile, extreme value index, bootstrap.

AMS Subject Classification: 62G32.