《应用概率统计》版权所有

应用简报

混合ARCH模型及其应用

徐光林

(交通银行、中国人民大学博士后工作站, 上海, 200120)

韩　清

(上海社会科学院数量经济研究中心, 上海, 200020)

摘　要

本文利用可以拟合尖峰、厚尾、有偏序列的混合ARCH模型计算VaR, 给出了VaR的数值算法, 并用上证A指的实际数据对基于混合ARCH模型的VaR做了实证分析, 显著提高了VaR度量风险的有效性.

关键词: 混合ARCH模型, EM算法, GARCH模型, VaR.

学科分类号: F790.35.

§1. 引　　言

很多金融理论都以资产收益率服从正态分布假设为基础, 这往往与实际不符. 近年来, 越来越多的实证研究表明实测数据的尾部往往厚于正态分布的尾部, 实测数据的分布呈现出幂衰减, 而不是像正态分布下的指数式衰减. 资产收益率的无条件分布和条件分布常常呈现出尖峰厚尾、有偏、多体制等共同特征, 而且条件分布往往还具有异方差性.

金融数据的产生过程常常受多种因素的影响. 例如对于股票数据而言, 不同日期的股价变动的主要原因是不一样的(如宏观政策的影响, 企业的信息, 庄家的操纵等). 某些数据主要受某一因素的影响, 而另一些数据可能主要是受另一种因素的影响, 我们得到的数据是它们的混合. Wong和Li[1]提出了混合ARCH模型, 其实质正是将现有数据视为来自于K个不同体制的ARCH模型数据的混合, 这与金融数据的产生机制是相符的.

由K个成份组成的混合ARCH模型定义如下:

$$\begin{aligned} &F(r_t|\psi_{t-1}) = \sum_{k=1}^{K} \alpha_k \Phi\Big(\frac{e_{k,t}}{\sqrt{h_{k,t}}}\Big), \qquad (1.1)\\ &e_{k,t} = r_t - \phi_{k0} - \phi_{k1} r_{t-1} - \cdots - \phi_{kp_k} r_{t-p_k},\\ &h_{k,t} = \beta_{k0} + \beta_{k1} e_{k,t-1}^2 + \cdots + \beta_{kq_k} e_{k,t-q_k}^2 \qquad (t = 1, \cdots, n). \end{aligned}$$

本文2005年11月18日收到, 2007年1月18日收到修改稿.

将模型记作: $\mathrm{MAR}-\mathrm{ARCH}(K;p_1,p_2,\cdots,p_K;q_1,q_2,\cdots,q_K)$. 其中, $F(\cdot|\cdot)$表示条件分布函数, ψ_{t-1}表示直到$t-1$时刻的信息集, $\Phi(\cdot)$表示标准正态分布的分布函数, $\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_K=1$ $(\alpha_k>0,\ k=1,2,\cdots,K)$, $\beta_{k0}>0$, $\beta_{k,j}\geq 0$ $(j=1,2,\cdots,q_k)$.

Wong和Li[1]指出: $\mathrm{MAR}-\mathrm{ARCH}$模型可以拟合尖峰、厚尾、有偏序列, 并可以用EM算法结合Newton-Raphson算法求出(1.1)式中参数$(\alpha_k,\phi_{k,i},\beta_{k,i})$的极大似然估计, 用BIC准则辅助确定模型的阶数$(p_1,p_2,\cdots,p_K;q_1,q_2,\cdots,q_K)$.

VaR (Value-at-Risk)是度量资产所面临市场风险大小的一种有用工具, Jorion[2]认为: VaR是在给定损失概率(p)和目标时段下资产的预期最大损失(或最坏情况下的损失). VaR对风险度量的准确程度完全取决于描述资产行为的模型, 因此本文利用混合ARCH模型计算VaR, 给出了VaR的数值算法, 并用上证A指的实际数据对基于混合ARCH模型的VaR做了实证分析, 显著提高了VaR度量风险的有效性.

§2. 基于混合ARCH模型的VaR

资产组合或持有头寸为多天的VaR可以由单个资产持有头寸为一天的VaR计算得到, 因此下面我们仅仅考虑单个资产持有头寸为一天的VaR. 假设某资产收益率的条件分布服从$\mathrm{MAR}-\mathrm{ARCH}(K;p_1,p_2,\cdots,p_K;q_1,q_2,\cdots,q_K)$模型, 我们的目的是要计算左尾概率为$p$, 持有长期头寸为一天的VaR, 即$\mathrm{VaR}=F^{-1}(p)$. 由于混合分布没有现成的分布表, 所以我们不能通过查表的方式求出VaR. 但是, 可以通过以下简单的数值计算求出混合分布的分位数.

设在第t期, r_t的下侧p-分位数为$d_{i,t}$, 则

$$d_{i,t}=\mu_{i,t}+\sqrt{h_{i,t}}\Phi^{-1}(p)\qquad (i=1,2,\cdots,K). \tag{2.1}$$

令$d_{\min,t}=\min\limits_{1\leq i\leq K}(d_{i,t})$, $d_{\max,t}=\max\limits_{1\leq i\leq K}(d_{i,t})$, 则

$$F(d_{\min,t}|\psi_{t-1})=\sum_{i=1}^{K}\alpha_i\Phi\Big(\frac{d_{\min,t}-\mu_{i,t}}{\sqrt{h_{i,t}}}\Big)\leq\sum_{i=1}^{K}\alpha_i\Phi\Big(\frac{d_{i,t}-\mu_{i,t}}{\sqrt{h_{i,t}}}\Big)=\sum_{i=1}^{K}\alpha_i p=p,$$
$$F(d_{\max,t}|\psi_{t-1})=\sum_{i=1}^{K}\alpha_i\Phi\Big(\frac{d_{\max,t}-\mu_{i,t}}{\sqrt{h_{i,t}}}\Big)\geq\sum_{i=1}^{K}\alpha_i\Phi\Big(\frac{d_{i,t}-\mu_{i,t}}{\sqrt{h_{i,t}}}\Big)=\sum_{i=1}^{K}\alpha_i p=p.$$

所以$d_{\min,t}\leq F^{-1}(p)\leq d_{\max,t}$, 即$d_{\min,t}\leq\mathrm{VaR}\leq d_{\max,t}$. 设精度为$\varepsilon$ $(\varepsilon>0)$, 则我们可以通过如下步骤找到满足精度要求的VaR:

(1) 记$d_m=(d_{\min}+d_{\max})/2$. 如果$|F(d_m)-p|<\varepsilon$, 则$\mathrm{VaR}=d_m$; 否则, 执行步骤(2).

(2) 如果$F(d_m)<p$, 则令$d_{\min}=d_m$; 如果$F(d_m)>p$, 则令$d_{\max}=d_m$. 再回到步骤(1). 如此反复, 直到找到d_m使得$|F(d_m)-p|<\varepsilon$为止, 则满足精度要求的$\mathrm{VaR}=d_m$.

《应用概率统计》版权所有

§3. 上证A指VaR的实证研究

我们用1997年1月2日到2003年7月1日上证A指的收盘价作为样本, 共1541个数据, 数据全部来源于证券之星网站(www.stockstar.com). 在下面的实证分析中, 用日收盘价的对数收益率序列作为分析对象. 假定$r_t \sim \text{MAR}-\text{ARCH}(2; p_1, p_2; q_1, q_2)$, 其中$0 \le p_1, p_2, q_1, q_2 \le 2$. 我们用EM算法结合Newton-Raphson算法在SAS8.2中编程计算了参数的极大似然估计, 根据BIC准则应该选用阶为$(1, 1; 2, 2)$的混合ARCH模型, 去掉不显著参数, 重新估计模型得参数的估计结果如下:

$$F(r_t|\psi_{t-1}) = \underset{(7.45)^{1}}{0.2657}\Phi\Big(\frac{e_{1t}}{\sqrt{h_{1t}}}\Big) + 0.7343\Phi\Big(\frac{e_{2t}}{\sqrt{h_{2t}}}\Big), \tag{3.1}$$

$$e_{1t} = r_t + \underset{(2.43)}{0.002474}, \qquad h_{1t} = \underset{(8.09)}{0.000311} + \underset{(3.97)}{0.9163}e^2_{1,t-1} + \underset{(2.95)}{0.7253}e^2_{1,t-2},$$

$$e_{2t} = r_t - \underset{(-2.06)}{0.000725}, \qquad h_{2t} = \underset{(10.03)}{0.000067} + \underset{(4.73)}{0.1576}e^2_{2,t-1}.$$

在5%的显著性水平下, 所有的被估参数都是显著的, 即$r_t \sim \text{MAR} - \text{ARCH}(2; 0, 0; 2, 1)$.

基于正态分布和t分布的GARCH及IGARCH模型与$\text{MAR} - \text{ARCH}(2; 0, 0; 2, 1)$模型对样本数据拟合的比较结果如表1:

表1 落入中间区间的样本点百分比与理论百分比各模型之比较

模型	$(1-a)100\%$				
	90	80	70	60	50
$\text{MAR} - \text{ARCH}(2; 0, 0; 2, 1)$	90.96	79.97	70.68	60.53	50.78
$\text{GARCH}(1, 1) - N$	90.89	83.88	76.80	68.55	58.72
$\text{GARCH}(1, 1) - t$	91.81	84.40	77.98	69.86	59.57
$\text{IGARCH}(1, 1) - N$	91.35	84.01	76.93	69.13	59.31

表1给出了去掉分布左右两边各$\alpha/2$的概率后, 各模型对分布中间部分拟合优劣的比较结果. 从表1中可以看出: 四个模型都较好地拟合了样本数据, 但是$\text{MAR} - \text{ARCH}(2; 0, 0; 2, 1)$模型使得落入中间区间的样本点百分比与理论百分比更加接近, 较之GARCH和IGARCH模型更好地拟合了位于分布中间部分的数据.

基于MAR－ARCH(2;0,0;2,1)模型, 损失概率为5%, 时间间隔为一天的动态VaR图如图1.

[1] t-分布检验统计量的观测值.

《应用概率统计》版权所有

从图1中我们直观上可以看出: 基于$MAR-ARCH(2;0,0;2,1)$模型的一天动态VaR, 很好地体现了上证A指日对数收益率的波动性. 另外, 从GARCH类模型相应的一天动态VaR结果来看[2], 虽然也能较好的反映数据的波动性, 但是比混合ARCH模型的动态VaR图平滑得多, 这表明GARCH类模型未能及时捕捉到来自数据的细微波动.

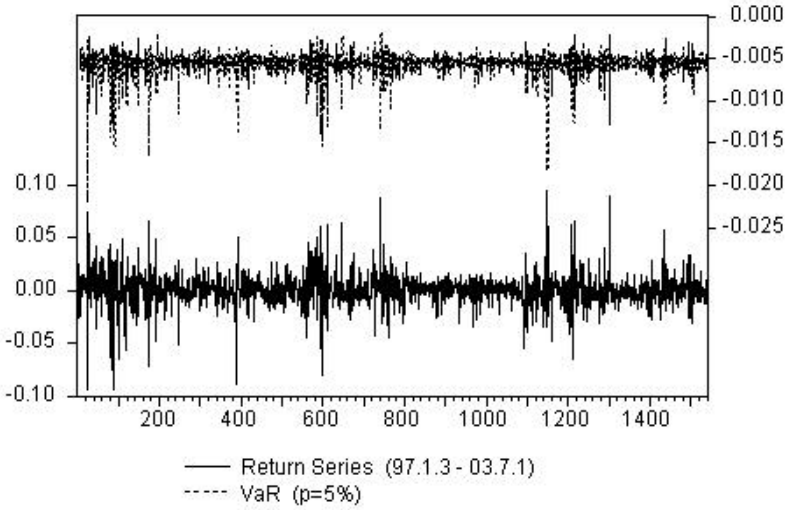


图1　上证A指日对数收益率(97.1.3–03.7.1)和一天动态VaR图

Kupiec[3]提出用似然比法检验VaR的有效性, 表2给出了损失超过由各模型计算的VaR值的实际样本点个数及Kupiec检验的p值, 反映了基于各模型的VaR对实际风险估计的准确性, 也反映了各模型对分布尾部的拟合效果.

表2　损失超过VaR的样本点个数及Kupiec检验结果各模型之比较

模型	左尾损失概率		
	0.10%	1.00%	5.00%
$MAR-ARCH(2;0,0;2,1)$	3 (0.2793)[3]	14 (0.7195)	72 (0.5624)
$GARCH(1,1)-N$	10 (0)	23 (0.0640)	83 (0.4375)
$GARCH(1,1)-t$	2 (0.7142)	6 (0.0066)	34 (0)
$IGARCH(1,1)-N$	10 (0)	22 (0.1038)	79 (0.7525)

[2]鉴于篇幅所限, 在此不能报告GARCH类模型估计结果和动态VaR图, 读者如有需要可与作者联系.
[3] Kupiec检验的p值.

《应用概率统计》版权所有

在表2中, 我们使用的样本容量为1541, 当左尾损失概率分别为0.1%、1%、5%时, 损失超过VaR值的理论样本点个数应分别为2、15、77. 从表2可以看出: GARCH$(1,1)-N$存在着严重低估风险的倾向; 当损失概率较小时, IGARCH$(1,1)-N$模型也存在着严重低估风险的倾向; 当损失概率较大时, GARCH$(1,1)-t$存在着严重高估风险的倾向; 只有MAR $-$ ARCH$(2;0,0;2,1)$模型恰当地估计了风险值VaR. Kupiec检验的结果进一步证实了这一点, 在5%的显著性水平下只有MAR $-$ ARCH$(2;0,0;2,1)$全部接受了原假设, 其他GARCH类模型都有拒绝原假设的情形, 表明GARCH类模型在某些损失概率下估计的风险值VaR与实际风险大小差别较大.

从表1和表2的分析中我们不难看出, 无论是在对分布中间部分数据的拟合上, 还是在对分布尾部数据的拟合上, 混合ARCH模型都比基于正态分布和t分布的GARCH、IGARCH模型表现得更好, 因此我们有理由期待基于混合ARCH模型的VaR能在今后的风险管理和控制中得到运用.

参 考 文 献

[1] Wong, C.S. and Li, W.K., On a mixture autoregressive conditional heteroscedastic model, *Journal of American Statistical Association*, **96**(2001), 982–995.

[2] Jorion, P., *Value at Risk: the New Benchmark for Managing Financial Risk*, McGraw-Hill, New York, second edition, 2001.

[3] Kupiec, P., Technique for verifying the accuracy of risk measurement models, *Journal of Derivative*, **3**(1995), 73–84.

[4] Wong, C.S. and Li, W.K., On a mixture autoregressive model, *Journal of Royal Statistical Society*, **62**(2000), 95–115.

《应用概率统计》版权所有