应用概率统计　第二十四卷
第六期　2008年12月

Chinese Journal of Applied Probability
and Statistics Vol.24 No.6 Dec. 2008

半鞅序列积分误差的极限过程的收敛定理 *

肖小庆
(南通大学理学院, 南通, 226007)

谢颖超
(徐州师范大学数学科学学院, 徐州, 221116)

摘　要

Jacod, Jakubowski和Mémin讨论了与单个独立增量过程X的误差过程${}^nX = X_t - X_{[nt]/n}$相关的积分误差过程$Y^n(X)$和$Z^{n,p}(X)$, 研究了半鞅序列$\{(nY^n(X), nZ^{n,p}(X))\}_{n\ge1}$的极限定理. 记半鞅序列$\{(nY^n(X), nZ^{n,p}(X))\}_{n\ge1}$的极限过程为$(Y(X), Z^p(X))$, Jacod等给出了其极限过程$(Y(X), Z^p(X))$的表达式. 本文将研究半鞅序列$\{X^n\}_{n\ge1}$积分误差的极限过程$Y(X^n)$和$Z^p(X^n)$的收敛定理, 主要研究半鞅序列$\{(X^n, Y(X^n), Z^p(X^n))\}_{n\ge1}$的依分布弱收敛和依分布稳定收敛.

关键词: 半鞅, 极限定理, 积分误差过程, 依分布弱收敛, 依分布稳定收敛.

学科分类号: O211.4.

§1. 符号和定义

随机过程极限定理[1–7]是近代概率论的重要分支之一. 自Yu.V. Prokhorov和A.V. Skorokhod在1956年先后发表他们的著名论文[5]和[6]后, 随机过程极限定理的研究得到了飞速的发展. 半鞅理论和随机分析[8]的兴起给这一理论注入了崭新的内容和研究方法. 这一时期的主要成果已总结在[2]中. 2003年, Jacod, Jakubowski和Mémin在[9]中讨论了与单个独立增量过程X的误差过程${}^nX = X_t - X_{[nt]/n}$相关的积分误差过程$Y^n(X)$和$Z^{n,p}(X)$, 研究了半鞅序列$\{(nY^n(X), nZ^{n,p}(X))\}_{n\ge1}$的极限定理, 并且给出了其极限过程$(Y(X), Z^p(X))$的表达式. 我们将利用鞅方法, 在半鞅序列$\{X^n\}_{n\ge1}$的极限存在的条件下, 研究其积分误差的极限过程$Y(X^n)$及$Z^p(X^n)$的收敛定理, 记半鞅序列$\{(nY^n(X),\ nZ^{n,p}(X))\}_{n\ge1}$的极限过程为$(Y(X), Z^p(X))$, 则Jacod等也给出了其极限过程$(Y(X), Z^p(X))$的表达式. 同时, Jacod在[1]中也研究了条件独立增量过程和随机过程序列的依分布稳定收敛性. 本文将在半鞅序列$\{X^n\}_{n\ge1}$的极限存在的条件下, 研究其积分误差的极限过程$Y(X^n)$及$Z^p(X^n)$的极限定理, 具体安排为: 第一节给出一些符号和定义; 第二节假设半鞅序列$\{X^n\}_{n\ge1}$为独立增量过程, 给出了半鞅序列$\{(X^n, Y(X^n), Z^p(X^n))\}_{n\ge1}$依分布弱收敛的条件; 最后, 对于一般半鞅序列$\{X^n\}_{n\ge1}$, 得到了$\{(X^n, Y(X^n), Z^p(X^n))\}_{n\ge1}$依分布稳定收敛到条件独立增量半鞅$(X, Y(X), Z^p(X))$的充分条件.

*国家自然科学基金(10671168), 江苏省自然科学基金(BK2006032), 江苏省"333工程"基金和江苏省"六大人才高峰"基金(06-A-038)资助课题, 南通大学人才引进基金资助项目(03080042).

本文2004年10月10日收到, 2008年3月2日收到修改稿.

设X为$\mathbf{R}^d$-值半鞅, h为截尾函数, 即存在常数a, b $(0<a<b)$, 使得$h(x)=x$, $|x|\leq a$, $h(x)=0$, $|x|>b$. 定义

$$\widehat{X}(h)_t=\sum_{s\leq t}[\Delta X_s-h(\Delta X_s)],\qquad X(h)=X-\widehat{X}(h),$$

则$\widehat{X}(h)$是右连续的有限变差$\mathbf{R}^d$-值过程. 由$\Delta X(h)=h(\Delta X)$有界可知$X(h)$是特殊半鞅, 设其典则分解为

$$X(h)=X_0+M(h)+B(h),$$

其中$M(h)$是$\mathbf{R}^d$-值局部可积鞅, $B(h)$是$\mathbf{R}^d$-值有限可料变差过程.

设h为截尾函数, 称三元组(B,C,ν)为半鞅X关于h的可料特征, 当h明确时, 称为X的可料特征, 如果

(i) $B=B(h)$;

(ii) $C=\langle X^c\rangle$为$\mathbf{R}^{d\times d}$-值连续过程, C_t-C_s $(t>s)$取$\mathbf{R}^{d\times d}$-值非负定对称过程, 其中X^c为X的连续鞅部分;

(iii) ν是X的跳测度$\mu(\mathrm{d}t,\mathrm{d}x)=\sum\limits_{s>0}I_{\{\Delta X_s\neq0\}}\mathcal{E}_{(s,\Delta X_s)}(\mathrm{d}t,\mathrm{d}x)$的可料对偶投影.

设X^n及X分别为概率空间$(\Omega^n,\mathcal{F}^n,\mathsf{P}^n)$及$(\Omega,\mathcal{F},\mathsf{P})$上的$\mathbf{E}$-值随机变量, $L(X^n)=\mathsf{P}^n(X^n)^{-1}\in\mathbf{P}(\mathbf{E})$及$L(X)=\mathsf{P}X^{-1}\in\mathbf{P}(\mathbf{E})$分别称为$X^n$及$X$的分布, 如果$L(X^n)$收敛到$L(X)$, 则称$X^n$依分布收敛到$X$, 记为$X^n\xrightarrow{L}X$, 其中$\mathbf{P}(\mathbf{E})$为$\mathbf{E}$上概率测度的全体.

设$\mathbf{E}$为一Polish空间, $\{X^n\}_{n\geq1}$为定义在概率空间$(\Omega,\mathcal{F},\mathsf{P})$上的$\mathbf{E}$-值随机变量序列, X为定义在$(\Omega,\mathcal{F},\mathsf{P})$的扩张空间$(\widetilde{\Omega},\widetilde{\mathcal{F}},\widetilde{\mathsf{P}})$上的$\mathbf{E}$-值随机变量, 若对任意有界连续函数$f:\mathbf{E}\to\mathbf{R}$及任意有界可测随机变量$U$, 有

$$\lim_n\mathsf{E}[Uf(X^n)]=\widetilde{\mathsf{E}}[Uf(X)],$$

则称$\{X^n\}_{n\geq1}$按分布稳定收敛到X, 记为$X^n\xrightarrow{\text{stably}}X$.

注 显然按分布稳定收敛隐含了按分布收敛.

设$(\Omega,\mathcal{F},\mathcal{F}_t,\mathsf{P})$为一概率空间, N为$(\Omega,\mathcal{F},\mathcal{F}_t,\mathsf{P})$上的任意鞅, X为$(\Omega,\mathcal{F},\mathcal{F}_t,\mathsf{P})$上的半鞅, 如果存在$V$及$U$分别为可料过程及$\Omega\times\mathbf{R}_+\times\mathbf{R}$上的可料函数, 使得$N$可表示成:

$$N_t=N_0+\int_0^tV_s\mathrm{d}X_s^c+\int_0^t\int_{\mathbf{R}}U(s,x)(\mu-\nu)(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x),$$

则称X具有鞅表示性, 其中μ为X的跳测度, ν为μ的可料对偶投影.

设半鞅X的可料特征为(B,C,ν), 如果存在过程$b_s(\omega)$和$c_s(\omega)$, 以及转移测度$F_s(\omega,\mathrm{d}x)$使得

$$\begin{cases}B_t(w)=\displaystyle\int_0^tb_s(w)\mathrm{d}s,\qquad C_t(w)=\int_0^tc_s(w)\mathrm{d}s,\\ \nu(w,\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)=\mathrm{d}s\times F_s(w,\mathrm{d}x).\end{cases}\tag{1.1}$$

则称(B,C,ν)具有因式分解性质.

§2. 依分布弱收敛

本节我们将讨论独立增量半鞅序列情形下的依分布收敛性. 为了记号简单, 我们只讨论一维情形, 对于高维情形类似可以讨论.

设X是半鞅, 对$n\geq 1$, 记

$$\begin{aligned}
&{}^n\widetilde{X}_t = X_{[nt]/n}, && {}^nX_t = X_t - {}^n\widetilde{X}_t,\\
&Y^n(X)_t = \int_0^t {}^nX_s\mathrm{d}s, && Z^{n,p}(X)_t = \int_0^t |\,{}^nX_s|^p\mathrm{d}s,\\
&\widetilde{Y}^n(X)_t = nY^n(X)_{[nt]/n}, && \widetilde{Z}^{n,p}(X)_t = nZ^{n,p}(X)_{[nt]/n}.
\end{aligned}$$

若X是具有鞅表示性的独立增量半鞅, 并且其可料特征具有因式分解性质, Jacod, Jakubowski和Mémin在[9]中证明了如下结果: 在下列三种情形下, 半鞅序列$(\widetilde{Y}^n(X), \widetilde{Z}^{n,p}(X))$依分布稳定收敛于$(Y(X), Z^p(X))$,

(i) $p\geq 2$;

(ii) $1<p<2$, $C=0$, 并且

$$\int_0^t\int_{|x|\leq 1}|x|^p\nu(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)<\infty; \tag{2.1}$$

(iii) $0<p\leq 1$, $C=0$, (2.1)成立, 并且

$$B_t=\int_0^t\int_{\mathbf{R}}h(x)\nu(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x), \tag{2.2}$$

其中

$$\begin{aligned}
Y(X)_t &= \frac{1}{2}B_t+\frac{1}{2}X_t^c+\frac{1}{\sqrt{12}}\int_0^t\sqrt{c_s}\mathrm{d}W_s\\
&\quad+\int_0^t\int_{\mathbf{R}}\int_{[0,1]}uh(x)(\widehat{\mu}-\widehat{\nu})(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x,\mathrm{d}u)\\
&\quad+\int_0^t\int_{\mathbf{R}}\int_{[0,1]}u(x-h(x))\widehat{\mu}(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x,\mathrm{d}u),
\end{aligned}\tag{2.3}$$

$$Z^p(X)_t = \begin{cases}\dfrac{1}{2}C_t+\displaystyle\int_0^t\int_{\mathbf{R}}\int_{[0,1]}ux^2\widehat{\mu}(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x,\mathrm{d}u), & p=2,\\ \displaystyle\int_0^t\int_{\mathbf{R}}\int_{[0,1]}u|x|^p\widehat{\mu}(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x,\mathrm{d}u), & p\neq 2,\end{cases}\tag{2.4}$$

W是与X独立的标准Brown运动, 截尾函数$h(x)$满足$h(x)=x$, $|x|\leq 1$; $h(x)=0$, $|x|>2$.

$$\widehat{\mu}(\mathrm{d}t,\mathrm{d}x,\mathrm{d}u)=\sum_{s>0}I_{\{\Delta X_s\neq 0\}}\varepsilon_{(s,\Delta X_s,U_s)}(\mathrm{d}t,\mathrm{d}x,\mathrm{d}u),$$

U_s为$[0,1]$上服从均匀分布且与X独立的随机变量, $\widehat{\nu}(\mathrm{d}t,\mathrm{d}x,\mathrm{d}u)$是$\widehat{\mu}(\mathrm{d}t,\mathrm{d}x,\mathrm{d}u)$的可料对偶投影, 可以计算$\widehat{\nu}(\mathrm{d}t,\mathrm{d}x,\mathrm{d}u)=\nu(\mathrm{d}t,\mathrm{d}x)\mathrm{d}u$.

定理 2.1 设X和X^n均为$(\Omega,\mathcal{F},\{\mathcal{F}_t\},\mathsf{P})$上的独立增量半鞅, 其可料特征分别为$(B^n, C^n,\nu^n)$和$(B,C,\nu)$, X没有固定不连续点. D为$\mathbf{R}_+$上的稠密子集, X^n, X均具有鞅表示性, (B^n,C^n,ν^n)及(B,C,ν)均具有因式分解性质并且设$C_t=\int_0^t c_s\mathrm{d}s$, $C_t^n=\int_0^t c_s^n\mathrm{d}s$, B满足(2.2)并且B^n满足$B_t^n=\int_0^t\int_{\mathbf{R}}h(x)\nu^n(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)$. 如果

(a) $\forall\, t\in D$, $C_t^n\to C_t$.

(b) $\nu^n\xrightarrow{W}\nu$.

则在下列三种情形下$(X^n,Y(X^n),Z^p(X^n))\xrightarrow{L}(X,Y(X),Z^p(X))$.

(i) $p\geq 2$, 并且对于任意的$N>0$,

$$\lim_{q\to\infty}\int_0^N\int_{\mathbf{R}}|x|^pI_{\{|x|\geq q\}}\nu^n(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)\to 0, \tag{2.5}$$

$$\lim_{q\to\infty}\int_0^N\int_{\mathbf{R}}|x|^pI_{\{|x|\geq q\}}\nu(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)\to 0. \tag{2.6}$$

(ii) $1<p<2$, $C=C^n=0$, 并且对于任意的$N>0$,

$$\lim_{q\to\infty}\int_0^N\int_{\mathbf{R}}|x|^2I_{\{|x|\geq q\}}\nu^n(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)\to 0, \tag{2.7}$$

$$\lim_{q\to\infty}\int_0^N\int_{\mathbf{R}}|x|^2I_{\{|x|\geq q\}}\nu(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)\to 0. \tag{2.8}$$

(iii) $0<p\leq 1$, $C=C^n=0$, 并且对于任意的$N>0$, (2.1)和(2.2)成立.

其中

$$\begin{aligned}Y(X^n)_t &= \frac{1}{2}B_t^n+\frac{1}{2}X_t^{n,c}+\frac{1}{\sqrt{12}}\int_0^t\sqrt{c_s^n}\mathrm{d}W_s^n\\ &\quad+\int_0^t\int_{\mathbf{R}}\int_{[0,1]}uh(x)(\widehat{\mu}^n-\widehat{\nu}^n)(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x,\mathrm{d}u)\\ &\quad+\int_0^t\int_{\mathbf{R}}\int_{[0,1]}u(x-h(x))\widehat{\mu}^n(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x,\mathrm{d}u),\end{aligned} \tag{2.9}$$

$$Z^p(X^n)_t = \begin{cases}\dfrac{1}{2}C_t^n+\displaystyle\int_0^t\int_{\mathbf{R}}\int_{[0,1]}ux^2\widehat{\mu}^n(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x,\mathrm{d}u), & p=2,\\ \displaystyle\int_0^t\int_{\mathbf{R}}\int_{[0,1]}u|x|^p\widehat{\mu}^n(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x,\mathrm{d}u), & p\neq 2,\end{cases} \tag{2.10}$$

标准Brown运动W^n与X^n独立,

$$\widehat{\mu}^n(\mathrm{d}t,\mathrm{d}x,\mathrm{d}u)=\sum_{s>0}I_{\{\Delta X_s^n\neq 0\}}\varepsilon_{(s,\Delta X_s^n,U_s)}(\mathrm{d}t,\mathrm{d}x,\mathrm{d}u),$$

U_s为$[0,1]$上服从均匀分布且与X^n独立的随机变量, $\widehat{\nu}^n(\mathrm{d}t,\mathrm{d}x,\mathrm{d}u)$是$\widehat{\mu}^n(\mathrm{d}t,\mathrm{d}x,\mathrm{d}u)$的可料对偶投影, 即$\widehat{\nu}^n(\mathrm{d}t,\mathrm{d}x,\mathrm{d}u)=\nu^n(\mathrm{d}t,\mathrm{d}x)\mathrm{d}u$.

证明: 因为X没有固定不连续点, 所以ν关于t连续, 从而有$\Delta B_t = 0$. 由Kasahara和Watanabe在[3]中的引理3.1可知由$\nu^n \xrightarrow{W} \nu$可推得

$$\sup_{s\le t} |B_s^n - B_s| \to 0, \qquad \forall\, t \ge 0 \tag{2.11}$$

和

$$\Delta B_t^n \to \Delta B_t = 0, \qquad \forall\, t \ge 0, \tag{2.12}$$

并且对于任意的$g \in \{g : g$是$\mathbf{R}$上的有界连续函数, 并且在0的某邻域内为0$\}$,

$$\int_0^t \int_{\mathbf{R}} g(x)\nu^n(\mathrm{d}s, \mathrm{d}x) \to \int_0^t \int_{\mathbf{R}} g(x)\nu(\mathrm{d}s, \mathrm{d}x), \qquad \forall\, t \in D. \tag{2.13}$$

条件(a), (2.12)和(2.13)表明

$$\widetilde{C}_t^n \to \widetilde{C}_t, \qquad \forall\, t \in D, \tag{2.14}$$

其中$\widetilde{C}_t^n = C_t^n + h^2 \cdot \nu_t^n - \sum\limits_{s\le t} (\Delta B_s^n)^2$, $\widetilde{C}_t = C_t + h^2 \cdot \nu_t$.

由(2.11), (2.13)和(2.14)可知Jacod和Shiryaev在[2]中的定理VII-3.4中的条件全部满足, 由此可推得$X^n \xrightarrow{L} X$.

对$q \ge 2$, 令

$$R_q = \Big\{x : \frac{1}{q} < x \le q\Big\},$$

并且定义

$$\begin{aligned} X(q)_t &= X_0 + B_t + X_t^c + \int_0^t \int_{\{|x|>1/q\}} h(x)(\mu-\nu)(\mathrm{d}s, \mathrm{d}x) \\ &\quad + \int_0^t \int_{\{|x|\le q\}} (x - h(x))\mu(\mathrm{d}s, \mathrm{d}x), \end{aligned} \tag{2.15}$$

$$\begin{aligned} Y(X(q))_t &= \frac{1}{2}B_t + \frac{1}{2}X_t^c + \frac{1}{\sqrt{12}}\int_0^t \sqrt{c_s}\mathrm{d}W_s \\ &\quad + \int_0^t \int_{\{|x|>1/q\}} \int_{[0,1]} uh(x)(\widehat{\mu} - \widehat{\nu})(\mathrm{d}s, \mathrm{d}x, \mathrm{d}u) \\ &\quad + \int_0^t \int_{\{|x|\le q\}} \int_{[0,1]} u(x - h(x))\widehat{\mu}(\mathrm{d}s, \mathrm{d}x, \mathrm{d}u), \end{aligned} \tag{2.16}$$

$$Z^p(X(q))_t = \begin{cases} \dfrac{1}{2}C_t + \displaystyle\int_0^t \int_{R_q} \int_{[0,1]} ux^2 \widehat{\mu}(\mathrm{d}s, \mathrm{d}x, \mathrm{d}u), & p = 2, \\ \displaystyle\int_0^t \int_{R_q} \int_{[0,1]} u|x|^p \widehat{\mu}(\mathrm{d}s, \mathrm{d}x, \mathrm{d}u), & p \ne 2. \end{cases} \tag{2.17}$$

并且用B^n, C^n, c^n, W^n, μ^n, ν^n, $\widehat{\mu}^n$, $\widehat{\nu}^n$代替(2.15)–(2.17)中的B, C, c, W, μ, ν, $\widehat{\mu}$, $\widehat{\nu}$类似可定义$X^n(q)$, $Y(X^n(q))$及$Z^p(X^n(q))$.

则对于任意的$N>0$, 由谢[6]的推论2.5, Kasahara和Watanabe在[3]中的引理3.1, 以及假设条件(a), (b), (2.5)–(2.8)可得

$$\sup_{t\le N}|X(q)_t-X_t|\xrightarrow{\mathsf{P}}0, \tag{2.18}$$

$$\sup_{t\le N}|Y(X(q))_t-Y(X)_t|\xrightarrow{\mathsf{P}}0, \tag{2.19}$$

$$\sup_{t\le N}|Z^p(X(q))_t-Z^p(X)_t|\xrightarrow{\mathsf{P}}0, \tag{2.20}$$

$$\sup_{t\le N}|Y(X^n(q))_t-Y(X^n)_t|\xrightarrow{\mathsf{P}}0, \tag{2.21}$$

$$\sup_{t\le N}|Z(X^n(q))_t-Z(X^n)_t|\xrightarrow{\mathsf{P}}0. \tag{2.22}$$

由定义知$Y(X)$和$Z^p(X)$的不连续点一定出现在X的不连续点处, 因此$Y(X)$和$Z^p(X)$没有固定不连续点. 因为

$$\begin{aligned}&(X^n,Y(X^n),Z^p(X^n))\\=\ &(X^n(q),Y(X^n(q)),Z^p(X^n(q)))\\&+(X^n-X^n(q),Y(X^n)-Y(X^n(q)),Z^p(X^n)-Z^p(X^n(q))),\end{aligned} \tag{2.23}$$

(2.23)及(2.18)–(2.22)表明: 如果半鞅序列$(X^n,Y(X^n),Z^p(X^n))$存在极限点, 则$(X(q),Y(X(q)),Z^p(X(q)))$是其唯一可能的极限点, 并且由Jacod和Shiryaev在[2]中的引理VI-3.32我们只要证明半鞅序列$(X^n,Y(X^n),Z^p(X^n))$是胎紧(Tight)的.

对任意固定的$q\in N$, 取截尾函数h'和h''如下:

$$\begin{aligned}&h'(x)=x,\quad |x|\le q, &&h'(x)=0,\quad |x|\ge q+1,\\&h''(x)=x,\quad |x|\le q^p, &&h''(x)=0,\quad |x|\ge q^p+1.\end{aligned}$$

类似Jacod, Jakubowski和Mémin在[9]中的计算可得$(X(q),Y(X(q)),Z^p(X(q)))$关于截尾函数$\overline{h}=(h,h',h'')$的可料特征$(\widehat{B},\widehat{C},\eta)$为:

$$\widehat{B}=\begin{pmatrix}B\\B'\\B''\end{pmatrix},\qquad \widehat{C}=\begin{pmatrix}C&C/2&0\\C/2&C/3&0\\0&0&0\end{pmatrix}, \tag{2.24}$$

其中

$$\begin{aligned}B'_t&=\frac12B_t+\int_0^t\int_{R_q}\int_{[0,1]}(x-h(x))u\widehat{\nu}(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x,\mathrm{d}u)\\&=\frac12B_t+\frac12\int_0^t\int_{R_q}(x-h(x))\nu(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x),\end{aligned} \tag{2.25}$$

$$
\begin{aligned}
B_t'' &= \begin{cases} \frac{1}{2}C_t + \int_0^t \int_{R_q}\int_{[0,1]} x^2 u\widehat{\nu}(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x,\mathrm{d}u), & p=2 \\ \int_0^t \int_{R_q}\int_{[0,1]} |x|^p u\widehat{\nu}(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x,\mathrm{d}u), & p\neq 2 \end{cases} \\
&= \begin{cases} \frac{1}{2}C_t + \frac{1}{2}\int_0^t \int_{R_q} x^2 \nu(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x), & p=2 \\ \frac{1}{2}\int_0^t \int_{R_q} |x|^p \nu(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x), & p\neq 2 \end{cases}
\end{aligned} \tag{2.26}
$$

和

$$
\eta([0,t]\times A) = \int_0^t \int_{\mathbf{R}}\int_{[0,1]} I_A(xI_{R_q}(x), uxI_{R_q}(x), u|x|^p I_{R_q}(x))\widehat{\nu}(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x,\mathrm{d}u), \tag{2.27}
$$

$(X(q),Y(X(q)),Z^p(X(q)))$的跳测度为

$$
\begin{aligned}
\overline{\eta}([0,t]\times A) &= \sum_{s>0} I_{\{\xi(s,p,q)\neq 0\}}\mathcal{E}_{(s,\xi(s,p,q),U_s)}([0,t]\times A\times[0,1]) \\
&= \sum_{s>0} I_{\{\Delta X(q)_s\neq 0\}}\mathcal{E}_{(s,\Delta X(q)_s,U_s)}([0,t]\times \mathbf{R}\times[0,1]) I_A(\xi(s,p,q)) \\
&= \int_0^t \int_{\mathbf{R}}\int_{[0,1]} I_A(xI_{R_q}(x), uxI_{R_q}(x), u|x|^p I_{R_q}(x))\widehat{\mu}(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x,\mathrm{d}u),
\end{aligned} \tag{2.28}
$$

$\xi(s,p,q) = \{(\Delta X(q)_s, \Delta Y(X(q))_s, \Delta Z^p(X(q))_s)\}$, U_s为$[0,1]$上服从均匀分布的随机变量, 且与X独立.

$(X^n(q),Y(X^n(q)),Z^p(X^n(q)))$关于$\overline{h}$的可料特征$(\widehat{B}^n,\widehat{C}^n,\eta^n)$为

$$
\widehat{B}^n = \begin{pmatrix} B^n \\ B^{n\prime} \\ B^{n\prime\prime} \end{pmatrix}, \qquad \widehat{C}^n = \begin{pmatrix} C^n & C^n/2 & 0 \\ C^n/2 & C^n/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{2.29}
$$

其中

$$
\begin{aligned}
B_t^{n\prime} &= \frac{1}{2}B_t^n + \frac{1}{2}\int_0^t \int_{R_q} (x-h(x))\nu^n(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x), \\
B_t^{n\prime\prime} &= \begin{cases} \frac{1}{2}C_t^n + \frac{1}{2}\int_0^t \int_{R_q} x^2 \nu^n(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x), & p=2, \\ \frac{1}{2}\int_0^t \int_{R_q} |x|^p \nu^n(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x), & p\neq 2, \end{cases} \\
\eta^n([0,t]\times A) &= \int_0^t \int_{\mathbf{R}}\int_{[0,1]} I_A(xI_{R_q}(x), uxI_{R_q}(x), u|x|^p I_{R_q}(x))\widehat{\nu}^n(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x,\mathrm{d}u).
\end{aligned}
$$

因为

$$
|\widehat{B}_s^n - \widehat{B}_s| \leq |B_s^n - B_s| + |B_s^{n\prime} - B_s{}'| + |B_s^{n\prime\prime} - B_s{}''|,
$$

所以, 当$p=2$时,

$$\begin{aligned}|\widehat{B}_s^n-\widehat{B}_s| &\le \frac{3}{2}|B_s^n-B_s|+\frac{1}{2}\Big|\int_0^s\int_{R_q}(x-h(x))[\nu^n(\mathrm{d}u,\mathrm{d}x)-\nu(\mathrm{d}u,\mathrm{d}x)]\Big|\\ &\quad+\frac{1}{2}|C_s^n-C_s|+\frac{1}{2}\Big|\int_0^s\int_{R_q}|x|^p[\nu^n(\mathrm{d}u,\mathrm{d}x)-\nu(\mathrm{d}u,\mathrm{d}x)]\Big|,\end{aligned}$$

当$p\neq 2$时,

$$\begin{aligned}|\widehat{B}_s^n-\widehat{B}_s| &\le \frac{3}{2}|B_s^n-B_s|+\frac{1}{2}\Big|\int_0^s\int_{R_q}(x-h(x))[\nu^n(\mathrm{d}u,\mathrm{d}x)-\nu(\mathrm{d}u,\mathrm{d}x)]\Big|\\ &\quad+\frac{1}{2}\Big|\int_0^s\int_{R_q}|x|^p[\nu^n(\mathrm{d}u,\mathrm{d}x)-\nu(\mathrm{d}u,\mathrm{d}x)]\Big|,\end{aligned}$$

由假设条件(a), (b)以及Kasahara和Watanabe在[3]中的引理3.1可得

$$\sup_{s\le t}|\widehat{B}_s^n-\widehat{B}_s|\to 0,\qquad \forall\, t\in D,$$

即Jacod和Shiryaev[2]的定理VII-3.4的条件[sup $-\beta_3$]成立.

对任意$g\in\{g: g$是$\mathbf{R}^3$上的连续有界函数, 并且在0的某一邻域内为0$\}$, 由假设$\nu^n\xrightarrow{W}\nu$和Kasahara和Watanabe在[3]中的引理3.1,

$$\begin{aligned}&\int_0^t\int_{\mathbf{R}^3}g(x,y,z)\eta^n(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x,\mathrm{d}y,\mathrm{d}z)\\ =&\int_0^1\mathrm{d}u\int_0^t\int_{\mathbf{R}}g(xI_{R_q}(x),uxI_{R_q}(x),u|x|^pI_{R_q}(x))\nu^n(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)\end{aligned}\tag{2.30}$$

及

$$\begin{aligned}&\int_0^t\int_{\mathbf{R}^3}g(x,y,z)\eta(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x,\mathrm{d}y,\mathrm{d}z)\\ =&\int_0^1\mathrm{d}u\int_0^t\int_{\mathbf{R}}g(xI_{R_q}(x),uxI_{R_q}(x),u|x|^pI_{R_q}(x))\nu(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x),\end{aligned}\tag{2.31}$$

可得

$$\int_0^t\int_{\mathbf{R}^3}g(x,y,z)\eta^n(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x,\mathrm{d}y,\mathrm{d}z)\to\int_0^t\int_{\mathbf{R}^3}g(x,y,z)\eta(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x,\mathrm{d}y,\mathrm{d}z),$$

即Jacod和Shiryaev在[2]中的定理VII-3.4的条件[$\delta_{3,1}-D$]成立.

因为ν关于t连续, 所以由(2.2), (2.24)–(2.26)得$\widehat{B}_s=0$, 从而有$(\Delta\widehat{B}_s)^2=0$以及

$$(\Delta\widehat{B}_s^n)^2=\begin{pmatrix}(\Delta B_s^n)^2 & (\Delta B_s^n)(\Delta B_s^{n\prime}) & (\Delta B_s^n)(\Delta B_s^{n\prime\prime})\\ (\Delta B_s^{n\prime})(\Delta B_s^n) & (\Delta B_s^{n\prime})^2 & (\Delta B_s^{n\prime})(\Delta B_s^{n\prime\prime})\\ (\Delta B_s^{n\prime\prime})(\Delta B_s^n) & (\Delta B_s^{n\prime\prime})(\Delta B_s^{n\prime}) & (\Delta B_s^{n\prime\prime})^2\end{pmatrix}.$$

因此, 容易证明

$$(\Delta\widehat{B}^n_t)^2\to 0,\qquad \forall\, t\ge 0. \tag{2.32}$$

由于$(\overline{h}^*\overline{h})$的每一个元素均为连续有界的, 我们有

$$\int_0^t\int_{\mathbf{R}^3}(\overline{h}^*\overline{h})(x,y,z)\eta^n(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x,\mathrm{d}y,\mathrm{d}z)\to\int_0^t\int_{\mathbf{R}^3}(\overline{h}^*\overline{h})(x,y,z)\eta(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x,\mathrm{d}y,\mathrm{d}z). \tag{2.33}$$

因为$\widetilde{\widehat{C}}{}^n_t=\widehat{C}^n_t+\overline{h}^*\overline{h}\cdot\nu^n_t-\sum\limits_{s\le t}(\Delta\widehat{B}^n_s)^2$, $\widetilde{\widehat{C}}_t=\widehat{C}_t+h^2\cdot\nu_t$, 所以由假设$\nu^n\xrightarrow{W}\nu$, (2.32)和(2.33)易得$\widetilde{\widehat{C}}{}^n_t\to\widetilde{\widehat{C}}_t$, $t\in D$, 即Jacod和Shiryaev在[2]中的定理VII-3.4的条件$[\gamma_3-D]$成立.

故由Jacod和Shiryaev在[2]中的定理VII-3.4可知半鞅序列$(X^n,Y(X^n),Z^p(X^n))$是胎紧的. □

定理 2.2 假设X^n和X均没有固定不连续点, 并且满足定理2.1中的条件, 则$(X^n,Y(X^n),Z^p(X^n))\xrightarrow{L}(X,Y(X),Z^p(X))$的充要条件是$(X^n,Y(X^n),Z^p(X^n))\xrightarrow{\mathcal{L}(\mathbf{R})_+}(X,Y(X),Z^p(X))$和$\nu^n\xrightarrow{W}\nu$, 其中$X^n\xrightarrow{\mathcal{L}(\mathbf{R}_+)}X$表示在$\mathbf{R}_+$上, X^n按有限维分布收敛到X.

证明: 证明与Jacod和Shiryaev在[2]中的推论VII-3.5的证明类似, 略去. □

§3. 依分布稳定收敛

设X^n为$\mathcal{B}^n=(\Omega,\mathcal{F},\mathcal{F}^n_t,\mathsf{P})$上的零初值半鞅, 可料特征为$(B^n,C^n,\nu^n)$. 对于每一个$n$, 设存在与$X^n$独立的Brown运动$W^n$. 定义

$$\begin{aligned}Y(X^n)_t\ &=\ \frac{1}{2}B^n_t+\frac{1}{2}X^{n,c}_t+\frac{1}{\sqrt{12}}\int_0^t\sqrt{c^n_s}\mathrm{d}W^n_s\\&\quad+\int_0^t\int_{\mathbf{R}}\int_{[0,1]}uh(x)(\widehat{\mu}^n-\widehat{\nu}^n)(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x,\mathrm{d}u)\\&\quad+\int_0^t\int_{\mathbf{R}}\int_{[0,1]}u(x-h(x))\widehat{\mu}^n(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x,\mathrm{d}u)\end{aligned} \tag{3.1}$$

和

$$Z^p(X^n)_t=\begin{cases}\dfrac{1}{2}C^n_t+\displaystyle\int_0^t\int_{\mathbf{R}}\int_{[0,1]}ux^2\widehat{\mu}^n(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x,\mathrm{d}u), & p=2,\\ \displaystyle\int_0^t\int_{\mathbf{R}}\int_{[0,1]}u|x|^p\widehat{\mu}^n(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x,\mathrm{d}u), & p\ne 2,\end{cases} \tag{3.2}$$

其中$C^n_t=\int_o^t c^n_s\mathrm{d}s$, $\widehat{\mu}^n(\mathrm{d}t,\mathrm{d}x,\mathrm{d}u)$和$\widehat{\nu}^n(\mathrm{d}t,\mathrm{d}x,\mathrm{d}u)$的定义与第二节相同.

假设存在一个数列α_n单调递减趋于0, 使得$\mathcal{F}^n_{\alpha_n}\subset\mathcal{F}^{n+1}_{\alpha_{n+1}}$, $\forall\, n\ge 1$. 令$\mathcal{G}=\bigvee\limits_n\mathcal{F}^n_{\alpha_n}$, $Q(\omega,\mathrm{d}\alpha)$为$(\Omega,\mathcal{G})$到$(D(\mathbf{R}),\mathcal{B}(D(\mathbf{R})))$上的转移概率, 使得对每个$\omega\in\Omega$, $D(\mathbf{R})$上的坐标过

程X $(X_t(\alpha)=\alpha(t))$为独立增量半鞅, 其可料特征为$(B(\omega),C(\omega),\nu(\omega))$. 又假设$X$拟左连续, 并且存在与$X$独立的Brown运动$W$使得

$$\begin{aligned} Y(X)_t &= \frac{1}{2}B_t+\frac{1}{2}X_t^c+\frac{1}{\sqrt{12}}\int_0^t\sqrt{c_s}\mathrm{d}W_s \\ &+\int_0^t\int_{\mathbf{R}}\int_{[0,1]}uh(x)(\widehat{\mu}-\widehat{\nu})(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x,\mathrm{d}u) \\ &+\int_0^t\int_{\mathbf{R}}\int_{[0,1]}u(x-h(x))\widehat{\mu}(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x,\mathrm{d}u), \end{aligned} \tag{3.3}$$

$$Z^p(X)_t = \begin{cases} \dfrac{1}{2}C_t+\displaystyle\int_0^t\int_{\mathbf{R}}\int_{[0,1]}ux^2\widehat{\mu}(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x,\mathrm{d}u), & p=2, \\ \displaystyle\int_0^t\int_{\mathbf{R}}\int_{[0,1]}u|x|^p\widehat{\mu}(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x,\mathrm{d}u), & p\neq 2, \end{cases} \tag{3.4}$$

其中$C_t=\displaystyle\int_o^t c_s\mathrm{d}s$, $\widehat{\mu}(\mathrm{d}t,\mathrm{d}x,\mathrm{d}u)$和$\widehat{\nu}(\mathrm{d}t,\mathrm{d}x,\mathrm{d}u)$的定义与第二节相同.

假设$Y(X)$和$Y(X^n)$定义中的Brown运动W和W^n分别定义在概率空间$\mathcal{B}^{0*}=(\Omega^{0*},\mathcal{F}^{0*},\mathcal{F}_t^{0*},\mathsf{P}^{0*})$和$\mathcal{B}^{n*}=(\Omega^{n*},\mathcal{F}^{n*},\mathcal{F}_t^{n*},\mathsf{P}^{n*})$上, 记$\mathcal{B}^*=(\Omega^*,\mathcal{F}^*,\mathcal{F}_t^*,\mathsf{P}^*)=\prod\limits_{n=0}^{\infty}\mathcal{B}^{n*}$, 则$\mathcal{F}$与$\mathcal{F}^*$独立, $\widetilde{\mathcal{B}}^n=(\widetilde{\Omega},\widetilde{\mathcal{F}},\widetilde{\mathcal{F}}_t^n,\widetilde{\mathsf{P}})=\mathcal{B}^n\otimes\mathcal{B}^*$为$\mathcal{B}^n$的扩展空间, 因此可以认为$X^n$, $Y(X^n)$和$Z(X^n)$定义在这个空间上.

定理 3.1 设D是$\mathbf{R}_+$的稠密子集, 若

(a) $\sup\limits_{s\le t}|B_s^n-B_s|\xrightarrow{\mathsf{P}}0$, $\forall\, t\ge 0$;

(b) $C_t^n\xrightarrow{\mathsf{P}}C_t$, $\sum\limits_{s\le t}(\Delta B_s^n)^2\xrightarrow{\mathsf{P}}\sum\limits_{s\le t}(\Delta B_s)^2$, $\forall\, t\in D$,

(c) $g\cdot\nu_t^n\xrightarrow{\mathsf{P}}g\cdot\nu_t$, $\forall\, t\in D$, $\forall\, g\in\mathcal{C}$, 其中$\mathcal{C}$为有界连续函数全体.

则在下列三种情形下$(X^n,Y(X^n),Z^p(X^n))\xrightarrow{\text{stably}}(X,Y(X),Z^p(X))$:

(i) $p\ge 2$, 并且对于任意的$N>0$,

$$\int_0^N\int_{\mathbf{R}}|x|^pI_{\{|x|\ge q\}}\nu^n(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)\xrightarrow{\mathsf{P}}0, \tag{3.5}$$

$$\int_0^N\int_{\mathbf{R}}|x|^pI_{\{|x|\ge q\}}\nu(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)\xrightarrow{\mathsf{P}}0. \tag{3.6}$$

(ii) $1<p<2$, $C=C^n=0$, 并且对于任意的$N>0$,

$$\int_0^N\int_{\mathbf{R}}|x|^2I_{\{|x|\ge q\}}\nu^n(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)\xrightarrow{\mathsf{P}}0, \tag{3.7}$$

$$\int_0^N\int_{\mathbf{R}}|x|^2I_{\{|x|\ge q\}}\nu(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)\xrightarrow{\mathsf{P}}0. \tag{3.8}$$

(iii) $0<p\le 1$, $C=C^n=0$, 并且对于任意的$N>0$, (3.7)和(3.8)成立.

证明: 因为$\widetilde{C}_t^n = C_t^n + h^2 \cdot \nu_t^n - \sum\limits_{s\le t}(\Delta B_s^n)^2$, $\widetilde{C}_t = C_t + h^2 \cdot \nu_t - \sum\limits_{s\le t}(\Delta B_s)^2$, 所以由假设易证Jacod和Shiryaev在[2]中的定理VIII-5.42中的条件全部满足, 因此

$$X^n \overset{\text{stably}}{\longrightarrow} X.$$

由$X_0^n = 0$及$X^n(q)$, $Y(X^n(q))$和$Z^p(X^n(q))$的定义可得$(X^n(q), Y(X^n(q)), Z^p(X^n(q)))$为零初值的过程. $(X^n(q), Y(X^n(q)), Z^p(X^n(q)))$所在的空间为$\overline{\mathcal{B}}^n = (\overline{\Omega}, \overline{\mathcal{F}}, \{\overline{\mathcal{F}}_t^n\}_{t\ge 0}, \overline{\mathsf{P}})$, 其中$\overline{\mathcal{F}}_t^n = \bigcap\limits_{s>t} \mathcal{F}_s^n \otimes \mathcal{F}_s^*$. 因为数列$\alpha_n$递减趋于0, 且$\mathcal{F}_{\alpha_n}^n \subset \mathcal{F}_{\alpha_{n+1}}^{n+1}$, $\forall n \ge 1$, 所以易见$\overline{\mathcal{F}}_{\alpha_n}^n \subset \overline{\mathcal{F}}_{\alpha_{n+1}}^{n+1}$, $\forall n \ge 1$.

令$\widetilde{\mathcal{G}} = \bigvee\limits_n \widetilde{\mathcal{F}}_{\alpha_n}^n$, 则$\widetilde{Q}(\omega, \omega^*, \mathrm{d}\alpha) = Q(\omega, \mathrm{d}\alpha)\mathsf{P}^*(\omega^*)$为$(\widetilde{\Omega}, \widetilde{\mathcal{G}})$到$(D(\mathbf{R}), \mathcal{B}(D(\mathbf{R})))$上的转移概率测度, 由$\mathcal{F}$与$\mathcal{F}^*$独立, 坐标过程$X$在$(\Omega, \mathcal{G})$上对任意的$\omega \in \Omega$均为独立增量半鞅及$(X(q), Y(X(q)), Z^p(X(q)))$的表达式易见, 对每个$\omega \in \overline{\Omega}$, $(X(q), Y(X(q)), Z^p(X(q)))$为独立增量半鞅.

X拟左连续知及$X(q)$, $Y(X(q))$和$Z^p(X(q))$的定义可推得$(X(q), Y(X(q)), Z^p(X(q)))$为拟左连续过程. 由假设(3.5)–(3.8), 类似于定理2.1的证明可得, 对于过程$(X^n, Y(X^n), Z^p(X^n))$, $(X^n(q), Y(X^n(q)), Z^p(X^n(q)))$, $(X, Y(X), Z^p(X))$和$(X(q), Y(X(q)), Z^p(X(q)))$可得(2.18)–(2.22)成立. 因此, 由著名的Prokhorov定理, 我们可以假设按$D([0,\infty), \mathbf{R}^3)$ (定义在$[0,\infty)$上取值于$\mathbf{R}^3$的右连左极函数的全体)上Skorohod拓扑, 当$q \to \infty$时,

$$(X, Y(X), Z^p(X)) - (X(q), Y(X(q)), Z^p(X(q))) \to 0, \qquad \text{a.s.}, \tag{3.9}$$

$$(X^n, Y(X^n), Z^p(X^n)) - (X^n(q), Y(X^n(q)), Z^p(X^n(q))) \to 0, \qquad \text{a.s.}. \tag{3.10}$$

任取$D([0,\infty), \mathbf{R}^3)$上的连续有界的函数$f$, 对于任意有界随机变量$U$, 则

$$\begin{aligned}
& |\mathsf{E}[Uf(X^n, Y(X^n), Z^p(X^n))] - \widetilde{\mathsf{E}}[Uf(X, Y(X), Z^p(X))]| \\
\le\ & |\mathsf{E}[Uf(X^n(q), Y(X^n(q)), Z^p(X^n(q)))] - \widetilde{\mathsf{E}}[Uf(X(q), Y(X(q)), Z^p(X(q)))]| \\
& + |\mathsf{E}[Uf(X^n, Y(X^n), Z^p(X^n))] - \mathsf{E}[Uf(X^n(q), Y(X^n(q)), Z^p(X^n(q)))]| \\
& + |\widetilde{\mathsf{E}}[Uf(X, Y(X), Z^p(X))] - \widetilde{\mathsf{E}}[Uf(X(q), Y(X(q)), Z^p(X(q)))]|.
\end{aligned} \tag{3.11}$$

(3.9)–(3.11)表明要证明$(X^n, Y(X^n), Z^p(X^n)) \overset{\text{stably}}{\longrightarrow} (X, Y(X), Z^p(X))$, 只要证明, 对于任意固定的$q \ge 1$,

$$(X^n(q), Y(X^n(q)), Z^p(X^n(q))) \overset{\text{stably}}{\longrightarrow} (X(q), Y(X(q)), Z^p(X(q))). \tag{3.12}$$

由定理2.1的证明可知$(X^n(q), Y(X^n(q)), Z^p(X^n(q)))$和$(X(q), Y(X(q)), Z^p(X(q)))$关于截尾函数$\overline{h} = (h, h', h'')$的可料特征分别为$(\widehat{B}^n, \widehat{C}^n, \eta^n)$, $(\widehat{B}, \widehat{C}, \eta)$.

当$p=2$时,

$$\begin{aligned}
&\mathsf{P}\Big(\sup_{s\le t}|\widehat{B}^n_s-\widehat{B}_s|>\theta\Big)\\
\le\ &\mathsf{P}\Big(\sup_{s\le t}|B^n_s-B_s|>\frac{2}{3}\theta\Big)+\mathsf{P}\Big(\sup_{s\le t}|C^n_s-C_s|>2\theta\Big)\\
&+\mathsf{P}\Big(\sup_{s\le t}\Big|\int_0^s\int_{R_q}(x-h(x))[\nu^n(\mathrm{d}u,\mathrm{d}x)-\nu(\mathrm{d}u,\mathrm{d}x)]\Big|>2\theta\Big)\\
&+\mathsf{P}\Big(\sup_{s\le t}\Big|\int_0^s\int_{R_q}|x|^p[\nu^n(\mathrm{d}u,\mathrm{d}x)-\nu(\mathrm{d}u,\mathrm{d}x)]\Big|>2\theta\Big),
\end{aligned}\tag{3.13}$$

当$p\neq 2$时,

$$\begin{aligned}
&\mathsf{P}\Big(\sup_{s\le t}|\widehat{B}^n_s-\widehat{B}_s|>\theta\Big)\\
\le\ &\mathsf{P}\Big(\sup_{s\le t}|B^n_s-B_s|>\frac{2}{3}\theta\Big)+\mathsf{P}\Big(\sup_{s\le t}\Big|\int_0^s\int_{R_q}|x|^p[\nu^n(\mathrm{d}u,\mathrm{d}x)-\nu(\mathrm{d}u,\mathrm{d}x)]\Big|>2\theta\Big)\\
&+\mathsf{P}\Big(\sup_{s\le t}\Big|\int_0^s\int_{R_q}(x-h(x))[\nu^n(\mathrm{d}u,\mathrm{d}x)-\nu(\mathrm{d}u,\mathrm{d}x)]\Big|>2\theta\Big),
\end{aligned}\tag{3.14}$$

利用Kasahara和Watanabe在文献[3]中的引理3.1, (3.12), (3.13)以及假设条件, 由(3.14)可推得$\sup\limits_{s\le t}|\widehat{B}^n_s-\widehat{B}_s|\xrightarrow{\mathsf{P}}0$, $\forall\, t\in\mathbf{R}_+$. 这表明Jacod和Shiryaev在[2]中的定理VIII-5.42中的条件[$\sup-\beta_5$]满足.

(2.30)和(2.31)表明, 对于任意的$g\in\{g$为定义在$\mathbf{R}^3$上的连续有界函数, 并且在0的某邻域内为0$\}$, 假设(c)可推得, 对于$t\in D$,

$$\int_0^t\int_{\mathbf{R}^3}g(x,y,z)\eta^n(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x,\mathrm{d}y,\mathrm{d}z)\xrightarrow{\mathsf{P}}\int_0^t\int_{\mathbf{R}^3}g(x,y,z)\eta(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x,\mathrm{d}y,\mathrm{d}z),\tag{3.15}$$

即Jacod和Shiryaev在[2]中的定理VIII-5.42中的条件[$\delta_{5,1}-D$]满足.

记$\overline{h}^*$为$\overline{h}$转置, 则由于$(\overline{h}^*\overline{h})$的每一个元素均为连续有界的, 我们有

$$\int_0^t\int_{\mathbf{R}^3}(\overline{h}^*\overline{h})(x,y,z)\eta^n(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x,\mathrm{d}y,\mathrm{d}z)\xrightarrow{\mathsf{P}}\int_0^t\int_{\mathbf{R}^3}(\overline{h}^*\overline{h})(x,y,z)\eta(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x,\mathrm{d}y,\mathrm{d}z).\tag{3.16}$$

由(3.16)及假设条件(b)和(c)以及

$$\widetilde{\widehat{C}}_t=\widehat{C}_t+\int_0^t\int_{\mathbf{R}^3}(\overline{h}^*\overline{h})(x,y,z)\eta(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x,\mathrm{d}y,\mathrm{d}z)-\sum_{s\le t}(\Delta\widehat{B}_s)^2$$

可得Jacod和Shiryaev在[2]中的定理VIII-5.42中的条件[γ_5-D]满足.

因此由Jacod和Shiryaev在[2]中的定理VIII-5.42得

$$(X^n(q),Y(X^n(q)),Z^p(X^n(q)))\xrightarrow{\text{stably}}(X(q),Y(X(q)),Z^p(X(q))).$$

证毕. $\square$

参 考 文 献

[1] Jacod, J., On processes with conditional independent increments and stable convergence in law, Séminaire de Probabilités XXXVI, *Lecture Notes in Math.*, Springer, New York, **1801**(2003), 383–401.

[2] Jacod, J., Shiryaev, A.N., *Limit Theorems for Stochastic Processes* (Second edition), Berlin, Springer-Verlag, 2003.

[3] Kasahara, Y., Watanabe, S., Limit theorems for point processes and their functionals, *J. Math. Soc. Japan*, **38(3)**(1986), 543–574.

[4] Prokhorov, Yu.V., Convergence of stochastic processes and limit theorems in probability theory, *Theory Probab. Appl.*, **1**(1956), 157–214.

[5] Skorokhod, A.V., Limit theorems for stochastic processes, *Theory Probab. Appl.*, **1**(1956), 261–290.

[6] 谢颖超, 随机测度序列的弱收敛, 华东师范大学学报, **4**(1993), 1–5.

[7] 谢颖超, 鞅测度及其极限定理, 江苏科学技术出版社, 南京, 1995.

[8] 何声武, 汪嘉冈, 严加安, 半鞅与随机分析, 科学出版社, 北京, 1995.

[9] Jacod, J., Jakubowski, A., Mémin, J., On asymptotic errors in discretization of processes, *Ann. Probab.*, **31(2)**(2003), 592–608.

Convergence Theorems of the Limit Processes of Integrated Errors of Semimartingale Sequence

Xiao Xiaoqing

(*School of Science, Nantong University, Nantong, 226007*)

Xie Yingchao

(*School of Mathematical Sciences, Xuzhou Normal University, Xuzhou, 221116*)

Jacod, Jakubowski and Mémin studied the integrated error processes $Y^n(X)$ and $Z^{n,p}(X)$ which relates to the error process ${}^nX_t = X_t - X_{[nt]/n}$ for semimartingale X with independent increments. And they also investigated the limit theorems for the semimartingale sequence $\{(Y(X^n), Z^p(X^n))\}_{n\geq 1}$. If denote the limit points of $\{(Y(X^n), Z^p(X^n))\}_{n\geq 1}$ by $(Y(X), Z^p(X))$, Jacod et al. gave the formula of $(Y(X), Z^p(X))$. In this paper, we will investigate the convergence theorems of $Y(X^n)$ and $Z^p(X^n)$ for semimartingale sequence $\{X^n\}_{n\geq 1}$. We study mainly the convergence in law and the stable convergence in law of $\{(X^n, Y(X^n), Z^p(X^n))\}_{n\geq 1}$.

Keywords: Semimartingale, limit theorems, integrated error processes, convergence in law, stable convergence in law.

AMS Subject Classification: 76M35.