应用概率统计　第二十四卷
第六期　2008年12月

Chinese Journal of Applied Probability
and Statistics Vol.24 No.6 Dec. 2008

一类随机利率下的破产时罚金折现期望 *

王　后　春

(安徽建筑工业学院数理系, 合肥, 230022)

摘　要

本文在经典风险模型下, 引进带有一种随机利率的破产时罚金折现期望的概念, 其利率的随机性通过标准Wiener过程和Poisson过程来描述. 给出破产时罚金折现期望所满足的更新方程, 并利用这个更新方程给出破产时罚金折现期望的渐近公式.

关键词: 破产时罚金折现期望, 更新方程, 标准Wiener过程, Poisson过程, 破产概率.

学科分类号: O211.6, F840.

§1. 引　　言

设$(\Omega,\mathcal{F},\mathsf{P})$为一包含本文中所有的随机变量的完备概率空间. 经典风险过程定义为

$$U(t)=u+ct-\sum_{k=1}^{N(t)}X_k, \tag{1.1}$$

其中$u\geq 0$、$c>0$分别为保险公司的初始盈余和单位时间的保费收入; $\{N(t),t\geq 0\}$是参数为λ的Poisson过程且$N(t)$表示时间区间$[0,t]$上的理赔次数; $\{X_k,k\geq 1\}$为非负独立同分布的随机变量序列, X_k表示第k次理赔量, 每个X_k都有相同的分布函数$F(x)$和密度函数$p(x)$, 且$F(0)=0$, $\mathsf{E}[X_k]=\mu<\infty$; $\{N(t),t\geq 0\}$与$\{X_k,k\geq 1\}$相互独立. 对于$t\geq 0$, $U(t)$表示保险公司在时刻t的盈余.

破产时刻T_u定义为$T_u=\inf\{t\geq 0:U(t)<0\}$, 其中$\inf\emptyset=\infty$; 破产概率$\psi(u)$定义为$\psi(u)=\mathsf{P}(T_u<\infty|U(0)=u)$.

本文始终假定$c-\lambda\mu>0$, 则由强大数定律有$\lim\limits_{t\to\infty}U(t)/N(t)=(c-\lambda\mu)/\lambda$, a.s., 故$\lim\limits_{t\to\infty}U(t)=\infty$, a.s., 且$\lim\limits_{u\to\infty}\psi(u)=0$.

类似于[1], 定义风险模型(1.1)的破产时罚金折现期望为

$$\phi(u)=\mathsf{E}[e^{-r(T_u)}w(U(T_u-),|U(T_u)|)I(T_u<\infty)|U(0)=u], \tag{1.2}$$

其中$I(A)$是随机事件A的示性函数; $w(x,y)$为一确定的非负惩罚函数, 依赖于破产前瞬间盈余$U(T_u-)$及破产时赤字$|U(T_u)|$; $r(t)$是息力累积函数, 有$r(t)=\displaystyle\int_0^t h(x)\mathrm{d}x$, $h(x)$为息力.

*安徽建筑工业学院硕博科研启动项目基金资助(20071201-15).

本文2005年11月4日收到, 2006年6月29日收到修改稿.

自从[1]引入了破产时罚金折现期望, 有关问题立即成为破产理论研究的重要课题, 因为$\phi(u)$与$\psi(u)$及T_u、$U(T_u-)$、$|U(T_u)|$的分布或联合分布等有密切联系. 例如, 当$r(t)=0$且$w(x,y)\equiv 1$时, 有$\phi(u)=\psi(u)$.

一般地, 在破产理论中为方便处理, 总假定$h(x)$为常数δ, 此时$r(t)=\int_0^t h(x)\mathrm{d}x=\delta t$. 这种情形已被多次讨论并得到了一些优美结果, 见[1]、[2]、[3]. 但是, 利率的随机波动是一种自然现象, 关于随机利率的文章也很多, 见[4]、[5]. 本文中我们假定$r(t)=\delta t+\beta W(t)+\gamma P(t)$, 其中$\delta$、$\beta$、$\gamma$为非负常数; $\{W(t),t\geq 0\}$为标准Wiener过程; $\{P(t),t\geq 0\}$是参数为λ^*的Poisson过程; $\{W(t),t\geq 0\}$、$\{P(t),t\geq 0\}$、$\{U(t),t\geq 0\}$相互独立. 另外, 由于实际金融环境中利率的随机波动不会太大, 本文中我们还假定$\delta\geq\beta^2/2+\lambda^*(e^{-\gamma}-1)$.

我们强调, 尽管本文引入了跳扩散过程的息力累积函数, 我们仍然处理任一时刻的盈余不带来任何利息的经典风险模型.

对于$\beta=0$, $\gamma=0$即$r(t)=\delta t$时的模型(1.1), [1]给出了破产时罚金折现期望的积分–微分方程、更新方程和渐近公式等结论; 对于$\delta\geq 0$, $\beta\geq 0$, $\gamma\geq 0$即$r(t)=\delta t+\beta W(t)+\gamma P(t)$时的模型(1.1), 本文将利用微分方法给出破产时罚金折现期望所满足的积分–微分方程和更新方程, 并利用这个更新方程给出破产时罚金折现期望的渐近公式.

§2. 破产时罚金折现期望的更新方程

设待定常数ξ满足

$$\mathsf{E}[e^{-r(t)+\xi U(t)}|U(0)=u]=e^{\xi u}. \tag{2.1}$$

注意到总理赔量过程$S(t)=\sum_{k=1}^{N(t)}X_k$的矩母函数为$M_{S(t)}(\zeta)=e^{\lambda t(M_{X_1}(\zeta)-1)}$, 其中$M_{X_1}(\zeta)=\mathsf{E}[e^{\zeta X_1}]=\int_0^\infty e^{\zeta x}p(x)\mathrm{d}x$是$X_1$的矩母函数.

并注意到$\mathsf{E}[e^{-r(t)}]=e^{-\delta t}\mathsf{E}[e^{-\beta W(t)}]\mathsf{E}[e^{-\gamma P(t)}]=e^{-\delta t}e^{\beta^2 t/2}e^{\lambda^* t(e^{-\gamma}-1)}$.

由(2.1)计算可得:

$$\lambda\int_0^\infty e^{-\xi x}p(x)\mathrm{d}x=-c\xi+\lambda+\delta-\frac{\beta^2}{2}-\lambda^*(e^{-\gamma}-1), \tag{2.2}$$

称ξ的方程(2.2)为调节方程.

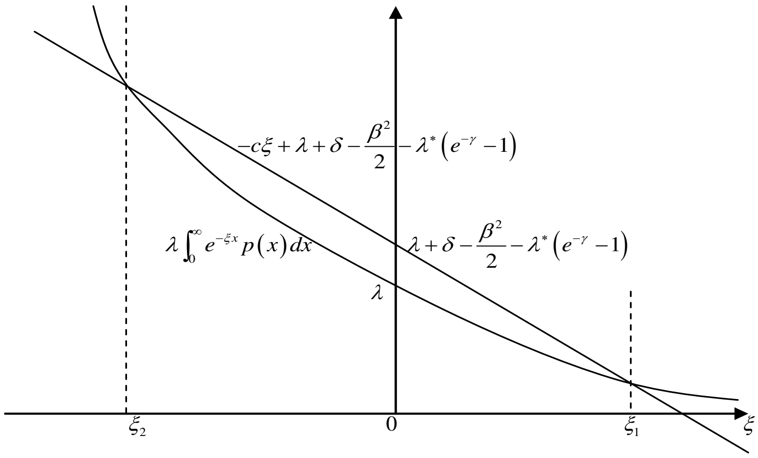
由于$\delta\geq\beta^2/2+\lambda^*(e^{-\gamma}-1)$, (2.2)有唯一非负根, 记作$\xi_1\geq 0$; 若$p(x)$是充分正则的, (2.2)还有唯一负根, 记作$\xi_2<0$.

记$\widehat{p}(\xi)=\int_0^\infty e^{-\xi x}p(x)\mathrm{d}x$, 由

$$\widehat{p}'(\xi)=-\int_0^\infty e^{-\xi x}xp(x)\mathrm{d}x<0,\qquad \widehat{p}''(\xi)=\int_0^\infty e^{-\xi x}x^2p(x)\mathrm{d}x>0$$

知这里两根的唯一性成立.

方程(2.2)及其两根将在本文中扮演重要作用, 关于该方程的根的情况可以参见下面的图形:



定理 2.1 若$F(x)$有连续的概率密度函数$p(x)$, $w(x,y)$关于变量x是连续的, 且ρ为方程(2.2)的非负根, 则$\phi(u)$分别满足如下积分–微分方程和更新方程:

$$\begin{aligned}&\Big(\lambda+\delta-\frac{\beta^2}{2}-\lambda^*(e^{-\gamma}-1)\Big)\phi(u)\\ =\ & c\phi'(u)+\lambda\int_0^u\phi(u-x)p(x)\mathrm{d}x+\lambda\int_u^\infty w(u,x-u)p(x)\mathrm{d}x,\end{aligned}\tag{2.3}$$

$$\phi(u)=\frac{\lambda}{c}\Big(\int_0^u\phi(x)\Big(\int_{u-x}^\infty e^{\rho(u-x-y)}p(y)\mathrm{d}y\Big)\mathrm{d}x+\int_u^\infty e^{\rho(u-x)}\omega(x)\mathrm{d}x\Big),\tag{2.4}$$

其中$\omega(x)=\displaystyle\int_x^\infty w(x,y-x)p(y)\mathrm{d}y=\int_0^\infty w(x,y)p(x+y)\mathrm{d}y$.

证明: 设dt单调递减趋向0, 对风险模型(1.1), 有: 在$[0,dt]$时间里理赔次数为0的概率是$1-\lambda dt+o(dt)$; 在$[0,dt]$时间里理赔次数为1的概率是$\lambda dt+o(dt)$, 这里有理赔量引起破产发生或没有引起破产发生两种情况; 在$[0,dt]$时间里理赔次数大于1的概率是$o(dt)$.

根据$U(t)$具有平稳独立增量, 并对上述几种情形利用全期望公式得:

$$\begin{aligned}\phi(u)\ &=\ (1-\lambda dt+o(dt))\mathsf{E}_r[e^{-r(dt)}\phi(u+cdt)]\\ &\quad+(\lambda dt+o(dt))\mathsf{E}_r[\mathsf{E}_{X_1}[e^{-r(dt)}\phi(u+cdt-X_1)I(X_1\le u+cdt)]]\\ &\quad+(\lambda dt+o(dt))\mathsf{E}_r[\mathsf{E}_{X_1}[e^{-r(dt)}w(u+cdt,X_1-u-cdt)I(X_1>u+cdt)]]+o(dt)\\ &=\ I_1+I_2+I_3+o(dt),\end{aligned}\tag{2.5}$$

其中$o(dt)$意味$\lim\limits_{dt\to0}o(dt)/dt=0$, $\mathsf{E}_V[*]$为$*$关于V的期望值.

对$\phi(u+cdt)$关于u进行Taylor级数展开, 并注意到

$$\mathsf{E}_r[e^{-r(t)}]=e^{-\delta t}\mathsf{E}[e^{-\beta W(t)}]\mathsf{E}[e^{-\gamma P(t)}]=e^{-\delta t}e^{\beta^2 t/2}e^{\lambda^* t(e^{-\gamma}-1)} \quad 和 \quad e^{-x}=1-x+o(x),$$

得到:

$$\begin{aligned} I_1 &= (1-\lambda dt+o(dt))e^{-(\alpha-\beta^2/2-\lambda^*(e^{-\gamma}-1))dt}\Big(\phi(u)+\phi'(u)cdt+\frac{\phi''(\zeta)}{2}(cdt)^2\Big)\\ &= (1-\lambda dt+o(dt))\Big(1-\Big(\delta-\frac{\beta^2}{2}-\lambda^*(e^{-\gamma}-1)\Big)dt+o(dt)\Big)\\ &\quad \cdot\Big(\phi(u)+\phi'(u)cdt+\frac{\phi''(\zeta)}{2}(cdt)^2\Big), \end{aligned}$$

其中$\zeta\in[u,u+cdt]$. 忽略包含$(dt)^2$的项得:

$$I_1=\phi(u)+\phi'(u)cdt-\Big(\delta-\frac{\beta^2}{2}-\lambda^*(e^{-\gamma}-1)\Big)\phi(u)dt-\lambda\phi(u)dt+o(dt)A, \tag{2.6}$$

其中$\lim\limits_{dt\to0}A=0$.

应用Fubini定理并施行变量代换得到:

$$\begin{aligned} &I_2+I_3\\ =\ &(\lambda dt+o(dt))\Big(\int_0^{u+cdt}e^{-(\delta-\beta^2/2-\lambda^*(e^{-\gamma}-1))dt}\phi(u+cdt-x)\mathrm{d}F(x)\Big)\\ &+(\lambda dt+o(dt))\Big(\int_{u+cdt}^{\infty}e^{-(\delta-\beta^2/2-\lambda^*(e^{-\gamma}-1))dt}w(u+cdt,x-u-cdt)\mathrm{d}F(x)\Big)\\ =\ &\lambda dt\Big(\int_{-cdt}^{u}e^{-(\delta-\beta^2/2-\lambda^*(e^{-\gamma}-1))dt}\phi(u-y)p(y+cdt)\mathrm{d}y\Big)\\ &+\lambda dt\Big(\int_u^{\infty}e^{-(\delta-\beta^2/2-\lambda^*(e^{-\gamma}-1))dt}w(u+cdt,y-u)p(y+cdt)\mathrm{d}y\Big)+o(dt)B, \end{aligned} \tag{2.7}$$

其中$\lim\limits_{dt\to0}B=0$.

把(2.6)、(2.7)代入(2.5)并在所得式子两边同乘以$1/dt$得:

$$\begin{aligned} 0 &= \phi'(u)c-\Big(\alpha-\frac{\beta^2}{2}-\lambda^*(e^{-\gamma}-1)\Big)\phi(u)-\lambda\phi(u)\\ &\quad+\lambda\Big(\int_{-cdt}^{u}e^{-(\alpha-\beta^2/2-\lambda^*(e^{-\gamma}-1))dt}\phi(u-y)p(y+cdt)\mathrm{d}y\Big)\\ &\quad+\lambda\Big(\int_u^{\infty}e^{-(\alpha-\beta^2/2-\lambda^*(e^{-\gamma}-1))dt}w(u+cdt,y-u)p(y+cdt)\mathrm{d}y\Big)\\ &\quad+\frac{o(dt)(A+B+1)}{dt}. \end{aligned} \tag{2.8}$$

在(2.8)中, 利用$p(x)$、$w(x,y)$的连续性, 令$dt\to0$并整理得(2.3)成立.

记$\phi_\rho(u)=e^{-\rho u}\phi(u)$. 在(2.3)的两边同乘以$e^{-\rho u}$, 整理得:

$$c\phi_\rho'(u)=\Big(\lambda+\delta-\frac{\beta^2}{2}-\lambda^*(e^{-\gamma}-1)-c\rho\Big)\phi_\rho(u)-\lambda\int_0^u\phi_\rho(u-x)e^{-\rho x}p(x)\mathrm{d}x-\lambda e^{-\rho u}\omega(u),$$

由ρ为方程(2.2)的非负根得:

$$c\phi_\rho'(u)=\lambda\int_0^\infty e^{-\rho x}p(x)\mathrm{d}x\phi_\rho(u)-\lambda\int_0^u\phi_\rho(u-x)e^{-\rho x}p(x)\mathrm{d}x-\lambda e^{-\rho u}\omega(u),$$

由于记$\widehat{p}(\xi)=\displaystyle\int_0^\infty e^{-\xi x}p(x)\mathrm{d}x$, 得:

$$\begin{aligned}c\phi_\rho'(u)&=\lambda\widehat{p}(\rho)\phi_\rho(u)-\lambda\int_0^u\phi_\rho(u-x)e^{-\rho x}p(x)\mathrm{d}x-\lambda e^{-\rho u}\omega(u)\\&=\lambda\widehat{p}(\rho)\phi_\rho(u)-\lambda\int_0^u\phi_\rho(x)e^{-\rho(u-x)}p(u-x)\mathrm{d}x-\lambda e^{-\rho u}\omega(u).\end{aligned}\tag{2.9}$$

对于$z>0$, 对(2.9)两边关于u从$u=0$到$u=z$积分得:

$$\begin{aligned}&\lambda^{-1}c(\phi_\rho(z)-\phi_\rho(0))\\=\;&\widehat{p}(\rho)\int_0^z\phi_\rho(u)\mathrm{d}u-\int_0^z\Big(\int_0^u\phi_\rho(x)e^{-\rho(u-x)}p(u-x)\mathrm{d}x\Big)\mathrm{d}u-\int_0^z e^{-\rho u}\omega(u)\mathrm{d}u\\=\;&\widehat{p}(\rho)\int_0^z\phi_\rho(u)\mathrm{d}u-\int_0^z\Big(\int_x^z e^{-\rho(u-x)}p(u-x)\mathrm{d}u\Big)\phi_\rho(x)\mathrm{d}x-\int_0^z e^{-\rho u}\omega(u)\mathrm{d}u\\=\;&\int_0^z\Big(\int_{z-x}^\infty e^{-\rho y}p(y)\mathrm{d}y\Big)\phi_\rho(x)\mathrm{d}x-\int_0^z e^{-\rho u}\omega(u)\mathrm{d}u,\end{aligned}\tag{2.10}$$

在(2.10)的两端令$z\to\infty$并注意到两端的第一项极限都为0, 得:

$$\phi_\rho(0)=\frac{\lambda}{c}\int_0^\infty e^{-\rho u}\omega(u)\mathrm{d}u,\tag{2.11}$$

把(2.11)代入(2.10)并化简得:

$$\phi_\rho(z)=\frac{\lambda}{c}\Big(\int_0^z\phi_\rho(x)\Big(\int_{z-x}^\infty e^{-\rho y}p(y)\mathrm{d}y\Big)\mathrm{d}x+\int_z^\infty e^{-\rho u}\omega(u)\mathrm{d}u\Big),\qquad z\geq 0.\tag{2.12}$$

在(2.12)两边同乘以$e^{\rho z}$得:

$$\phi(z)=\frac{\lambda}{c}\Big(\int_0^z\phi(x)\Big(\int_{z-x}^\infty e^{\rho(z-x-y)}p(y)\mathrm{d}y\Big)\mathrm{d}x+\int_z^\infty e^{\rho(z-u)}\omega(u)\mathrm{d}u\Big),$$

故(2.4)成立. □

注 对于$\beta=0$, $\gamma=0$即$r(t)=\delta t$时的模型(1.1), [1]得出

$$(\lambda+\delta)\phi(u)=c\phi'(u)+\lambda\int_0^u\phi(u-x)p(x)\mathrm{d}x+\lambda\int_u^\infty w(u,x-u)p(x)\mathrm{d}x$$

(见[1]中式(2.16)), 该式为(2.3)在$\beta=0$, $\gamma=0$时的特例; 对于$\beta=0$, $\gamma=0$即$r(t)=\delta t$时的模型(1.1), [1]中得出与(2.4)同样的结论(见[1]中式(2.28)), 显然我们在更广的范围内得到了该式.

§3. 破产时罚金折现期望的渐近公式

对两个定义在$[0,\infty)$上可积的函数f_1, f_2, 它们的卷积为

$$(f_1 * f_2)(x) = \int_0^x f_1(y) f_2(x-y)\mathrm{d}y, \qquad x \ge 0.$$

注意到$f_1 * f_2 = f_2 * f_1$, 令

$$g(x) = \frac{\lambda}{c}\int_x^\infty e^{-\rho(y-x)}p(y)\mathrm{d}y = \frac{\lambda}{c}\int_0^\infty e^{-\rho z}p(x+z)\mathrm{d}z, \quad x \ge 0, \tag{3.1}$$

$$h(x) = \frac{\lambda}{c}\int_x^\infty e^{-\rho(u-x)}\omega(u)\mathrm{d}u = \frac{\lambda}{c}\int_x^\infty\int_0^\infty e^{-\rho(u-x)}w(u,y)p(u+y)\mathrm{d}y\mathrm{d}u, \quad x \ge 0, \tag{3.2}$$

其中ρ为方程(2.2)的非负根. 方程(2.4)可化为

$$\phi = \phi * g + h. \tag{3.3}$$

引理 3.1 设$z_1(x), z_2(x)$为$[0,\infty)$上两个非负函数, 实数a满足$\int_0^\infty e^{ax}z_1(x)\mathrm{d}x = 1$, $z_2(x)$是充分正则的. 若函数$Z(x)$是更新方程$Z(x) = (z_1 * Z)(x) + z_2(x)$, $x \ge 0$的解, 则有:

$$\lim_{x\to\infty} e^{ax}Z(x) = \Big(\int_0^\infty e^{ay}z_2(y)\mathrm{d}y\Big)\Big/\Big(\int_0^\infty y e^{ay}z_1(y)\mathrm{d}y\Big).$$

证明参见文献[6], [7]中关键更新定理部分.

定理 3.1 若$F(x)$有连续的且充分正则的概率密度函数$p(x)$, $w(x,y)$关于变量x是连续的, ρ、$-R$分别为方程(2.2)的唯一非负根和负根, 则有:

$$\phi(u) \sim \frac{\lambda\displaystyle\int_0^\infty\int_0^\infty w(x,y)(e^{Rx} - e^{-\rho x})p(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\lambda\displaystyle\int_0^\infty e^{Rx}xp(x)\mathrm{d}x - c}e^{-Ru}, \qquad u \to \infty. \tag{3.4}$$

证明: 由式(2.4)、(3.3)知$\phi(u)$为更新方程$\phi(u) = (g * \phi)(u) + h(u)$, $u \ge 0$的解. 显然$g(u)$, $h(u)$为$[0,\infty)$上两个非负函数, $h(u)$是充分正则的. 考虑到ρ、$-R$分别为方程(2.2)的唯一非负根和负根, 并交换积分顺序得:

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty e^{Rx}g(x)\mathrm{d}x &= \frac{\lambda}{c}\int_0^\infty e^{Rx}\Big(\int_x^\infty e^{-\rho(y-x)}p(y)\mathrm{d}y\Big)\mathrm{d}x \\
&= \frac{\lambda}{c(\rho+R)}\int_0^\infty (e^{(\rho+R)y} - 1)e^{-\rho y}p(y)\mathrm{d}y \\
&= \frac{\lambda}{c(\rho+R)}\Big(\int_0^\infty e^{Ry}p(y)\mathrm{d}y - \int_0^\infty e^{-\rho y}p(y)\mathrm{d}y\Big) \\
&= \frac{\lambda\displaystyle\int_0^\infty e^{Ry}p(y)\mathrm{d}y + c\rho - \lambda - \delta + \beta^2/2 + \lambda^*(e^{-\gamma} - 1)}{c(\rho+R)} \\
&= \frac{\lambda\displaystyle\int_0^\infty e^{Ry}p(y)\mathrm{d}y - cR - \lambda - \delta + \beta^2/2 + \lambda^*(e^{-\gamma} - 1)}{c(\rho+R)} + 1 = 1.
\end{aligned} \tag{3.5}$$

由引理3.1知:

$$\lim_{u\to\infty} e^{Ru}\phi(u)=\Big(\int_0^\infty e^{Rx}h(x)\mathrm{d}x\Big)\Big/\Big(\int_0^\infty xe^{Rx}g(x)\mathrm{d}x\Big). \tag{3.6}$$

从(3.2), 通过改变积分顺序得:

$$\begin{aligned}\int_0^\infty e^{Rx}h(x)\mathrm{d}x &= \frac{\lambda}{c}\int_0^\infty e^{Rx}\Big(\int_x^\infty e^{-\rho(u-x)}\omega(u)\mathrm{d}u\Big)\mathrm{d}x\\ &= \frac{\lambda}{c(\rho+R)}\int_0^\infty (e^{(\rho+R)u}-1)e^{-\rho u}\omega(u)\mathrm{d}u\\ &= \frac{\lambda}{c(\rho+R)}\int_0^\infty\int_0^\infty (e^{Ru}-e^{-\rho u})w(u,y)p(u+y)\mathrm{d}u\mathrm{d}y.\end{aligned} \tag{3.7}$$

从(3.1), 通过改变积分顺序得:

$$\begin{aligned}\int_0^\infty e^{-\xi x}g(x)\mathrm{d}x &= \frac{\lambda}{c}\int_0^\infty e^{-\xi x}\Big(\int_x^\infty e^{-\rho(y-x)}p(y)\mathrm{d}y\Big)\mathrm{d}x\\ &= \frac{\lambda}{c(\rho-\xi)}\int_0^\infty (e^{(\rho-\xi)y}-1)e^{-\rho y}p(y)\mathrm{d}y\\ &= \frac{\lambda}{c(\rho-\xi)}\Big(\int_0^\infty e^{-\xi y}p(y)\mathrm{d}y-\int_0^\infty e^{-\rho y}p(y)\mathrm{d}y\Big).\end{aligned} \tag{3.8}$$

由(3.8)对ξ求导得:

$$-\int_0^\infty e^{-\xi x}xg(x)\mathrm{d}x=\Big(\int_0^\infty e^{-\xi x}g(x)\mathrm{d}x-\lambda c^{-1}\int_0^\infty e^{-\xi x}xp(x)\mathrm{d}x\Big)\Big/(\rho-\xi), \tag{3.9}$$

把$\xi=-R$代入(3.9), 并注意到(3.5)得:

$$\begin{aligned}\int_0^\infty e^{Rx}xg(x)\mathrm{d}x &= \Big(-\int_0^\infty e^{Rx}g(x)\mathrm{d}x+\lambda c^{-1}\int_0^\infty e^{Rx}xp(x)\mathrm{d}x\Big)\Big/(\rho+R)\\ &= \Big(-1+\lambda c^{-1}\int_0^\infty e^{Rx}xp(x)\mathrm{d}x\Big)\Big/(\rho+R),\end{aligned} \tag{3.10}$$

由(3.6), (3.7), (3.10)得:

$$\lim_{u\to\infty} e^{Ru}\phi(u)=\Big(\lambda\int_0^\infty\int_0^\infty w(x,y)(e^{Rx}-e^{-\rho x})p(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\Big)\Big/\Big(\lambda\int_0^\infty e^{Rx}xp(x)\mathrm{d}x-c\Big).$$

故(3.4)成立. □

注 [1]中有式(4.10):

$$\phi(u)\sim\frac{\lambda\int_0^\infty\int_0^\infty w(x,y)(e^{Rx}-e^{-\rho x})p(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{-\lambda\widehat{p}'(-R)-c}e^{-Ru},\qquad u\to\infty,$$

式(4.15):

$$\psi(u)\sim\frac{c-\lambda\mu}{-\lambda\widehat{p}'(-R)-c}e^{-Ru},\qquad u\to\infty\ (\text{精算数学中一个熟知的公式}),$$

式(4.18):

$$\phi(u) \sim \frac{\delta}{-\lambda\widehat{p}'(-R)-c}\Big(\frac{1}{R}+\frac{1}{\rho}\Big)e^{-Ru}, \qquad u\to\infty.$$

容易看出，[1]中式(4.10), (4.15), (4.18)分别为(3.4)在如下三种情况下的特例: (1) $\beta=0$, $\gamma=0$. (2) $w(x,y)\equiv 1$, $\delta=0$, $\beta=0$, $\gamma=0$. (3) $w(x,y)\equiv 1$, $\beta=0$, $\gamma=0$.

参 考 文 献

[1] Gerber, H.U. and Shiu, E.S.W., On the time value of ruin, *North American Actuarial Journal*, **2(1)**(1998), 48–78.

[2] Pavlova, K.P. and Willmot, G.E., The discrete stationary renewal risk model and the Gerber-Shiu discounted penalty function, *Insurance: Mathematics and Economics*, **35(2)**(2004), 267–277.

[3] Li, S.M. and Lu, Y., On the expected discounted penalty functions for two classes of risk processes, *Insurance: Mathematics and Economics*, **36(2)**(2005), 179–193.

[4] 何文炯, 蒋庆荣, 随机利率下的增额寿险, 高校应用数学学报, **13A(2)**(1998), 145–152.

[5] 刘凌云, 汪荣明, 一类随机利率下的增额寿险模型, 应用概率统计, **17(3)**(2001), 283–290.

[6] Feller, W., *An Introduction to Probability Theory and Its Applications* (Vol. 2), Wiley, 1971.

[7] Resnick, S.I., *Adventures in Stochastic Processes*, Birkhauser, 1992.

The Expected Discounted Penalty at Ruin under a Stochastic Interest Rate

Wang Houchun

(*Department of Mathematics & Physics, Anhui University of Architecture, Hefei, 230022*)

In the classical risk model, the conception of the expected discounted penalty at ruin with a stochastic interest rate is introduced. The interest randomness is described by standard Wiener process and Poisson process. The renewal equation for the expected discounted penalty at ruin is derived, and the asymptotic formula for it is derived by virtue of this equation.

Keywords: Expected discounted penalty at ruin, renewal equation, standard Wiener process, Poisson process, ruin probability.

AMS Subject Classification: 62P05, 60G46.