应用概率统计 第二十五卷
第一期 2009年2月

Chinese Journal of Applied Probability
and Statistics Vol.25 No.1 Feb. 2009

正态总体均值与标准差比在序约束下的广义p-值检验 *

李树有
(辽宁工业大学数理系, 锦州, 121001)

史宁中 张宝学
(东北师范大学数学与统计学院, 长春, 130024)

摘 要

本文利用广义p-值和U-I检验法研究了多个正态总体均值与标准差比在简单半序和树序约束下的检验问题. 提出了广义检验变量, 得到了多个正态总体均值与标准差比在简单半序和树序约束下检验问题的广义p-值. 同时运用Monte Carlo方法给出了模拟结果.

关键词: 广义p-值, 广义检验变量, U-I检验法, 正态总体, 半序约束.

学科分类号: O212.1.

§1. 引 言

关于一个正态总体的分布参数均值或方差的单边和双边检验问题都有相应的一致最优势检验或一致最优势无偏检验的方法. 在检验的过程中, 都得到相应检验统计量的精确分布. 对一个正态总体的两个分布参数均值和方差的同时单边检验问题, 例如检验问题: $H_0: \mu \geq \mu_0, \sigma^2 \leq \sigma_0^2$ v.s. $H_1:$ not H_0, 史宁中[1]介绍了用U-I检验法(Union-Intersection)考虑似然比检验统计量的精确分布, 通过计算p值, 从而给出了该问题的一种解决方法. 关于两个正态总体的分布参数均值差的单边和双边检验问题, 对于方差已知和方差未知且相等的情况都给出了检验方法, 考虑的是检验统计量的精确分布. 对于方差未知且不等的情况(称其为Behrens-Fisher检验问题), 如果不用大样本情况下检验统计量的渐近分布而考虑检验统计量的精确分布, 计算p-值或临界值的方法, 都会遇到p-值或临界值都与未知方差有关, 此时称两个未知方差为讨厌参数, 从而检验问题无法解决. Tsui, K.W.和Weerahandi, S.[2]提出的广义检验统计量和广义p-值的概念, 要求广义检验统计量的分布与讨厌参数无关, 从而利用构造广义检验统计量和计算广义p-值给出了Behrens-Fisher问题的检验方法. Weerahandi, S.[3]应用广义p-值理论讨论了随机效应模型中的方差分量的单边检验问题. 并指出当考虑方差分量为零的检验问题时, 用所构造的广义检验统计量给出的检验恰是通常所用的F检验. Chou, Y.M.和Owen, D.B.[4]考虑了两个正态总体的分布参数均值与标准差比等值的似然比检验问题, 讨论的是大样本条件下似然比检验统计量的渐近分布. 关于多个正态总体的分布参数均值与标准差比满足序约束的

*国家自然科学基金(10431010, 10571020)、辽宁省教育厅基金(20060409)资助.
本文2006年9月19日收到, 2008年5月23日收到修改稿.

检验问题, 例如考虑简单半序约束的检验问题:

$$H_0:\frac{\mu_1}{\sigma_1}\le\frac{\mu_2}{\sigma_2}\le\cdots\le\frac{\mu_k}{\sigma_k}\qquad \text{v.s.}\qquad H_1:\text{not}\ \ H_0.$$

利用通常的检验方法无法进行检验. 到目前为止还没有好的解决办法. 该问题在生物学, 医药, 商业投资, 无线电通讯等许多领域都会遇到, 有很强的实际背景. 关于多个正态总体的分布参数均值与方差同时满足简单半序约束的估计问题, 史宁中[5, 6]给出了参数均值与方差的极大似然估计的迭代算法. 但极大似然估计量无法用式子表达出来. 因而无法用极大似然估计量考虑相应的检验问题. 本文利用广义p-值理论和U-I检验法探讨了多个正态总体均值与标准差比满足简单半序约束的检验问题. 构造了广义检验变量, 得到了多个正态总体均值与标准差比满足序约束的检验问题的广义p-值. 同时运用Monte Carlo方法给出了模拟结果.

§2. 一些准备知识

对于一般的参数单边假设检验问题:

$$H_0:\theta\le\theta_0\qquad \text{v.s.}\qquad H_1:\theta>\theta_0,\tag{2.1}$$

通常考虑当H_0为真时事件$C_x=\{X|T(X)\ge T(x)\}$的概率. 其中$T(X)$和$T(x)$分别是参数θ的一个估计量和估计值. 称

$$p=\sup_{\theta\in H_0}\mathsf{P}\{X\in C_x|\theta\}\tag{2.2}$$

为检验问题(2.1)的p-值. 当p-值较小, 意味着拒绝原假设H_0.

当考虑讨厌参数出现的检验问题, 通常得到的p-值与讨厌参数有关, 从而无法进行检验. 为了解决此类检验问题, Tsui, K.W.和Weerahandi, S.[2]提出了如下的广义检验统计量和广义p-值的概念.

对于检验问题(2.1), $\xi=(\theta,\eta)$为未知参数, 其中θ为兴趣参数, η为讨厌参数. 如果构造的检验统计量$T(X,x,\xi)$满足

(1) 对给定x时, $T(X,x,\xi_0)$的分布和$T(x,x,\xi_0)$都与η无关. 其中$\xi_0=(\theta_0,\eta)$;

(2) 对给定x和η时, $\mathsf{P}(T(X,x,\xi)\ge T(x,x,\xi)|\theta)$关于$\theta$是递增的.

则称$T(X,x,\xi)$为检验问题(2.1)的广义检验统计量. 称集合$C_x(\xi)=\{X|T(X,x,\xi)\ge T(x,x,\xi)\}$为广义极域. 称$p=\sup\limits_{\theta\in H_0}\mathsf{P}\{X\in C_x(\xi)|\theta\}$为广义$p$值. 由广义检验统计量的定义知

$$p=\sup_{\theta\in H_0}\mathsf{P}\{X\in C_x(\xi)|\theta\}=\mathsf{P}\{T(X,x,\xi)\ge T(x,x,\xi)|\theta=\theta_0\}.\tag{2.3}$$

史宁中[1]对复合零假设的检验问题提出了U-I检验法(Union-Intersection). 对于检验问题:

$$H_0: \theta \in \Theta_0 \qquad \text{v.s.} \qquad H_1: \theta \notin \Theta_0,$$

其中Θ_0是参数空间Θ的一个非单点的真子集, 且$\Theta_0 = \bigcap\limits_{i=1}^{k} \Theta_{0i}$, 于是原检验问题就转化检验问题:

$$H_0: \theta \in \bigcap_{i=1}^{k} \Theta_{0i} \qquad \text{v.s.} \qquad H_1: \theta \notin \bigcap_{i=1}^{k} \Theta_{0i},$$

即零假设是由k个子零假设的共同部分组成, 其中子零假设分别为$H_{0i}: \theta \in \Theta_{0i}$, $i = 1, 2, \cdots, k$. U-I检验法的基本思想是: 如果上述k个子零假设至少有一个被拒绝, 则拒绝H_0.

设$T_i(X)$是检验H_{0i}的检验统计量, 当至少有一个$T_i(x)$较大时或至少有一个$p_i = \sup\limits_{\theta \in H_{0i}} \mathsf{P}_\theta\{T_i(X) \geq T_i(x)\}$较小时拒绝$H_{0i}$, 从而拒绝$H_0$. 对于$H_0$而言, p值应为$p_0 = \min\limits_{1 \leq i \leq k} \{p_i\}$, 通常情况下, 当$p_0 \leq \alpha/k$时, 拒绝$H_0$.

§3. 主要理论结果

设$X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$, $i = 1, 2, \cdots, k$是相互独立的正态总体. 其中μ_i和σ_i^2是未知参数. X_{ij}, $i = 1, 2, \cdots, k$, $j = 1, 2, \cdots, n_i$为取自正态总体X_i的一个样本. 考虑简单半序的检验问题:

$$H_0: \frac{\mu_1}{\sigma_1} \leq \frac{\mu_2}{\sigma_2} \leq \cdots \leq \frac{\mu_k}{\sigma_k} \qquad \text{v.s.} \qquad H_1: \text{not} \;\; H_0. \tag{3.1}$$

设$\theta_i = \mu_i/\sigma_i - \mu_{i+1}/\sigma_{i+1}$, $i = 1, 2, \cdots, k-1$, $\Theta_{0i} = \{(\mu_1/\sigma_1, \mu_2/\sigma_2, \cdots, \mu_k/\sigma_k): \theta_i \leq 0$, $\mu_j \in (-\infty, +\infty)$, $\sigma_j > 0$, $j = 1, 2, \cdots, k\}$, 则上述检验问题转化为:

$$H_0: \theta \in \bigcap_{i=1}^{k-1} \Theta_{0i} \qquad \text{v.s.} \qquad H_1: \theta \notin \bigcap_{i=1}^{k-1} \Theta_{0i}. \tag{3.2}$$

对于检验问题:

$$H_{0i}: \theta \in \Theta_{0i} \qquad \text{v.s.} \qquad H_{1i}: \theta \notin \Theta_{0i}, \tag{3.3}$$

其等价于检验问题:

$$H_{0i}: \theta_i \leq 0 \qquad \text{v.s.} \qquad H_{1i}: \theta_i > 0. \tag{3.4}$$

对于检验问题(3.4), 考虑检验统计量:

$$\begin{aligned} & T((\overline{X}_i, \overline{X}_{i+1}, S_i, S_{i+1}), (\overline{x}_i, \overline{x}_{i+1}, s_i, s_{i+1}), \xi_i) \\ = \;\; & \theta_i - \Big[\frac{\overline{x}_i - (\overline{X}_i - \mu_i) s_i/S_i}{(s_i/S_i) \cdot \sigma_i} - \frac{\overline{x}_{i+1} - (\overline{X}_{i+1} - \mu_{i+1}) s_{i+1}/S_{i+1}}{(s_{i+1}/S_{i+1}) \cdot \sigma_{i+1}}\Big], \end{aligned}$$

其中$\xi_i=(\theta_i,\sigma)$, θ_i为兴趣参数, $\sigma=(\sigma_i,\sigma_{i+1})$为讨厌参数. $\overline{X}_i=(1/n_i)\cdot\sum\limits_{j=1}^{n_i}X_{ij}$, $S_i^2=(1/n_i)\cdot\sum\limits_{j=1}^{n_i}(X_{ij}-\overline{X}_i)^2$.

可以验证上述检验统计量满足广义检验统计量的两个条件:

(1) $T((\overline{x}_i,\overline{x}_{i+1},s_i,s_{i+1}),(\overline{x}_i,\overline{x}_{i+1},s_i,s_{i+1}),\xi_{i0})=0$与$\xi_{i0}=(\theta_{i0},\sigma)$无关. 对于给定的$(\overline{x}_i,\overline{x}_{i+1},s_i,s_{i+1})$和$\xi_{i0}=(\theta_{i0},\sigma)$, 检验统计量$T((\overline{X}_i,\overline{X}_{i+1},S_i,S_{i+1}),(\overline{x}_i,\overline{x}_{i+1},s_i,s_{i+1}),\xi_{i0})$的分布与讨厌参数无关.

(2) 对于给定的$(\overline{x}_i,\overline{x}_{i+1},s_i,s_{i+1})$和$\sigma$,

$$\begin{aligned}&\mathsf{P}\{T((\overline{X}_i,\overline{X}_{i+1},S_i,S_{i+1}),(\overline{x}_i,\overline{x}_{i+1},s_i,s_{i+1}),\xi_i)\\&\quad\geq T((\overline{x}_i,\overline{x}_{i+1},s_i,s_{i+1}),(\overline{x}_i,\overline{x}_{i+1},s_i,s_{i+1}),\xi_i)|\theta_i\}\end{aligned}$$

关于θ_i是递增的.

对于假设检验问题(3.4)的广义p值为

$$\begin{aligned}p_i&=\mathsf{P}\{T((\overline{X}_i,\overline{X}_{i+1},S_i,S_{i+1}),(\overline{x}_i,\overline{x}_{i+1},s_i,s_{i+1}),\xi_i)\\&\quad\geq T((\overline{x}_i,\overline{x}_{i+1},s_i,s_{i+1}),(\overline{x}_i,\overline{x}_{i+1},s_i,s_{i+1}),\xi_i)|\theta_i=0\}\\&=\mathsf{P}\{T((\overline{X}_i,\overline{X}_{i+1},S_i,S_{i+1}),(\overline{x}_i,\overline{x}_{i+1},s_i,s_{i+1}),\xi_i)\geq 0|\theta_i=0\}\\&=\mathsf{P}\Big\{\theta_i-\Big[\frac{\overline{x}_i-(\overline{X}_i-\mu_i)s_i/S_i}{(s_i/S_i)\cdot\sigma_i}-\frac{\overline{x}_{i+1}-(\overline{X}_{i+1}-\mu_{i+1})s_{i+1}/S_{i+1}}{(s_{i+1}/S_{i+1})\cdot\sigma_{i+1}}\Big]\geq 0\Big|\theta_i=0\Big\}\\&=\mathsf{P}\Big\{\frac{\overline{x}_{i+1}-(\overline{X}_{i+1}-\mu_{i+1})s_{i+1}/S_{i+1}}{(s_{i+1}/S_{i+1})\cdot\sigma_{i+1}}-\frac{\overline{x}_i-(\overline{X}_i-\mu_i)s_i/S_i}{(s_i/S_i)\cdot\sigma_i}\geq 0\Big\}\\&=\mathsf{P}\Big\{\Big(\frac{\overline{x}_{i+1}}{\sqrt{n_{i+1}s_{i+1}^2/(n_{i+1}S_{i+1}^2/\sigma_{i+1}^2)}}-\frac{\overline{X}_{i+1}-\mu_{i+1}}{\sqrt{n_{i+1}}\cdot(\sigma_{i+1}/\sqrt{n_{i+1}})}\Big)\\&\quad-\Big(\frac{\overline{x}_i}{\sqrt{n_is_i^2/(n_iS_i^2/\sigma_i^2)}}-\frac{\overline{X}_i-\mu_i}{\sqrt{n_i}\cdot(\sigma_i/\sqrt{n_i})}\Big)\geq 0\Big\}\\&=\mathsf{P}\Big\{\Big(\frac{\overline{x}_{i+1}}{\sqrt{n_{i+1}s_{i+1}^2/U_{i+1}}}-\frac{Z_{i+1}}{\sqrt{n_{i+1}}}\Big)-\Big(\frac{\overline{x}_i}{\sqrt{n_is_i^2/U_i}}-\frac{Z_i}{\sqrt{n_i}}\Big)\geq 0\Big\}\\&=\mathsf{E}_{U^{(i)}}\{\phi(U^{(i)})\}.\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}&Z_i=\sqrt{n_i}\frac{\overline{X}_i-\mu_i}{\sigma_i}\sim N(0,1),\qquad U_i=\frac{n_iS_i^2}{\sigma_i^2}\sim\chi^2_{n_i-1},\qquad i=1,2,\cdots,k;\\&Z^{(i)}=\frac{Z_{i+1}}{\sqrt{n_{i+1}}}-\frac{Z_i}{\sqrt{n_i}}\sim N\Big(0,\frac{1}{n_{i+1}}+\frac{1}{n_i}\Big),\\&U^{(i)}=\frac{\overline{x}_{i+1}}{\sqrt{n_{i+1}s_{i+1}^2}}\sqrt{U_{i+1}}-\frac{\overline{x}_i}{\sqrt{n_is_i^2}}\sqrt{U_i}\sim\chi_{n_{i+1}+n_i-2},\qquad i=1,2,\cdots,k-1,\end{aligned}$$

$\phi(x)$是随机变量$Z^{(i)}$的分布函数, $\mathsf{E}_{U^{(i)}}\{\phi(U^{(i)})\}$是关于随机变量$U^{(i)}$的函数的数学期望.

由U-I检验法知, 检验问题(3.1)的广义p-值为$p_0 = \min\limits_{1\le i\le k-1}\{p_i\}$. 对给定水平概率$\alpha$, 通常情况下, 当$p_0 \le \alpha/(k-1)$时, 拒绝$H_0$.

类似上面的讨论, 考虑在树序约束的检验问题:

$$H_0: \frac{\mu_1}{\sigma_1} \le \frac{\mu_i}{\sigma_i},\quad i=2,3,\cdots,k \qquad \text{v.s.} \qquad H_1: \text{not}\ \ H_0. \tag{3.5}$$

设$\theta_i = \mu_1/\sigma_1 - \mu_i/\sigma_i$, $i=2,3,\cdots,k$, $\Theta_{0i} = \{(\mu_1/\sigma_1, \mu_2/\sigma_2, \cdots, \mu_k/\sigma_k): \theta_i \le 0$, $\mu_j \in (-\infty, +\infty)$, $\sigma_j > 0$, $j=1,2,\cdots,k\}$, 则上述检验问题转化为:

$$H_0: \theta \in \bigcap_{i=1}^{k-1} \Theta_{0i} \qquad \text{v.s.} \qquad H_1: \theta \notin \bigcap_{i=1}^{k-1} \Theta_{0i}. \tag{3.6}$$

对于检验问题:

$$H_{0i}: \theta \in \Theta_{0i} \qquad \text{v.s.} \qquad H_{1i}: \theta \notin \Theta_{0i}, \tag{3.7}$$

其等价于检验问题:

$$H_{0i}: \theta_i \le 0 \qquad \text{v.s.} \qquad H_{1i}: \theta_i > 0. \tag{3.8}$$

对于检验问题(3.8), 考虑广义检验统计量:

$$T((\overline{X}_1, \overline{X}_i, S_1, S_i), (\overline{x}_1, \overline{x}_i, s_1, s_i), \xi_i) = \theta_i - \Big[\frac{\overline{x}_1 - (\overline{X}_1 - \mu_1)s_1/S_1}{(s_1/S_1)\cdot\sigma_1} - \frac{\overline{x}_i - (\overline{X}_i - \mu_i)s_i/S_i}{(s_i/S_i)\cdot\sigma_i}\Big],$$

其中$\xi_i = (\theta_i, \sigma)$, θ_i为兴趣参数, $\sigma = (\sigma_i, \sigma_{i+1})$为讨厌参数. $\overline{X}_i = (1/n_i)\cdot\sum\limits_{j=1}^{n_i} X_{ij}$, $S_i^2 = (1/n_i)\cdot\sum\limits_{j=1}^{n_i}(X_{ij} - \overline{X}_i)^2$.

对于假设检验问题(3.8)的广义p值为

$$\begin{aligned}
p_i &= \mathsf{P}\{T((\overline{X}_1, \overline{X}_i, S_1, S_i), (\overline{x}_1, \overline{x}_i, s_1, s_i), \xi_i) \\
&\quad \ge T((\overline{x}_1, \overline{x}_i, s_1, s_i), (\overline{x}_1, \overline{x}_i, s_1, s_i), \xi_i) | \theta_i = 0\} \\
&= \mathsf{P}\{T((\overline{X}_1, \overline{X}_i, S_1, S_i), (\overline{x}_1, \overline{x}_i, s_1, s_i), \xi_i) \ge 0 | \theta_i = 0\} \\
&= \mathsf{P}\Big\{\theta_i - \Big[\frac{\overline{x}_1 - (\overline{X}_1 - \mu_1)s_1/S_1}{(s_1/S_1)\cdot\sigma_1} - \frac{\overline{x}_i - (\overline{X}_i - \mu_i)s_i/S_i}{(s_i/S_i)\cdot\sigma_i}\Big] \ge 0 \Big| \theta_i = 0\Big\} \\
&= \mathsf{P}\Big\{\Big(\frac{\overline{x}_i}{\sqrt{n_i s_i^2/(n_i S_i^2/\sigma_i^2)}} - \frac{\overline{X}_i - \mu_i}{\sqrt{n_i}\cdot(\sigma_i/\sqrt{n_i})}\Big) \\
&\quad - \Big(\frac{\overline{x}_1}{\sqrt{n_1 s_1^2/(n_1 S_1^2/\sigma_1^2)}} - \frac{\overline{X}_1 - \mu_1}{\sqrt{n_1}\cdot(\sigma_1/\sqrt{n_1})}\Big) \ge 0\Big\} \\
&= \mathsf{P}\Big\{\Big(\frac{\overline{x}_i}{\sqrt{n_i s_i^2/U_i}} - \frac{Z_i}{\sqrt{n_i}}\Big) - \Big(\frac{\overline{x}_1}{\sqrt{n_1 s_1^2/U_1}} - \frac{Z_1}{\sqrt{n_1}}\Big) \ge 0\Big\} \\
&= \mathsf{E}_{U^{(i)}}\{\phi(U^{(i)})\}.
\end{aligned}$$

其中

$$Z_i=\sqrt{n_i}\frac{\overline{X}_i-\mu_i}{\sigma_i}\sim N(0,1),\qquad U_i=\frac{n_iS_i^2}{\sigma_i^2}\sim\chi^2_{n_i-1},\qquad i=1,2,\cdots,k;$$

$$Z^{(i)}=\frac{Z_i}{\sqrt{n_i}}-\frac{Z_1}{\sqrt{n_1}}\sim N\Big(0,\frac{1}{n_i}+\frac{1}{n_1}\Big),$$

$$U^{(i)}=\frac{\overline{x}_i}{\sqrt{n_is_i^2}}\sqrt{U_i}-\frac{\overline{x}_1}{\sqrt{n_1s_1^2}}\sqrt{U_1}\sim\chi_{n_1+n_i-2},\qquad i=2,3,\cdots,k,$$

$\phi(x)$是随机变量$Z^{(i)}$的分布函数, $\mathsf{E}_{U^{(i)}}\{\phi(U^{(i)})\}$是关于随机变量$U^{(i)}$的函数的数学期望.

由U-I检验法知, 检验问题(3.1)的广义p-值为$p_0=\min\limits_{2\le i\le k}\{p_i\}$. 对给定水平概率$\alpha$, 通常情况下, 当$p_0\le\alpha/(k-1)$时, 拒绝$H_0$.

§4. 模拟计算结果

根据给出的简单半序检验问题的检验方法, 对四个正态总体$X\sim N(1,4)$, $Y\sim N(2,9)$, $Z\sim N(1,1)$和$W\sim N(2,1)$按不同顺序进行了模拟检验. 即假设检验问题:

$$H_0:\frac{\mu_1}{\sigma_1}\le\frac{\mu_2}{\sigma_2}\le\frac{\mu_3}{\sigma_3}\le\frac{\mu_4}{\sigma_4}\qquad\text{v.s.}\qquad H_1:\text{not}\ \ H_0.$$

取样本容量分别为$n_1=100$和1000, $n_2=120$和1200, $n_3=150$和1500, $n_4=200$和2000, 所得到的模拟结果是比较好的. 见表1和表2. 但当所取μ_i/σ_i和μ_{i+1}/σ_{i+1}的值相近时且样本容量不大时, 所得结果不够理想. 如表2中当正态总体取为$X_1\sim N(1,1)$, $X_2\sim N(1,4)$, $X_3\sim N(2,9)$和$X_4\sim N(2,1)$, 样本容量取为$n_1=100$, $n_2=120$, $n_3=150$和$n_4=200$, 分别得到的广义p值$p_1=0.0145514$, $p_2=0.4065876$和$p_3=0.9999999$. 从而假设检验问题的广义p值为$p_0=0.0145514$, 当取检验水平$\alpha=0.01$时, 不能拒绝H_0. 而$\mu_1/\sigma_1=1>0.5=\mu_2/\sigma_2$, 这就出现了检验结果与实际不符的情况. 但当样本容量扩大于原来的10倍, 检验结果与实际就相符. 实际上, 样本容量取$n_1=300$, $n_2=320$, $n_3=200$和$n_4=200$, 就分别得到的广义p值$p_1=0.0016234$, $p_2=0.7991203$和$p_3=0.9999999$. 从而检验结果与实际就相符.

根据给出的对树序检验问题的检验方法, 对四个正态总体$X\sim N(1,4)$, $Y\sim N(2,9)$, $Z\sim N(1,1)$和$W\sim N(2,1)$按不同顺序进行了模拟检验. 即假设检验问题:

$$H_0:\frac{\mu_1}{\sigma_1}\le\frac{\mu_i}{\sigma_i},\ \ i=2,3,\cdots,k\qquad\text{v.s.}\qquad H_1:\text{not}\ \ H_0.$$

取样本容量分别为$n_1=40$和400, $n_2=45$和450, $n_3=50$和500, $n_4=55$和550, 所得到的模拟结果是比较好的. 详见表3和表4. 在模拟计算过程中, 同样出现检验结果与实际不符的情况. 如表3中的第5列, 表4中的第3, 4, 5列. 主要原因就是均值与标准差的比值相近所取样本容量较小造成的.

在实际用该方法作检验时, 正态总体的均值与方差都未知, 为了得到符合实际的检验结果, 此时样本要取的多一些.

表1

正态总体	X_1	$N(1,4)$	$N(1,4)$	$N(2,1)$	$N(2,1)$	$N(1,1)$
	X_2	$N(2,9)$	$N(2,9)$	$N(1,1)$	$N(1,1)$	$N(2,1)$
	X_3	$N(1,1)$	$N(1,1)$	$N(2,9)$	$N(2,9)$	$N(1,4)$
	X_4	$N(2,1)$	$N(2,1)$	$N(1,4)$	$N(1,4)$	$N(2,9)$
样本容量	n_1	100	1000	100	1000	100
	n_2	120	1200	120	1200	120
	n_3	150	1500	150	1500	150
	n_4	200	2000	200	2000	200
广义p值	p_1	0.8027297	0.9533262	0.0014663	0.0000000	0.9849303
	p_2	0.8918026	0.9985219	0.3685742	0.0002367	3.305×10^{-7}
	p_3	0.9980658	1.0000000	0.2820717	0.0280359	0.9039147
	p_0	0.8027297	0.9533262	0.0014663	0.0000000	3.305×10^{-7}
检验水平α	α	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01
	$\alpha/(k-1)$	0.0033333	0.0033333	0.0033333	0.0033333	0.0033333
决策		不拒绝H_0	不拒绝H_0	拒绝H_0	拒绝H_0	拒绝H_0

表2

正态总体	X_1	$N(1,1)$	$N(1,1)$	$N(1,1)$	$N(1,1)$	$N(1,1)$
	X_2	$N(2,1)$	$N(1,4)$	$N(1,4)$	$N(1,4)$	$N(1,4)$
	X_3	$N(1,4)$	$N(2,1)$	$N(2,1)$	$N(2,9)$	$N(2,9)$
	X_4	$N(2,9)$	$N(2,9)$	$N(2,9)$	$N(2,1)$	$N(2,1)$
样本容量	n_1	1000	100	1000	100	1000
	n_2	1200	120	1200	120	1200
	n_3	1500	150	1500	150	1500
	n_4	2000	200	2000	200	2000
广义p值	p_1	1.0000000	0.1124311	3.981×10^{-7}	0.0145514	1.105×10^{-6}
	p_2	0.0000000	0.9999983	1.0000000	0.4065876	0.9467454
	p_3	0.9863504	9.390×10^{-6}	0.0000000	0.9999999	1.0000000
	p_0	0.0000000	9.390×10^{-6}	0.0000000	0.0145514	1.105×10^{-6}
检验水平α	α	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01
	$\alpha/(k-1)$	0.0033333	0.0033333	0.0033333	0.0033333	0.0033333
决策		拒绝H_0	拒绝H_0	拒绝H_0	不拒绝H_0	拒绝H_0

表3

正态总体	X_1	$N(1,4)$	$N(1,4)$	$N(1,1)$	$N(1,1)$
	X_2	$N(2,1)$	$N(2,1)$	$N(1,4)$	$N(1,4)$
	X_3	$N(1,1)$	$N(1,1)$	$N(2,1)$	$N(2,1)$
	X_4	$N(2,9)$	$N(2,9)$	$N(2,9)$	$N(2,9)$
样本容量	n_1	40	400	40	400
	n_2	45	450	45	450
	n_3	50	500	50	500
	n_4	55	550	55	550
广义 p 值	p_1	0.9870633	0.9999999	0.0267382	0.0020713
	p_2	0.9038747	0.9892801	0.9777665	0.9999960
	p_3	0.5709023	0.6648851	0.0405718	0.0038244
	p_0	0.5709023	0.6648851	0.0267382	0.0020713
检验水平α	α	0.01	0.01	0.01	0.01
	$\alpha/(k-1)$	0.0033333	0.0033333	0.0033333	0.0033333
决策		不拒绝H_0	不拒绝H_0	不拒绝H_0	拒绝H_0

表4

正态总体	X_1	$N(2,9)$	$N(2,9)$	$N(2,1)$	$N(2,1)$
	X_2	$N(2,1)$	$N(2,1)$	$N(1,4)$	$N(1,4)$
	X_3	$N(1,1)$	$N(1,1)$	$N(1,1)$	$N(1,1)$
	X_4	$N(1,4)$	$N(1,4)$	$N(2,9)$	$N(2,9)$
样本容量	n_1	40	400	40	400
	n_2	45	450	45	450
	n_3	50	500	50	500
	n_4	55	550	55	550
广义 p 值	p_1	0.9875406	1.0000000	0.0210612	3.376×10^{-10}
	p_2	0.6090530	0.9817604	0.1072743	0.0309142
	p_3	0.0278260	0.0222243	0.0576287	2.505×10^{-5}
	p_0	0.0278260	0.0222243	0.0210612	3.376×10^{-10}
检验水平α	α	0.01	0.01	0.01	0.01
	$\alpha/(k-1)$	0.0033333	0.0033333	0.0033333	0.0033333
决策		不拒绝H_0	不拒绝H_0	不拒绝H_0	拒绝H_0

参 考 文 献

[1] 史宁中, 统计检验的理论与方法, 科学出版社, 2008.

[2] Tsui, K.W. and Weerahandi, S., Generalized p values in significance testing of hypotheses in the presence of nuisance parameters, *Journal of the American Statistical Association*, **84**(1989), 602–607.

[3] Weerahandi, S., Testing variance components in mixed models with generalized p values, *Journal of the American Statistical Association*, **86**(1991), 151–153.

[4] Chou, Y.M. and Owen, D.B., A likelihood ratio test for the equality of proportions of two normal populations, *Commun. Statist. Theory Meth.*, **8**(1991), 2357–2374.

[5] Shi, N.Z., Maximum likelihood estimation of means and variances from normal populations and simultaneous order restriction, *J. Multivariate Anal.*, **50**(1994), 282–293.

[6] Shi, N.Z. and Jiang, H., Maximum likelihood estimation of isotonic normal means with unknown variances, *J. Multivariate Anal.*, **64**(1998), 183–195.

Testing Ratios of Means to Standard Deviations from Normal Populations under Order Restrictions with Generalized p Values

Li Shuyou

(*Department of Mathematics and Physics, Liaoning University of Technology, Jinzhou, 121001*)

Shi Ningzhong Zhang Baoxue

(*Institute of Mathematics and Statistics, Northeast Normal University, Changchun, 130024*)

A procedure for testing ratios of means to standard deviations from normal populations under semi-order restriction and tree order restriction is developed. The testing is performed on the basis of the generalized p value approach and U-I test and involves a one-dimensional numerical integration. The problem is always encountered in biology, medication, business investment, telecommunication, and so on. We propose the generalized test variable and obtain the generalized p values of the testing problem. Finally, simulation results are given.

Keywords: Generalized p value, generalized test variable, U-I test; normal population, semi-order restriction.

AMS Subject Classification: 62F03, 62H15.