应用简报

稳健贝叶斯方法下考虑理赔次数因素的汽车保险奖惩系统 *

王 奕 渲

(复旦大学数学科学学院, 上海, 200433)

摘 要

本文将稳健贝叶斯方法用于构造汽车保险奖惩系统并分析其敏感性. 用先验分布集合$\Gamma_\varepsilon=\{\pi:\pi=(1-\varepsilon)\pi_0+\varepsilon q, q\in Q\}$描述保单组合的风险异质性. 从而得到混合先验分布下的奖惩系统; 当q在Q内变化时, 对奖惩系统进行敏感性分析.

关键词: 奖惩系统, 稳健贝叶斯, 索赔频率.

学科分类号: O212.

§1. 引 言

在保险实务中, 除了某些常用的先验信息如车龄、驾龄外, 还有一些风险因素在投保时无法获得, 如投保人的驾驶技术以及风险防范意识等. 奖惩系统就是根据投保人的以往理赔记录调整对其收取的当期保费水平.

奖惩系统的三个要素是基础保费、奖惩系数和转移规则, 其中奖惩系数等于实收保费与基础保费的比. 本文所讨论的奖惩系统是没有考虑费用的纯保费奖惩系统.

由于汽车第三者责任保险的保险金是支付给第三方而非被保险人, 因此通常假设理赔次数与理赔金额相互独立, 并假设投保人的潜在未知风险只反映在理赔次数上, 且相同先验风险保单的每次理赔金额独立同分布, 由于理赔金额的水平只影响基础保费而不影响奖惩系数, 因此不妨假设每次理赔金额的均值为1. 从而将对奖惩系统的研究简化为对理赔次数的估计.

Dionne和Vanasse的理赔次数模型[1]假设理赔次数服从复合泊松分布, 即第i个被保险人在第t年的理赔次数服从参数为

$$\Lambda_{i,t}=\lambda_{i,t}u_i \tag{1.1}$$

的泊松分布, 其中$\lambda_{i,t}$是第i个被保险人在第t个年度的先验理赔频率, u_i体现保单组合的风险异质性, 然后对每位投保人的理赔次数做信度估计. 在Gomez等人的研究中[2], 所有投保人有着相同的先验期望理赔次数, 即$\Lambda_{i,t}=\Lambda_{l,t}$, $(i\neq l)$. 而本文以(1.1)为基础将稳健贝叶斯方法用于奖惩系统的构造和分析. 以所有满足一定条件的分布作为结构函数构造奖惩系

*国家重点基础研究发展计划资助项目(2007CB814904).

本文2006年9月21日收到, 2007年1月8日收到修改稿.

统, 其中假设投保人的先验理赔次数将随其投保时刻定价信息的变化而变化, 然后对奖惩系统做敏感性分析. 需要说明的是, 本文不考虑追奖对索赔行为及奖惩系统的影响.

§2. 奖惩系统的构造

定义 2.1 (1.1)的先验分布集合为

$$\Gamma_\varepsilon = \{\pi : \pi = (1-\varepsilon)\pi_0 + \varepsilon q, q \in Q\}, \tag{2.1}$$

其中$0 \le \varepsilon \le 1$, π_0为某一给定的期望为1的概率分布, $Q = \{$所有期望等于1且取值非负的概率分布$\}$.

记投保人i在以往t年的理赔次数记录为$(k_{i,j}; j = 1, \cdots, t)$, 其中$k_{ij}$是随机变量$K_{ij}$的实现.

本文的奖惩系统基于下述假设(C1)~(C4):

(C1) 理赔次数与理赔金额相互独立, 且每次的理赔金额独立同分布且期望等于1;

(C2) 各保险年度的理赔次数相互独立;

(C3) 使用平方误差损失函数, 即采用期望值定价原则;

(C4) 在给定参数u_i的条件下, 投保人i在第j年的理赔次数K_{ij}服从泊松分布, 即$K_{ij}|u_i \sim \mathrm{Poisson}(\lambda_{i,j}u_i)$, 其中未知参数$u_i$独立同分布, 不妨将$u_i$记做$u$, 并假设$u$属于参数空间$U$, 其先验分布记做$\pi$, $\pi \in \Gamma_\varepsilon$.

在假设(C1)~(C4)下, 对一个有着索赔次数记录$\vec{k}_i = (k_{i,j}; j = 1, \cdots, t)$的投保人收取的纯保费等于其理赔次数的后验期望, 即

$$P_{i,t+1} = \lambda_{i,t+1}\mathsf{E}_\pi(u|\vec{k}_i), \tag{2.2}$$

且对应的奖惩系数为

$$\mathrm{BF}_{i,t+1} = \frac{(1-\varepsilon)g(\vec{k}_i|\pi_0)\mathsf{E}_{\pi_0}(u|\vec{k}_i) + \varepsilon g(\vec{k}_i|q)\mathsf{E}_q(u|\vec{k}_i)}{g(\vec{k}_i|\pi)}, \tag{2.3}$$

其中$g(\vec{k}_i|\pi) = (1-\varepsilon)\displaystyle\int_U f(\vec{k}_i|u)\pi_0(u)\mathrm{d}u + \varepsilon\int_U f(\vec{k}_i|u)q(u)\mathrm{d}u$, $f(\vec{k}_i|u)$是$\vec{k}_i$在给定u下的条件分布, $g(\vec{k}_i|\pi_0) = \displaystyle\int_U f(\vec{k}_i|u)\pi_0(u)\mathrm{d}u$, $g(\vec{k}_i|q) = \int_U f(\vec{k}_i|u)q(u)\mathrm{d}u$.

分别记$\mathrm{BF}^{\pi_0}_{i,t+1}$和$\mathrm{BF}^{q}_{i,t+1}$为以$\pi_0$和$q$为先验分布得到的奖惩系数. 可以得到$\mathrm{BF}^{\pi_0}_{i,t+1} = \mathsf{E}_{\pi_0}(u|\vec{k}_i)$, $\mathrm{BF}^{q}_{i,t+1} = \mathsf{E}_q(u|\vec{k}_i)$及

$$\mathrm{BF}_{i,t+1} = \frac{(1-\varepsilon)g(\vec{k}_i|\pi_0)\mathrm{BF}^{\pi_0}_{i,t+1} + \varepsilon g(\vec{k}_i|q)\mathrm{BF}^{q}_{i,t+1}}{g(\vec{k}_i|\pi)}. \tag{2.4}$$

定义 2.2 给定$0 \le \varepsilon \le 1$, 称$z_{i,s} = \varepsilon g(\vec{k}_i|q)/g(\vec{k}_i|\pi)$为$f(\vec{k}_i)$在先验集$\Gamma_\varepsilon$下的贝叶斯信度.

在不引起歧义的情况下省去下标i. 从而(2.4)可以写成$\mathrm{BF}_{t+1}=(1-z_\varepsilon)\mathrm{BF}_{t+1}^{\pi_0}+z_\varepsilon\mathrm{BF}_{t+1}^{q}$. 可见, 信度$z_\varepsilon$的大小除了与先验分布因素$q$有关外, 还与$\varepsilon$有关. 若将$\pi(u)=(1-\varepsilon)\pi_0(u)+\varepsilon q(u)$视为变量$U$的混合先验分布, 那么$\mathrm{BF}_{t+1}$是基于该混合先验分布的奖惩系统.

特别的, (C4)下的

$$\mathrm{BF}_{t+1}=\frac{(1-\varepsilon)\mathrm{BF}_{t+1}^{\pi_0}\int_U e^{-\lambda_* u}u^{k_*}\pi_0(u)\mathrm{d}u+\varepsilon\mathrm{BF}_{t+1}^{q}\int_U e^{-\lambda_* u}u^{k_*}q(u)\mathrm{d}u}{(1-\varepsilon)\int_U e^{-\lambda_* u}u^{k_*}\pi_0(u)\mathrm{d}u+\varepsilon\int_U e^{-\lambda_* u}u^{k_*}q(u)\mathrm{d}u},$$

其中$\lambda_*=\sum\limits_{j=1}^{t}\lambda_{i,j}$, $k_*=\sum\limits_{j=1}^{t}k_{i,j}$, 即该奖惩系统仅与投保人以往保单年度的总期望理赔频率λ_*和总理赔次数k_*有关, 而与其在各年的分布没有关系.

§3. 敏感性分析

本节对先验分布集合(2.1)下的奖惩系统进行敏感性分析. 即分析当先验分布π在Γ_ε中变化时, 奖惩系统的变化范围或程度. 同样地, 在不引起歧义的情况下我们省去下标i.

首先可以得到奖惩系数(2.4)的上界和下界分别为

$$\inf_{\pi\in\Gamma_\varepsilon}(\mathrm{BF}_{t+1})=\inf_u\frac{AR_1(u)+R_2(u)}{BR_1(u)+C},\qquad \sup_{\pi\in\Gamma_\varepsilon}(\mathrm{BF}_{t+1})=\sup_u\frac{AR_1(u)+R_2(u)}{BR_1(u)+C},$$

其中$A=(1-\varepsilon)g(\vec{k}|\pi_0)\mathsf{E}_{\pi_0}(u|\vec{k})$, $B=(1-\varepsilon)g(\vec{k}|\pi_0)$, $C=\varepsilon$, $R_1(u)=u/f(\vec{k}|u)$, $R_2(u)=\varepsilon u$.

为了度量贝叶斯保费或奖惩系数的敏感性, 我们使用相对敏感度R.S.的概念[3], 其中R.S. $=[\sup(\mathrm{BF})-\inf(\mathrm{BF})]/[2\mathrm{BF}^{\pi_0}(\vec{k})]$.

特别地, 在假设C4下, 若π_0服从Gamma(α,α)分布, 则奖惩系统的上、下界及相对敏感度R.S.分别为

$$\inf_{\pi\in\Gamma_\varepsilon}(\mathrm{BF}_{t+1})=\inf_u\frac{AR_1(u)+R_2(u)}{BR_1(u)+C},\qquad \sup_{\pi\in\Gamma_\varepsilon}(\mathrm{BF}_{t+1})=\sup_u\frac{AR_1(u)+R_2(u)}{BR_1(u)+C},$$

其中

$$A=(1-\varepsilon)\frac{\alpha^\alpha(\alpha+k_*)\Gamma(\alpha+k_*)}{(\alpha+\lambda_*)^{\alpha+k_*+1}\Gamma(\alpha)},\qquad B=(1-\varepsilon)\frac{\alpha^\alpha\Gamma(\alpha+k_*)}{(\alpha+\lambda_*)^{\alpha+k_*}\Gamma(\alpha)},$$

$C=\varepsilon$, $R_1(u)=ue^{u\lambda_*}u^{-k_*}$, $R_2(u)=\varepsilon u$, $\mathrm{BF}^{\pi_0}=(\alpha+k_*)/(\alpha+\lambda_*)$.

§4. 数 值 例

在假设(C1)~(C4)下, 某投保人以往连续四年的先验索赔频率分别为$\vec{\lambda}_1=(0.1,0.1,0.1,0.1)$. 若$\pi_0$服从伽玛分布Gamma$(\alpha,\alpha)$, q服从逆高斯分布IG$(1,h)$, 其中$\alpha=9/10$, $h=1/9$, 当$\varepsilon=0.1$时, 对应于该投保人的奖惩系统见表1.

表1　$\varepsilon = 0.1$时给予该投保人的保费奖惩(单位: %)

t	k_*				
	0	1	2	3	4
0	100				
1	90.87	188.86	290.89	391.71	501.06
2	81.90	171.68	264.83	355.85	450.68
3	75.49	156.39	242.25	323.02	414.01
4	70.16	144.62	222.77	298.28	381.79

该奖惩系统的上、下确界和相对敏感度见表2, 其中单元格的第一个数为下确界, 第二个数为上确界, 第三个数为相对敏感度R.S..

表2　表1奖惩系统的敏感性分析(单位: %)

t	k_*				
	0	1	2	3	4
0	100				
1	0 95.69 53.16	169.12 226.22 15.03	279.45 551.92 46.98	376.17 1822.59 185.44	469.22 4718.55 433.60
2	0 86.62 52.93	150.46 191.30 11.82	252.91 343.51 17.18	342.10 677.45 47.29	428.06 1459.39 115.76
3	0 79.34 52.89	134.80 171.14 11.48	230.96 283.16 10.80	313.48 458.17 22.26	393.19 791.71 48.80
4	0 73.29 52.93	121.47 156.16 11.87	212.36 249.92 8.42	289.11 372.82 13.95	363.35 564.75 26.72

参 考 文 献

[1] Dionne, G, C. Vanasse, A generalization of automobile insurance rating models: the negative binomial distribution with a regression component, ASTIN Bulletin, 1989, 19, 199-212.

[2] Gomez, E., A. Hermandez, J.M. Perez, F.J. Vazquez-Polo, Measuring sensitivity in a bonus-malus system, Insurance: Mathematics and Economics, 2002, 31, 105-113.

[3] Sivaganesan, S., Sensitivity of some posterior summaries when the prior is unimodal with specified quantiles, The Canadian Journal of Statistics, 1991, 19, 57-65.