应用概率统计 第二十五卷
第三期 2009年6月

Chinese Journal of Applied Probability
and Statistics Vol.25 No.3 Jun. 2009

线性混合效应模型中方差分量的估计 *

许 王 莉

(中国人民大学统计学院, 北京, 100872)

摘 要

本文首先研究了含三个方差分量的线性混合随机效应模型改进的ANOVA估计, 此估计在均方损失下一致优于ANOVA估计. 由于这些方差估计取负值的概率大于零, 对得到的估计在某非负点采用截尾的方法得到非负估计是一种常用的方法. 对文章中提出的估计, 研究了此估计在某非负点截尾之后得到的估计在均方损失意义下优于截尾之前的估计的充分条件, 同时给出ANOVA估计在截尾之后优于它本身的充分条件, 而且将得到的结论推广到更一般的线性混合随机效应模型.

关键词: 线性混合随机效应模型, 非负估计, ANOVA估计.

学科分类号: O212.1.

§1. 引 言

随机效应模型是广泛应用于生存分析、医学、经济、质量控制等领域的一类模型, 对模型中方差参数估计的研究已经很多, 比如方差分析估计(ANOVA), 极大似然估计(MLE), 限制极大似然估计(REMLE), 最小范数二次无偏估计(MINQUE), 谱分解估计(SDE), Bayes估计等, 具体可参考文献[1–7]. 由于ANOVA估计具有显示表达式, 关于它的研究文献也比较多. LaMotte[8]证明了方差分量的非负无偏估计不存在的, 大量的文献是在均方损失下讨论ANOVA的非负估计, 比如Chow和Shao[9]提出了正的截尾估计, Portnoy[10]得到了广义Bayes估计以及它的容许性, Mathew, Sinha和Sutradhar[11]给出了非负的不变估计.

本文考虑了三个方差分量的线性混合随机效应模型

$$y = X\beta + U_1\alpha_1 + U_2\alpha_2 + \varepsilon. \tag{1.1}$$

其中, y是$n\times 1$的观测向量, X是$n\times p$的已知设计矩阵, U_1, U_2分别是$n\times q_1$, $n\times q_2$的已知矩阵, β是$p\times 1$未知参数向量, α_1,α_2分别为$q_1\times 1$, $q_2\times 1$的随机效应向量, ε是$n\times 1$的随机误差. $\alpha_1,\alpha_2,\varepsilon$相互独立, 且分别服从多元正态分布$N(0,\sigma_1^2 I)$, $N(0,\sigma_2^2 I)$, $N(0,\sigma^2 I)$.

对线性混合随机效应模型(1.1), 方差分量$\sigma_1^2,\sigma_2^2,\sigma^2$的ANOVA估计是二次统计量的线性组合. 范和王[12]在均方损失下修正了模型(1.1)的ANOVA估计, 它们的分析结果基于这样的ANOVA估计: 令$y^\tau(P_{(X,U_1)}-P_X)y$, $y^\tau(P_{(X,U_1,U_2)}-P_{(X,U_1)})y$, $y^\tau(I-P_{(X,U_1,U_2)})y$分别等于它们各自的数学期望得到的关于$\sigma_1^2,\sigma_2^2,\sigma^2$的方程组, 通过解该方程组得到ANOVA估计, 这

*国家自然科学基金项目(10701079)和教育部人文社会科学研究基金项目(08JC910002)资助.

本文2007年8月17日收到, 2007年12月15日收到修改稿.

里P_X表示X的投影阵. 但是, 如果(X,U_1)和X的维数相同, 或者(X,U_1,U_2)和(X,U_1)的维数相同, $\sigma_1^2,\sigma_2^2,\sigma^2$的ANOVA估计就不能唯一确定. 本文给出一组新的方差分量的ANOVA估计, 无妨分别记为$\sigma_{A1}^2,\sigma_{A2}^2$和$\sigma_A^2$, 避免了上述所提到的问题. 基于这样的ANOVA估计, 本文在一类估计族中构造方差参数σ_1^2,σ_2^2的修正ANOVA估计, 得到的估计分别记为σ_{M1}^2, σ_{M2}^2. 在均方损失意义下, σ_{M1}^2和σ_{M2}^2分别一致优于ANOVA估计σ_{A1}^2和σ_{A2}^2.

由于本文所给出的ANOVA估计, 修正的ANOVA估计取负值的概率都大于零, 很多文献在均方损失下讨论ANOVA的非负估计, 其中一类重要的方法就是把估计在非负点截尾. 对线性混合随机效应模型(1.1), 方差分量的ANOVA估计$\sigma_{A1}^2,\sigma_{A2}^2$和$\sigma_A^2$在零点截尾之后得到的估计在均方损失意义下分别一致优于截尾之前的估计. 但是对于本文中提出的估计$\sigma_{M1}^2,\sigma_{M2}^2$在非负点截尾之后是否优于截尾之前的估计? 对ANOVA估计, 在其他非负点截尾之后是否优于ANOVA估计? 本文在§3给出了在非负点满足什么条件的情况下, 截尾后估计优于截尾之前估计的充分条件. 在§4把结论推广到更一般的线性混合随机效应模型.

§2. ANOVA估计及其改进

为了构造改进的ANOVA估计, 首先引入ANOVA估计$\sigma_{A1}^2,\sigma_{A2}^2,\sigma^2$. 令$M_1=(X,U_2)$, $M_2=(X,U_1)$, $M_3=(X,U_1,U_2)$, $m_1=\mathrm{rank}(M_1)$, $m_2=\mathrm{rank}(M_2)$, $m_3=\mathrm{rank}(M_3)$. 取矩阵H_1,H_2,H_3分别满足条件$H_1M_1=0$, $H_1H_1^\tau=I_{n-m_1}$, $H_2M_2=0$, $H_2H_2^\tau=I_{n-m_2}$和$H_3M_3=0$, $H_3H_3^\tau=I_{n-m_3}$. 用H_1,H_2和H_3分别对模型(1.1)作变换, 令$z_1=H_1y$, $z_2=H_2y$, 得到如下新的模型,

$$\begin{aligned} z_1&=H_1U_1\alpha_1+H_1\varepsilon,\\ z_2&=H_2U_2\alpha_2+H_2\varepsilon,\\ z_3&=H_3\varepsilon. \end{aligned}$$

记$W_1=H_1U_1U_1^\tau H_1^\tau$, $W_2=H_2U_2U_2^\tau H_2^\tau$, 则$z_1\sim N_{n-m_1}(0,\sigma_1^2W_1+\sigma^2I)$, $z_2\sim N_{n-m_2}(0,\sigma_2^2W_2+\sigma^2I)$, $z_3\sim N_{n-m_3}(0,\sigma^2I)$, 令$z_1^\tau z_1$, $z_2^\tau z_2$, $z_3^\tau z_3$分别等于各自的数学期望, 可得

$$\begin{aligned} z_1^\tau z_1&=w_1\sigma_1^2+(n-m_1)\sigma^2,\\ z_2^\tau z_2&=w_2\sigma_2^2+(n-m_2)\sigma^2,\\ z_3^\tau z_3&=(n-m_3)\sigma^2. \end{aligned}\tag{2.1}$$

这里$w_1=\mathrm{tr}(W_1)$, $w_2=\mathrm{tr}(W_2)$. 解方程组(2.1)得

$$\begin{aligned} \sigma_A^2&=\frac{z_3^\tau z_3}{n-m_3},\\ \sigma_{A1}^2&=\frac{n-m_1}{w_1}\Big(\frac{z_1^\tau z_1}{n-m_1}-\frac{z_3^\tau z_3}{n-m_3}\Big),\\ \sigma_{A2}^2&=\frac{n-m_2}{w_2}\Big(\frac{z_2^\tau z_2}{n-m_2}-\frac{z_3^\tau z_3}{n-m_3}\Big). \end{aligned}$$

关于σ_1^2和σ_2^2, 为了得到均方损失意义下的修正ANOVA估计, 分别考虑具有下述形式的估计类

$$\mathcal{L}_1=\left\{\frac{a_{11}(n-m_1)}{w_1}\left(\frac{z_1^\tau z_1}{n-m_1}-\frac{a_{12}z_3^\tau z_3}{n-m_3}\right)\Big|0<a_{11}<1,a_{12}<1\right\},$$
$$\mathcal{L}_2=\left\{\frac{a_{21}(n-m_2)}{w_2}\left(\frac{z_2^\tau z_2}{n-m_2}-\frac{a_{22}z_3^\tau z_3}{n-m_3}\right)\Big|0<a_{21}<1,a_{22}<1\right\}.$$

事实上, 在上述估计类$\mathcal{L}_1,\mathcal{L}_2$中, $a_{12}<1$, $a_{22}<1$使得在这两个估计类中得到的估计, 它们取负值的概率分别小于σ_{A1}^2和σ_{A2}^2.

首先考虑σ_1^2的估计, 研究如何在估计类$\mathcal{L}_1$中选择合适a_{11},a_{12}. 实际上, 本文通过最小化估计类$\mathcal{L}_1$的均方误差(MSE)中σ_1^4和σ^4的系数得到a_{11},a_{12}. 首先计算MSE$(\mathcal{L}_1)$, 由于

$$\begin{aligned}\mathsf{Var}\,(\mathcal{L}_1)&=\frac{a_{11}^2(n-m_1)^2}{w_1^2}\left\{\mathsf{Var}\left(\frac{z_1^\tau z_1}{n-m_1}\right)+\mathsf{Var}\left(\frac{a_{12}z_3^\tau z_3}{n-m_3}\right)-\frac{2a_{12}\mathsf{Cov}\,(z_1^\tau z_1,z_3^\tau z_3)}{(n-m_1)(n-m_3)}\right\}\\&=\frac{a_{11}^2(n-m_1)^2}{w_1^2}\left\{\frac{2\mathrm{tr}((W_1\sigma_1^2+\sigma^2I_{n-m_1})^2)}{(n-m_1)^2}+\frac{2a_{12}^2\mathrm{tr}((I_{n-m_3}\sigma^2)^2)}{(n-m_3)^2}\right.\\&\quad\left.-\frac{4a_{12}\sigma^4\mathrm{tr}(H_1^\tau H_1H_3^\tau H_3)}{(n-m_1)(n-m_3)}\right\}\\&=\frac{a_{11}^2(n-m_1)^2}{w_1^2}\left\{\frac{2\mathrm{tr}(W_1^2)\sigma_1^4+4\mathrm{tr}(W_1)\sigma_1^2\sigma^2+2(n-m_1)\sigma^4}{(n-m_1)^2}\right.\\&\quad\left.+\frac{2a_{12}^2\sigma^4}{n-m_3}-\frac{4a_{12}\sigma^4}{n-m_1}\right\}\end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned}\mathsf{E}(\mathcal{L}_1)&=\frac{a_{11}(n-m_1)}{w_1}\left\{\mathsf{E}\Big(\frac{z_1^\tau z_1}{n-m_1}\Big)-\mathsf{E}\Big(\frac{a_{12}z_3^\tau z_3}{n-m_3}\Big)\right\}\\&=\frac{a_{11}(n-m_1)}{w_1}\left\{\frac{\mathrm{tr}(W_1)\sigma_1^2+(n-m_1)\sigma^2}{n-m_1}-a_{12}\sigma^2\right\},\end{aligned}$$

这里tr表示矩阵的迹, 可以得到

$$\begin{aligned}\mathrm{MSE}(\mathcal{L}_1)&=\mathsf{Var}\,(\mathcal{L}_1)+(\mathsf{E}(\mathcal{L}_1)-\sigma_1^2)^2\\&=\mathsf{Var}\,(\mathcal{L}_1)+\left\{(a_{11}-1)\sigma_1^2+\frac{a_{11}(n-m_1)}{w_1}(1-a_{12})\sigma^2\right\}^2\\&=\left\{\frac{2a_{11}^2\mathrm{tr}(W_1^2)}{w_1^2}+(a_{11}-1)^2\right\}\sigma_1^2\\&\quad+\frac{a_{11}^2(n-m_1)^2}{w_1^2}\left\{\frac{2}{n-m_1}+\frac{2a_{12}^2}{n-m_3}-\frac{4a_{12}}{n-m_1}+(1-a_{12})^2\right\}\sigma^2\\&\quad+\frac{2a_{11}}{w_1}\{2a_{11}+(1-a_{11})(n-m_1)(a_{12}-1)\}\\&=:g_1(a_{11})\sigma_1^4+g_2(a_{11},a_{12})\sigma^4+g_{12}(a_{11},a_{12})\sigma_1^2\sigma^2.\end{aligned}$$

不难证明, 最小化σ_1^4的系数, 以及给定a_{11}最小化σ^4的系数, 可得

$$a_{11}=\frac{w_1^2}{w_1^2+2\mathrm{tr}(W_1^2)}=:b_{11}\quad 和\quad a_{12}=\frac{(n-m_1+2)(n-m_3)}{(n-m_1)(n-m_3+2)}=:b_{12}.$$

最终得到σ_1^2的估计为

$$\sigma_{M1}^2=\frac{w_1(n-m_1)}{w_1^2+2\mathrm{tr}(W_1^2)}\Big(\frac{z_1^\tau z_1}{n-m_1}-\frac{(n-m_1+2)z_3^\tau z_3}{(n-m_1)(n-m_3+2)}\Big).$$

对于估计σ_{M1}^2, 有如下定理

定理 2.1 在均方损失意义下, 估计σ_{M1}^2优于估计σ_{A1}^2.

证明: 事实上, 对于ANOVA估计, $a_{11}=1$, $a_{12}=1$. 对估计σ_{M1}^2, $a_{11}=b_{11}$, $a_{12}=b_{12}$. 根据上述分析, $g_1(1)>g_1(b_{11})$和$g_2(1,1)>g_2(b_{11},b_{12})$. 经过简单推导可得$g_{12}(1,1)=4/w_1>g_{12}(b_{11},b_{12})$. 故结论成立. □

关于σ_2^2, 在估计类$\mathcal{L}_2$中, ANOVA估计σ_{A2}^2对应于$a_{21}=1$, $a_{22}=1$的情况. 类似于在估计类$\mathcal{L}_1$中选择a_{11},a_{12}的方法, 经过推导可得

$$a_{21}=\frac{w_2^2}{w_2^2+2\mathrm{tr}(W_2^2)}\quad 和\quad a_{22}=\frac{(n-m_2+2)(n-m_3)}{(n-m_2)(n-m_3+2)}.$$

也就是, 我们得到新的σ_2^2估计为

$$\sigma_{M2}^2=\frac{w_2(n-m_2)}{w_2^2+2\mathrm{tr}(W_2^2)}\Big(\frac{z_2^\tau z_2}{n-m_2}-\frac{(n-m_2+2)z_3^\tau z_3}{(n-m_2)(n-m_3+2)}\Big).$$

对估计σ_{M2}^2, 有下述定理

定理 2.2 在均方损失意义下, 估计σ_{M2}^2优于估计σ_{A2}^2.

类似定理2.1的证明过程, 不难得到定理2.2的结论, 具体细节就不再累述.

§3. 方差分量非负估计的性质

在§2给出的方差分量σ_1^2,σ_2^2的估计都不是非负估计, 即它们取负值的概率大于0. 我们自然希望能给出以概率1取非负值的方差估计. 如果ANOVA估计在0点截尾, 得到非负的方差估计, 且均方误差减小. 但是对§2给出的估计$\sigma_{M1}^2,\sigma_{M2}^2$, 在非负点截尾之后是否优于截尾之前的估计以及ANOVA估计, 这是本节要讨论的问题.

对估计σ_{M1}^2和σ_{A1}^2的截尾估计

$$\sigma_{M1}^{2+}=\max\{\sigma_{M1}^2,\delta_{M1}\}\quad 和\quad \sigma_{A1}^{2+}=\max\{\sigma_{A1}^2,\delta_{A1}\},$$

有下述性质

定理 3.1 对任何$\delta_{M1}\geq 0$, 在均方意义下, σ_{M1}^{2+}是优于σ_{M1}^2的截尾估计的充分条件是

$$\delta_{M1}\leq\frac{w_1^2+4\mathrm{tr}(W_1^2)}{w_1^2+2\mathrm{tr}(W_1^2)}\sigma_1^2-\frac{2w_1(m_3-m_1)}{(n-m_3+2)(w_1^2+2\mathrm{tr}(W_1^2))}\sigma^2.$$

σ_{A1}^{2+}是优于ANOVA估计的截尾估计的充分条件是

$$\delta_{A1}\leq\sigma_1^2.$$

证明: 由于

$$\begin{aligned}\mathrm{MSE}(\sigma_{M1}^2)-\mathrm{MSE}(\sigma_{M1}^{2+}) &= \mathsf{E}(\sigma_{M1}^2-\sigma_1^2)^2-\mathsf{E}(\sigma_M^{2+}-\sigma_1^2)^2\\ &= \mathsf{E}\{(\sigma_{M1}^2-2\sigma_1^2+\delta_{M1})(\sigma_{M1}^2-\delta_{M1})I_{[\sigma_{M1}^2<\delta_{M1}]}\}\\ &= \mathsf{E}\{(\xi-2\sigma_1^2)(\xi-2\delta_{M1})I_{[\xi<2\delta_{M1}]}\}\\ &= \mathsf{E}\{(\xi-2\sigma_1^2)g(\xi)\},\end{aligned}$$

这里$I_{[\cdot]}$是示性函数, $\xi=\sigma_{M1}^2+\delta_{M1}$, $g(\xi)=\mathsf{E}((\xi-2\delta_{M1})I_{[\xi<2\delta_{M1}]}|\xi)$. 对任意$x_1<x_2$, 根据

$$g(x_1)=\int_{x_1/2}^{+\infty}(x_1-2y)f_\eta(y)\mathrm{d}y\leq\int_{x_2/2}^{+\infty}(x_1-2y)f_\eta(y)\mathrm{d}y\leq\int_{x_2/2}^{+\infty}(x_2-2y)f_\eta(y)\mathrm{d}y=g(x_2),$$

可知$g(\xi)$和$\xi-2\delta_{M1}$都是ξ的增函数, 所以

$$\mathsf{E}\{(\xi-2\delta_{M1})g(\xi)\}\geq\mathsf{E}(\xi-2\delta_{M1})\mathsf{E}g(\xi).$$

由于$\mathsf{E}g(\xi)\leq 0$, 只要$\mathsf{E}(\xi-2\sigma_1^2)\leq 0$, 就有$\mathrm{MSE}(\sigma_{M1}^2)-\mathrm{MSE}(\sigma_{M1}^{2+})\geq 0$. 根据

$$\mathsf{E}(\sigma_{M1}^2)=\frac{w_1(n-m_1)}{w_1^2+2\mathrm{tr}(W_1^2)}\Big\{\frac{w_1\sigma_1^2}{n-m_1}+\frac{2(m_3-m_1)\sigma^2}{(n-m_1)(n-m_3+2)}\Big\},$$

以及已知条件

$$\delta_{M1}\leq\frac{w_1^2+4\mathrm{tr}(W_1^2)}{w_1^2+2\mathrm{tr}(W_1^2)}\sigma_1^2-\frac{2w_1(m_3-m_1)}{(n-m_3+2)(w_1^2+2\mathrm{tr}(W_1^2))}\sigma^2=2\sigma_1^2-\mathsf{E}(\sigma_{M1}^2)=:\rho_1,\quad(3.1)$$

可得$\mathsf{E}(\xi-2\sigma_1^2)\leq 0$.

同理, 类似于不等式(3.1)的推导过程, 可得

$$\mathrm{MSE}(\sigma_{A1}^2)-\mathrm{MSE}(\sigma_{A1}^{2+}))\geq 0$$

的充分条件是

$$\delta_{A1}\leq 2\sigma_1^2-\mathsf{E}(\sigma_{A1}^2)=\sigma_1^2.$$

也就是说, 在均方意义下, σ_{A1}^{2+}优于ANOVA估计的充分条件是$\delta_{A1}\leq\sigma_1^2$. 证毕. □

注记 1 根据定理3.1的结论, 选择适当的δ_{M1}, 比如$\delta_{A1}=\sigma_1^2/k$ $(k\ge 1)$, σ_{A1}^{2+}优于ANOVA估计. 如果$\rho_1>0$, 选择适当的δ_{M1}, 比如$\delta_{M1}=\rho_1^2/k$ $(k\ge 1)$, σ_{M1}^{2+}优于估计σ_{M1}^2.

对估计σ_{M2}^2和σ_{A2}^2的截尾估计

$$\sigma_{M2}^{2+}=\max\{\sigma_{M2}^2,\delta_{M2}\}\quad 和\quad \sigma_{A2}^{2+}=\max\{\sigma_{A2}^2,\delta_{A2}\},$$

类似于定理3.1关于σ_{M2}^{2+}和σ_{A2}^{2+}的性质, 有如下结论

定理 3.2 对任何$\delta_{M2}\ge 0$, 在均方意义下, σ_{M2}^{2+}是优于σ_{M2}^2的截尾估计的充分条件是

$$\delta_{M2}\le\frac{w_2^2+4\mathrm{tr}(W_2^2)}{w_2^2+2\mathrm{tr}(W_2^2)}\sigma_2^2-\frac{2w_2(m_3-m_2)}{(n-m_3+2)(w_2^2+2\mathrm{tr}(W_2^2))}\sigma^2.$$

σ_{A2}^{2+}是优于ANOVA估计的截尾估计的充分条件是

$$\delta_{A2}\le\sigma_2^2.$$

类似定理3.1的证明过程, 不难得到定理3.2的结论, 具体细节就不再累述. 根据定理3.2的结论, 也可以得到类似于关于定理3.1的注记1.

§4. 一般线性混合随机效应模型中ANOVA估计的改进

小节§2, §3分析了线性混合随机效应模型(1.1)的方差分量的估计. 对于更一般的线性混合随机效应模型:

$$y=X\beta+U_1\alpha_1+\cdots+U_k\alpha_k+\varepsilon,\tag{4.1}$$

这里, y是$n\times 1$的响应向量, X是$n\times p$的已知矩阵, U_i $(i=1,\cdots,k)$是$n\times q_i$的已知矩阵, β是$p\times 1$的未知参数, α_i为$q_i\times 1$的随机效应, ε是随机误差. α_i, ε相互独立, 且分别服从正态分布$N(0,\sigma_i^2 I)$和$N(0,\sigma^2 I)$. 如何给出模型(4.1)中方差分量的修正ANOVA估计, 是本节主要讨论的问题.

此时令$M_1=(X,U_2,\cdots,U_k), M_2=(X,U_1,U_3,\cdots,U_k),\cdots,M_k=(X,U_1,\cdots,U_{k-1})$, $M_{k+1}=(X,U_1,\cdots,U_k)$, $m_i=\mathrm{rank}(M_i)$ $(i=1,\cdots,k+1)$, 取矩阵H_i, 满足条件$H_iM_i=0$, $H_iH_i^\tau=I_{n-m_i}$. 用H_i分别对模型(4.1)作变换, 令$z_i=H_iy$, 得到如下新模型:

$$\begin{aligned}z_i&=H_iU_i\alpha_i+H_i\varepsilon,\qquad i=1,\cdots,k,\\ z_{k+1}&=H_{k+1}\varepsilon.\end{aligned}$$

记$W_i=H_iU_iU_i^\tau H_i^\tau$ $(i=1,\cdots,k)$, 则$z_i\sim N_{n-m_i}(0,\sigma_i^2W_i+\sigma^2 I)$, $z_{k+1}\sim N_{n-m_{k+1}}(0,\sigma^2 I)$. 令$z_i^\tau z_i=\mathsf{E}(z_i^\tau z_i)$, 则

$$\begin{aligned}z_i^\tau z_i&=w_i\sigma_i^2+(n-m_i)\sigma^2,\qquad i=1,\cdots,k,\\ z_{k+1}^\tau z_{k+1}&=(n-m_{k+1})\sigma^2.\end{aligned}$$

这里$w_i = \mathrm{tr}(W_i)$. 不难得到

$$\sigma_A^2 = \frac{z_{k+1}^\tau z_{k+1}}{n - m_{k+1}},$$

$$\sigma_{Ai}^2 = \frac{n - m_i}{w_i}\Big(\frac{z_i^\tau z_i}{n - m_i} - \frac{z_{k+1}^\tau z_{k+1}}{n - m_{k+1}}\Big), \qquad i = 1, \cdots, k.$$

关于σ_i^2 $(i = 1, \cdots, k)$, 在具有下述形式的估计类中考虑修正的ANOVA估计,

$$\mathcal{L}_i = \Big\{\frac{a_{i1}(n - m_i)}{w_i}\Big(\frac{z_i^\tau z_i}{n - m_i} - \frac{a_{i2} z_{k+1}^\tau z_{k+1}}{n - m_{k+1}}\Big)\Big| 0 < a_{i1} < 1, a_{i2} < 1\Big\},$$

类似于§2和§3节在估计族$\mathcal{L}_1$或者$\mathcal{L}_2$选择权重的方法, 经过计算得到

$$a_{i1} = \frac{w_i^2}{w_i^2 + 2\mathrm{tr}(W_i^2)} \quad 和 \quad a_{i2} = \frac{(n - m_i + 2)(n - m_{k+1})}{(n - m_i)(n - m_{k+1} + 2)}.$$

以及

$$\sigma_{Mi}^2 = \frac{w_2(n - m_i)}{w_i^2 + 2\mathrm{tr}(W_i^2)}\Big(\frac{z_i^\tau z_i}{n - m_i} - \frac{(n - m_i + 2) z_{k+1}^\tau z_{k+1}}{(n - m_i)(n - m_{k+1} + 2)}\Big),$$

$\sigma_{Mi}^{2+} = \max\{\sigma_{Mi}^2, \delta_{Mi}\}$和$\sigma_{Ai}^{2+} = \max\{\sigma_{Ai}^2, \delta_{Ai}\}$. 它们具有下述性质

定理 4.1 在均方损失意义下, 估计σ_{Mi}^2优于ANOVA估计σ_{Ai}^2. 对任何$\delta_{Mi} \geq 0$, 在均方损失意义下, σ_{Mi}^{2+}是优于$\sigma_{M_i}^2$的截尾估计的充分条件是

$$\delta_{Mi} \leq \frac{w_i^2 + 4\mathrm{tr}(W_i^2)}{w_i^2 + 2\mathrm{tr}(W_i^2)}\sigma_i^2 - \frac{2w_i(m_{k+1} - m_i)}{(n - m_{k+1} + 2)(w_i^2 + 2\mathrm{tr}(W_i^2))}\sigma^2.$$

σ_{Ai}^{2+}是优于ANOVA估计的截尾估计的充分条件是

$$\delta_{Ai} \leq \sigma_i^2.$$

参 考 文 献

[1] 范永辉, 王松桂, 两向分类随机效应模型中方差分量的非负估计, 工程数学学报, **24(2)**(2007), 303–310.

[2] Henderson, C.R., Estimation of variance and covariance components, *Biometrics*, **9**(1953), 226–252.

[3] Hartley, H.O., Rao, J.N.K., Maximum likelihood estimation for the mixed analysis of variance modles, *Biometrika*, **54**(1967), 93–108.

[4] Hartley, H.O., Maximum likelihood approaches to variancce components estimation and related problems, *J. Amer. Statist. Assoc.*, **72**(1977), 320–340.

[5] Rao, C.R., Estimation of variance and covariance componetns-MINQUE theory, *J. Multi. Anal.*, **1**(1971), 257–275.

[6] 吴密霞, 王松桂, 线性混合模型中固定效应和方差分量同时最优估计, 中国数学A辑, **34(3)**(2004), 373–384.

[7] 韦来生, 王立春, 随机效应模型中方差渐近最优的经验Bayes估计, 数学研究与评论, **24(4)**(2004), 653–664.

[8] LaMotte, L.R., On non-negative quadratic unbiased estimation of variance components, *J. Amer. Statist. Assoc.*, **68**(1973), 728–730.

[9] Chow, S.C. and Shao, J., A new procedure for the estimation of variance components, *Probab. Lett.*, **6**(1988), 349–355.

[10] Portnoy, S., Formal Bayes estimation with application to a random effec model, *Ann. Math. Statist.*, **42**(1971), 1379–1402.

[11] Mathew, T., Sinha, B.K. and Sutradhar, B.C., Nonnegative estimation of variance components in unbalanced mixed models with two components, *J. Mult. Anal.*, **42**(1992), 77–101.

[12] 范永辉, 王松桂, 线性混合模型中方差分量的ANOVA估计的改进, 高校应用数学学报A辑, **22(1)**(2007), 67–73.

Estimates of Variance Components in Linear Mixed Models with Random Effects

Xu Wangli

(*School of Statistics, Renmin University of China, Beijing, 100872*)

In this paper, we propose the improved ANOVA estimates for the linear mixed models with three variance components which are better than ANOVA estimators in the criteria of smaller mean square error (MSE). Based on the fact that the proposed variance estimators are not nonnegative with positive probability, we censor the proposed estimators in some points. Furthermore, we discuss the sufficient conditions to ensure the truncated estimators be nonnegative. The conclusions are extended to more general linear mixed models models with random effects.

Keywords: Linear mixed models with random effects, nonnegative estimator, ANOVA estimator.

AMS Subject Classification: 62G05.