应用概率统计　第二十五卷
第三期　2009年6月

Chinese Journal of Applied Probability
and Statistics Vol.25 No.3 Jun. 2009

变系数ARCH模型绝对值序列的强大数定律 *

张志强　　冯井艳

(山西大同大学数学系, 大同, 037009)

摘　要

本文提出一种新的模型: 变系数ARCH模型, 其中系数是时间变量的函数. 这与在不同的时间区间上拟和模型时系数是不同的这一事实是相符的. 所以这一模型更符合实际, 更合理. 由于系数是时间变量的函数, 所以这一模型有许多潜在的优点, 它更具有灵活性. 在本文中我们主要研究变系数ARCH模型绝对值序列的强大数定律.

关键词: 变系数, ARCH, 强大数定律.

学科分类号: O211.4.

§1. 引　　言

传统的时间序列模型假定方差保持不变, 但随着经济理论的发展及实证工作的深入, 已发现这一假设不甚合理. 越来越多的研究者发现, 经济类时间序列数据, 诸如股票价格、通货膨胀率、利率、外汇汇率等, 经常出现方差随时间变化的特点, 不仅会随着时间的变化而变化, 而且还存在波动聚类的特征, 即一个大的变动会跟随着一个大的变动; 一个小的变动会跟随着一个小的变动. 此外还发现经济随机变量的分布具有厚尾现象. 这是传统的时间序列模型不能解释的. Engle, R.F. (1982)提出的自回归条件异方差模型(Autoregressive Conditional Heteroskedasticity models), 简称为ARCH模型, 为这一问题的解决提供了很好的办法. ARCH模型可以较好地捕捉金融时间序列存在的波动聚类现象. 其模型如下:

设$\{X_t\} \sim \mathrm{ARCH}(1)$, 即

$$X_t = (\alpha_0 + \alpha_1 X_{t-1}^2)^{1/2} v_t, \qquad -\infty < t < +\infty, \tag{1.1}$$

其中$\{v_t\}$是i.i.d., 且$\mathsf{E}v_t = 0$, $\mathsf{Var}\,(v_t) = 1$, v_t独立于X_{t-s}, $s > 0$; $\alpha_0 > 0$, $\alpha_1 \geq 0$.

ARCH模型是对时变波动性统计模型方法进行的重大改进, 不仅是时间序列模型的重大发展, 而且还具有广泛的应用价值. 在验证金融市场有效性、资产定价、债务、利率、汇率、银行风险评估等方面, ARCH模型由于能够精确地获取很多时间序列的特征而得到广泛的运用, 同时ARCH模型本身也得到迅速发展, 如随后出现的LogARCH模型、NARCH模型、GARCH模型、EARCH模型等. Engle, Lilien and Robins (1987)又提出了ARCH-M模

*山西省自然科学基金项目(2007011014)、山西大同大学科研项目(2007K06)资助.

本文2007年1月9日收到, 2007年10月30日收到修改稿.

型, 分析债券风险和债券利率的关系, 大大丰富了人们对市场风险的预测水平. 一些综述性的文献有: Engle and Bollerslev (1986), Bollerslev, Chou and Kroner (1992), Bera and Higgins (1993), Bollerslev, Engle and Nelson (1994), Palm (1996)等等. 这些文献表明ARCH过程已被证明是一种极受欢迎的非线性时间序列模型.

但是这些模型几乎都是系数为常数的常系数模型, 在使用的过程中会发现在不同的时段上时间序列的特征有所不同, 在不同的时段上拟和模型时模型的系数会有所不同, 而且人们对序列变点的研究也表明在不同的时刻系数应有所不同, Tong, H. (1990)将门限自回归模型推广到含有条件异方差的情形也体现了这一点. 而且ARCH模型中的系数为常数时, 则其平方序列是一个严平稳序列, 在实践中不一定如此. 从实际角度来考虑, 我们认为系数是时间变量的函数更合理. 所以我们提出变系数ARCH模型(varying-coefficient ARCH models)如下:

$$X_t = (\alpha_0(t) + \alpha_1(t)X_{t-1}^2)^{1/2}v_t, \qquad -\infty < t < +\infty, \tag{1.2}$$

其中$\{v_t\}$是i.i.d., 且$\mathsf{E}v_t = 0$, $\mathsf{Var}\,(v_t) = 1$, v_t独立于X_{t-s}, $s > 0$; $\alpha_0(t) > 0$, $\alpha_1(t) \geq 0$是关于t的函数.

在这一模型中系数是时间变量的函数, 它结合了ARCH模型和变系数模型的优点, 它更符合实际, 更合理. (关于变系数模型具有的许多优点及综述, 可参看张日权和卢一强的工作([8]).) 本文将主要讨论上述模型绝对值序列的强大数定律.

§2. 定理及证明

定理 2.1 若$\{X_t\}$服从模型(1.2), 记$X_t^* = |X_t| - \mathsf{E}|X_t|$, $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k^*$, 设$\alpha \geq 1/2$且当$\alpha = 1/2$时, $\beta > 3/2$, 若$\sum\limits_{i=1}^{\infty} \omega^{1/2}(2^i) < \infty$, $\sup\limits_{i\geq 1} \mathsf{E}X_i^{*2} < \infty$, 则$\forall\, \varepsilon > 0$, 有

$$\frac{S_n}{n^\alpha (\log n)^\beta} \to 0, \qquad \text{a.s.}, \tag{2.1}$$

其中

$$\omega(k) = \sup_{i\geq 1} \sum_{j-i\geq k} \mathsf{Cov}^{1/2}(X_i^*, X_j^*).$$

证明: 我们分以下几步来加以证明:

第一步: 我们先来证明

$$\mathsf{Cov}\,(|X_s|, |X_t|) \geq 0. \tag{2.2}$$

将(1.2)式平方后得$X_t^2=(\alpha_0(t)+\alpha_1(t)X_{t-1}^2)v_t^2$, 从而利用递推式对$s<t$有

$$\begin{aligned} X_t^2 &= \alpha_0(t)v_t^2+\alpha_0(t-1)\alpha_1(t)v_t^2v_{t-1}^2 \\ &\quad +\cdots+\alpha_0(s+1)\alpha_1(t)\alpha_1(t-1)\cdots\alpha_1(s+1)v_t^2v_{t-1}^2\cdots v_{s+1}^2 \\ &\quad +\alpha_1(t)\alpha_1(t-1)\cdots\alpha_1(s+1)v_t^2v_{t-1}^2\cdots v_{s+1}^2X_s^2. \end{aligned} \tag{2.3}$$

由此我们有

$$\begin{aligned} & \mathsf{P}(|X_t|>y\big||X_s|=x) \\ = {} & \mathsf{P}(X_t^2>y^2|X_s^2=x^2) \\ = {} & \mathsf{P}(\alpha_0(t)v_t^2+\alpha_0(t-1)\alpha_1(t)v_t^2v_{t-1}^2 \\ & +\cdots+\alpha_0(s+1)\alpha_1(t)\alpha_1(t-1)\cdots\alpha_1(s+1)v_t^2v_{t-1}^2\cdots v_{s+1}^2 \\ & +\alpha_1(t)\alpha_1(t-1)\cdots\alpha_1(s+1)v_t^2v_{t-1}^2\cdots v_{s+1}^2x^2>y^2). \end{aligned} \tag{2.4}$$

这是一个在$[0,\infty)$上关于x的非降函数.

下面我们证明对任意的$s<t$, 对任何非降的双变量函数$f(u,v)$和$g(u,v)$, 其中

$$\mathsf{E}f^2(|x_s|,|x_t|)<\infty,\qquad \mathsf{E}g^2(|x_s|,|x_t|)<\infty,$$

都有

$$\mathsf{Cov}\,(f(|x_s|,|x_t|),g(|x_s|,|x_t|))\ge 0. \tag{2.5}$$

令E_x和Cov_x表示在给定$|x_s|=x$的条件下相应的条件期望和条件协方差, 那么

$$\begin{aligned} & \mathsf{Cov}\,(f(|x_s|,|x_t|),g(|x_s|,|x_t|)) \\ = {} & \mathsf{E}(f\cdot g)-\mathsf{E}(f)\cdot\mathsf{E}(g) \\ = {} & \mathsf{E}(\mathsf{E}_x(fg))-\mathsf{E}(\mathsf{E}_xf)\cdot\mathsf{E}(\mathsf{E}_xg) \\ = {} & \mathsf{E}\{\mathsf{E}_x(fg)-\mathsf{E}_xf\cdot\mathsf{E}_xg\}+\mathsf{E}\{\mathsf{E}_xf\cdot\mathsf{E}_xg\}-\mathsf{E}(\mathsf{E}_xf)\cdot\mathsf{E}(\mathsf{E}_xg) \\ = {} & \mathsf{E}\{\mathsf{Cov}_x(f,g)\}+\mathsf{Cov}\,(\mathsf{E}_xf,\mathsf{E}_xg). \end{aligned}$$

而$\mathsf{Cov}_x(f,g)=\mathsf{Cov}\,(f(x,|x_t|),g(x,|x_t|))\ge 0$. 所以只要证明了$\mathsf{Cov}\,(\mathsf{E}_xf,\mathsf{E}_xg)\ge 0$就完成了证明. 根据(2.4)式, 对任何固定的$y\ge 0$, $\mathsf{P}(|x_t|>y\big||x_s|=x)$关于$x$非降, 那么对任何$z\ge 0$, $\mathsf{P}(f(x,|x_t|)>z\big||x_s|=x)$是一个在$[0,\infty)$上的关于$x$的非降函数, 这样的话, E_xf和E_xg也关于x非降. 那么

$$\mathsf{Cov}\,(\mathsf{E}_xf,\mathsf{E}_xg)\ge 0.$$

从而(2.5)式成立. 因此有(2.2)式成立.

第二步: 我们来证明存在常数$C>0$使得下式成立

$$\mathsf{E}{S_n}^2\le Cn\Big\{\sup_{i\ge1}\mathsf{E}X_i^{*2}+\Big(\sup_{i\ge1}\mathsf{E}X_i^{*2}\Big)^{1/2}\Big\}. \tag{2.6}$$

记$\|x\|_2=:(\mathsf{E}x^2)^{1/2}$, $[x]$表示不超过x的最大整数,

$$S_k(n)=\sum_{i=k+1}^{k+n}X_i^*,\qquad \sigma_m=\sup_{k\ge1}\|S_k(m)\|_2, \tag{2.7}$$

则$S_k(2m)=S_k(m)+S_{k+m+[m^{1/3}]}(m)+S_{k+m}([m^{1/3}])-S_{k+2m}([m^{1/3}])$, 因此, 由Minkowski不等式, 有

$$\begin{aligned}\|S_k(2m)\|_2 &\le \|S_k(m)+S_{k+m+[m^{1/3}]}(m)\|_2+\|S_{k+m}([m^{1/3}])\|_2\\ &\quad+\|S_{k+2m}([m^{1/3}])\|_2\\ &\le \|S_k(m)+S_{k+m+[m^{1/3}]}(m)\|_2+2[m^{1/3}]\sigma_1.\end{aligned} \tag{2.8}$$

由题设知$\mathsf{E}X_i^*=0$, 由(2.2)式有$\mathsf{Cov}\,(X_i^*,X_j^*)\ge0$, 从而有

$$\begin{aligned}&\mathsf{E}(S_k(m)+S_{k+m+[m^{1/3}]}(m))^2\\ =\;&\mathsf{E}S_k^2(m)+\mathsf{E}S^2_{k+m+[m^{1/3}]}(m)+2\mathsf{E}S_k(m)S_{k+m+[m^{1/3}]}(m)\\ \le\;&2\sigma_m^2+2\sum_{i=k+1}^{k+m}\sum_{j=k+m+[m^{1/3}]+1}^{\infty}\mathsf{Cov}\,(X_i^*,X_j^*)\\ \le\;&2\sigma_m^2+2\sum_{i=k+1}^{k+m}\sum_{j=k+m+[m^{1/3}]+1}^{\infty}\mathsf{Cov}^{\,1/2}(X_i^*,X_j^*)(\|X_i^*\|_2)^{1/2}(\|X_j^*\|_2)^{1/2}\\ \le\;&2\sigma_m^2+2\sum_{i=k+1}^{k+m}\omega([m^{1/3}])\sigma_1\\ \le\;&2\sigma_m^2+2m\omega([m^{1/3}])\sigma_1,\end{aligned} \tag{2.9}$$

将(2.9)式代入(2.8)式, 得

$$\sigma_{2m}\le 2^{1/2}\sigma_m+\{2m\omega([m^{1/3}])\sigma_1\}^{1/2}+2[m^{1/3}]\sigma_1,$$

从而

$$\sigma_{2^r}\le 2^{1/2}\sigma_{2^{r-1}}+\{2^r\omega([2^{(r-1)/3}])\sigma_1\}^{1/2}+2[2^{(r-1)/3}]\sigma_1.$$

反复利用上述递推式, 得

$$\begin{aligned}\sigma_{2^r}&\le \sigma_1\Big\{2^{r/2}+2\sum_{i=0}^{r-1}2^{(r-1-i)/2}[2^{i/3}]\Big\}+2^{r/2}\sum_{i=0}^{r-1}\omega^{1/2}([2^{i/3}])\sigma_1^{1/2}\\ &\le \sigma_1\Big\{2^{r/2}+2\sum_{i=0}^{r-1}2^{(r-1-i)/2+i/3}\Big\}+2^{r/2}\sum_{i=0}^{r-1}3\omega^{1/2}(2^i)\sigma_1^{1/2}\\ &\le C2^{r/2}(\sigma_1+\sigma_1^{1/2}).\end{aligned}$$

故

$$\mathsf{E}S_{2^r} \le C2^r(\sigma_1+\sigma_1^2).$$

对任意给定的$n \ge 1$, 存在整数$r \ge 0$使$2^r \le n < 2^{r+1}$, 对$i > n$, 令$X_i^* = 0$, 则有

$$\begin{aligned} \mathsf{E}S_n^2 &= \mathsf{E}S_{2^{r+1}}^2 \\ &\le C2^{r+1}(\sigma_1+\sigma_1^2) \\ &\le 2Cn\Big\{\sup_{i\ge1}\mathsf{E}X_i^{*2} + \Big(\sup_{i\ge1}\mathsf{E}X_i^{*2}\Big)^{1/2}\Big\}. \end{aligned}$$

第三步: 先证$\alpha = 1/2$, $\beta > 3/2$的情形, 我们先介绍一个引理:

引理 2.1[12] 假设$g(a,k)$为r.v. $X_{a+1}, X_{a+2}, \cdots, X_{a+k}$的联合分布的泛函$(a\ge0, k\ge1)$, 满足$\mathsf{E}(S_{a+k}-S_a)^2 \le g(a,k)$以及$g(a,k)+g(a+k,m) \le g(a,k+m)$, 则

$$\mathsf{E}\max_{1\le j\le n}(S_{a+j}-S_a)^2 \le \Big(\frac{\log(2n)}{\log 2}\Big)^2 g(a,n).$$

由引理2.1有

$$\mathsf{E}\max_{1\le j\le n}(S_{a+j}-S_a)^2 \le \Big(\frac{\log(2n)}{\log 2}\Big)^2 \mathsf{E}(S_{a+n}-S_a)^2. \tag{2.10}$$

对$\forall\,\varepsilon > 0$, 由Chebyshev不等式和(2.6)式得

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty}\mathsf{P}(|S_{2^n}| > 2^{n/2}(\log 2^n)^{\beta}\varepsilon) &\le C\sum_{n=1}^{\infty}2^{-n}n^{-\alpha}\mathsf{E}(S_{2^n})^2 \\ &\le C\sum_{n=1}^{\infty}n^{-2\beta} \\ &< \infty. \end{aligned}$$

从而$S_{2^n}/[2^{n/2}(\log 2^n)^{\beta}] \to 0$, a.s.. 所以为证

$$\frac{S_n}{n^{1/2}(\log n)^{\beta}} \to 0, \qquad \text{a.s.}, \tag{2.11}$$

只需证

$$2^{-n/2}(\log 2^n)^{-\beta}\max_{2^n<k\le 2^{n+1}}|S_k - S_{2^n}| \to 0, \qquad \text{a.s.}. \tag{2.12}$$

由Chebyshev不等式和(2.6), (2.10)式, 且$\beta > 3/2$知

$$\begin{aligned} &\sum_{n=1}^{\infty}\mathsf{P}(2^{-n/2}(\log 2^n)^{-\beta}\max_{2^n<k\le 2^{n+1}}|S_k - S_{2^n}| > \varepsilon) \\ \le\ & C\sum_{n=1}^{\infty}2^{-n}n^{-\alpha}(\log 2^{n+1})^2 2^n \\ \le\ & C\sum_{n=1}^{\infty}n^{-2(\beta-1)} \\ <\ & \infty. \end{aligned}$$

所以(2.12)式成立, 这样证明了(2.11)式. 同理可证明$\alpha > 1/2$的情形, 证毕. □

参 考 文 献

[1] Engel, R.F., Autoregressive conditional heteroskedasticity with estimates of the variance of U.K. inflation, *Econometrica*, **50**(1982), 987–1008.

[2] Engle, R.F., Lilien, D.M. and Robbins, R.P., Estimating time varying risk premia in the term structure: the ARCH-M model, *Econometrica*, **55**(1987), 391–408.

[3] Engle, R.F., Bollerslev, T., Modelling the persistence of conditional variances, *Econometric Reviews*, **5**(1986), 1–50.

[4] Bollerslev, T., Chou, R.Y. and Kroner, K.F., ARCH modeling in finance: a review of the theory and empirical evidence, *Journal of Econometrics*, **52**(1992), 5–59.

[5] Bera, A.K. and Higgins, M.L., On ARCH models: properties, estimation and testing, *Journal of Economic Surveys*, **7**(1993), 305–366.

[6] Bollerslev, T., Engle, R.F. and Nelson, D.B., ARCH models, in R.F. Engle and D.L. McFadden (eds.), *Handbook of Econometrics, Volume IV*, New York: North-Holland, 1994.

[7] Palm, F., GARCH models of volatility, in G.S. Maddala and C.R. Rao (eds.), *Handbook of Statistics, Volume 14: Statistical Methods in Finance*, Amsterdam: Elsevier Science, 1996.

[8] Tong, H., *Nonlinear Time Series: A Dynamical System Approach*, Oxford: Oxford University Press, 1990.

[9] 张日权, 卢一强, 变系数模型, 北京: 科学出版社, 2004.

[10] Pan, J.Z., Tail dependence of random variables from ARCH and heavytailed bilinear models, *Science In China* (*Series A*), **45(6)**(2002), 749–760.

[11] 杨善朝, PA序列部分和的完全收敛性, 应用概率统计, **17(2)**(2001), 197–202.

[12] Stout, W.F., *Almost Sure Convergence*, New York: Academic Press, 1974.

[13] 陆凤彬, 两两PQD序列的完全收敛性和强大数定律, 应用数学, **16(4)**(2003), 29–33.

Strong Law of Large Numbers of Absolute Value Sequences from Varying-Coefficient ARCH Models

Zhang Zhiqiang Feng Jingyan

(*Department of Mathematics, Shanxi Datong University, Datong, 037009*)

In this paper we introduce a varying-coefficient ARCH model in which the model coefficient is a function of time variable t. It is consistent with the fact that the coefficients are different in different time intervals in modeling, so this kind of model is more reasonable. We believe that the varying-coefficient ARCH model has several potential advantages for practical uses, it is more flexible. Here we discuss the strong law of large numbers of absolute value sequences from varying-coefficient ARCH models.

Keywords: Varying-coefficient, ARCH, strong law of large numbers.

AMS Subject Classification: 60F15.