应用概率统计 第二十六卷
第二期 2010年4月

Chinese Journal of Applied Probability
and Statistics Vol.26 No.2 Apr. 2010

两水平无重复因析试验散度效应BH估计的性质 *

李济洪[1] 任改仙[2] 王 钰[1]

([1]山西大学计算中心, 太原, 030006; [2]山西大学数学科学学院, 太原, 030006)

摘 要

本文研究了两水平无重复因析试验散度效应BH估计的性质, 给出了BH估计无偏性的充分必要条件, 求得了它的近似方差. 并在多个模型下对BH与MH估计进行了模拟比较.

关键词: 散度效应, BH估计, 无重复因析试验.

学科分类号: O212.6.

§1. 引 言

试验设计中, 在模型筛选阶段, 判定哪些因子的效应显著影响响应变量均值的过程, 称为位置效应鉴别(identification of location effects), 判定哪些因子的效应显著影响响应变量方差的过程, 称为散度效应鉴别(identification of dispersion effects). 散度效应的估计和鉴别是响应变量方差建模和产品质量改进过程中的重要步骤, 散度效应的估计和鉴别传统上是在有重复试验中进行, 而有重复试验需要更多的时间和费用. 因此, 在无重复条件下散度效应的估计和鉴别成为近年来研究的热点问题. 方法主要有两类: 第一, 先给出各散度效应的估计, 再用某种检验方法(比如, 半正态图法, Lenth检验法)识别出显著效应. 方法有Box和Meyer (1986)[1](称为BM估计), Harvey (1976)[2](称为H估计), Brenneman和Nair (2001)[3](称为MH估计)等. 第二, 构造散度效应的检验统计量, 识别出显著效应. 方法有Bergman和Hynen (1997)[4](BH检验), Wang (1989)[5]等. BH方法在文献中一直以检验方法提出, Brenneman和Nair (2001)[3]中提出了将BH方法的检验统计量取对数后除以2作为散度效应的估计(BH估计). 但是, BH估计的性质未见文献中有相关研究. 本文给出了BH估计的无偏性的充分必要条件, 给出了它的近似方差. 文献[3]中通过模拟表明在均方误差意义下MH估计优于BM, H估计. 因此, 本文最后, 我们对BH估计和MH估计进行了模拟比较.

§2. 模型和记号

本文沿用Brenneman和Nair (2001)中无重复试验的位置效应和散度效应模型表示以及

*国家自然科学基金(60873128)资助.
本文2008年6月20日收到.

记号, 具体如下:

$$y_i = x_i'\beta + \sigma_i\varepsilon_i, \qquad \sigma_i^2 = e^{x_i'\phi}, \qquad i = 1, \cdots, n.$$

前部分称为位置效应模型, 后部分称为散度效应模型.

其中:

1. $Y = (y_1, y_2, \cdots, y_n)'$是观测值向量. $m \times 1$维的未知参数向量$\beta = (\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_m)'$和$\phi = (\phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_m)'$在试验设计中被称为位置效应和散度效应. $\varepsilon_i \sim N(0,1)$, i.i.d..

2. $X = [X_{k_1}, X_{k_2}, \cdots, X_{k_p}]$表示$n \times p$的$2^{k-p}$型因析试验的设计矩阵. x_i'是X的第i行. 这里, X是由要考察的效应对应列所组成的设计矩阵(包括位置效应和散度效应对应列).

3. X_1是X的第一列, 是每个元素都为1的列向量, $X_k\ (k > 1)$是包含元素分别为$+1$和-1的列向量, 其中$+1$和-1分别对应因子k的高水平和低水平.

4. $S(k+)$是因子k的正水平的行的集合; $S(k-)$是因子k的负水平的行的集合.

5. 对于$k_1, k_2, k_3 \in \{1, 2, \cdots, n\}$, 如果满足$X_{k_3}$中的每个元素等于$X_{k_1}$与$X_{k_2}$中对应元素的乘积, 记为$k_3 = k_1 \circ k_2$. 集合$S$中的元素在运算$\circ$下所张成的闭集记为$\overline{S}$.

6. 记$L = \{I\} \cup \{l_1, l_2, \cdots, l_{p-1}\}$表示显著的位置效应因子组成的集合, $D = \{I\} \cup \{d_1, d_2, \cdots, d_{q-1}\}$表示显著的散度效应因子组成的集合, 其中$I$均表示截距项.

7. r_i是拟合位置模型后得到的残差. 即$r_i = y_i - x_i'\widehat{\beta}$. 其中$\widehat{\beta} = (X'X)^{-1}X'Y$是参数$\beta$的最小二乘估计.

8. 因子k的扩展位置模型记为L_k^E. 其中的元素包含L中的元素, 以及因子k及k与L中元素交互效应. 记$\widetilde{L_k^E}$为扩展位置模型的补集, 则$\dim((\widetilde{L_k^E}) \cup L_k^E) = \dim(L_k^E) + \dim(\widetilde{L_k^E}) = p + (n-p) = n$. 例如, 对三因子的完全试验, 若$L = \{I, A, B\}$, $k = C$, 则$L_c^E = \{I, A, B, C, AC, BC\}$, $\widetilde{L_c^E} = \{AB, ABC\}$. 用$\widetilde{X}$表示扩展模型的设计矩阵.

9. 记$Q_k = \{(j, j') : j \circ j' = k; j, j' \in L_k^E\}$; 记$Q_k^c = \{(j, j') : j \circ j' = k; j, j' \in \widetilde{L_k^E}\}$.

10. 用$\widetilde{r}_i$表示在扩展位置模型下得到的残差. 即$\widetilde{r}_i = y_i - \widetilde{x}_i'\widehat{\beta}$, 其中$\widetilde{x}_i'$是矩阵$\widetilde{X}$的第$i$行.

文献[4]中BH方法用的检验统计量为

$$\phi_k^{\mathrm{BH}} = \sum_{i \in S(k+)} \widetilde{r}_i^2 \Big/ \sum_{i \in S(k-)} \widetilde{r}_i^2,$$

并证明了在$\phi_k = 0$条件下其近似服从$F((n-p)/2, (n-p)/2)$分布, 其中p为L_k^E中因子的个数(含常数项). 文献[3]研究了估计BM, H, MH的性质, 并模拟比较了这些估计的均值, 方差和均方误差(MSE). 文献[3] P_{394}中提到用

$$\phi_k^{\mathrm{BH}} = \frac{1}{2}\Big[\log\Big(\sum_{i \in S(k+)} \widetilde{r}_i^2\Big) - \log\Big(\sum_{i \in S(k-)} \widetilde{r}_i^2\Big)\Big]$$

作为散度效应的估计(BH估计), 并模拟了BH估计的分布, 但其性质没有深入研究, 现有的文献中也未曾发现有相关研究内容. 本文研究了BH估计的无偏性, 给出了BH估计是无偏

估计的充分必要条件, 得到了BH估计的近似方差. 事实上, BH估计是基于扩展模型残差平方的算术平均构造的. 而散度效应的MH估计是以扩展模型残差平方的几何平均为基础提出的, 形式为:

$$\phi_k^{\mathrm{MH}} = \frac{1}{n}\Big[\sum_{i\in S(k+)} \log(\widetilde{r}_i^2) - \sum_{i\in S(k-)} \log(\widetilde{r}_i^2)\Big].$$

Brenneman和Nair (2001)[3]给出了MH估计的无偏条件, 并且模拟比较了MH, BM, H, MLE等估计, 模拟结果表明在均方误差意义下MH估计优于BM, H估计. 因此, 本文最后模拟比较了散度效应的BH估计和MH估计的均方误差.

§3. BH估计的性质

本节主要给出BH估计是无偏估计的充分必要条件. 为此, 先证明几个引理.

引理 3.1 L_k^E中的p个因子列可以组成$p/2$对, $\widetilde{L_k^E}$中的$n-p$个因子列可以组成$(n-p)/2$对, 其每对中两列的交互列均为k因子所在的列. 也即$\dim(Q_k)=p/2$, $\dim(Q_k^c)=(n-p)/2\equiv g$.

证明: 根据2^{k-p}型试验列名运算的特点, 所有列可以分成两两列对, 其交互列为k因子所在列, 由扩展模型L_k^E的定义, 容易得L_k^E中可以组成$p/2$对, 相应$\widetilde{L_k^E}$中的$n-p$个因子列可以组成$(n-p)/2$对. 证毕. □

沿用上一节中第8条的例子, 则L_c^E中包含三对$(I,A),(C,AC),(B,BC)$, 而$\widetilde{L_c^E}$中包含一对(AB,ABC).

引理 3.2 基于k因子的扩展模型的关于k因子正, 负水平对应的残差平方和分别可以表示为:

$$\sum_{i\in S(k+)} \widetilde{r}_i^2 = \frac{1}{2n}\varepsilon' A_1\varepsilon, \qquad \sum_{i\in S(k-)} \widetilde{r}_i^2 = \frac{1}{2n}\varepsilon' A_2\varepsilon.$$

这里, $\varepsilon=(\sigma_1\varepsilon_1,\sigma_2\varepsilon_2,\cdots,\sigma_n\varepsilon_n)'$,

$$A_1 = \sum_{(j,j')\in Q_k^c}(X_j+X_{j'})(X_j+X_{j'})', \qquad A_2 = \sum_{(j,j')\in Q_k^c}(X_j-X_{j'})(X_j-X_{j'})'.$$

证明: 根据文献[6] P_{138}中(A3)(A4)式的结论, 以及引理3.1的结论, 不难得:

$$\begin{aligned}\sum_{i\in S(k+)} \widetilde{r}_i^2 &= \frac{n}{2}\sum_{(j,j')\in Q_k^c}(\widehat{\beta}_j+\widehat{\beta}_{j'})^2 = \frac{n}{2}\sum_{(j,j')\in Q_k^c}\Big[\frac{1}{n}(X_j+X_{j'})'Y\Big]^2\\ &= \frac{1}{2n}Y'\Big[\sum_{(j,j')\in Q_k^c}(X_j+X_{j'})(X_j+X_{j'})'\Big]Y\\ &= \frac{1}{2n}Y'A_1Y.\end{aligned}$$

这里$\widehat{\beta}_j$是因子j的最小二乘估计, 即$\widehat{\beta}_j = X_j'Y/n$.

又$Y=\widetilde{X}\beta+\varepsilon$, 从而:

$$\begin{aligned}\sum_{i\in S(k+)}\widetilde{r}_i^2 &= \frac{1}{2n}Y'A_1Y=\frac{1}{2n}(\widetilde{X}\beta+\varepsilon)'A_1(\widetilde{X}\beta+\varepsilon)\\ &= \frac{1}{2n}(\beta'\widetilde{X}'A_1\widetilde{X}\beta+2\varepsilon'A_1\widetilde{X}\beta+\varepsilon'A_1\varepsilon).\end{aligned}$$

由设计矩阵的正交性, 可得: $\widetilde{X}'A_1\widetilde{X}=0$, $A_1\widetilde{X}=0$. 所以有:

$$\sum_{i\in S(k+)}\widetilde{r}_i^2=\frac{1}{2n}\varepsilon'A_1\varepsilon.$$

同理可证:

$$\sum_{i\in S(k-)}\widetilde{r}_i^2=\frac{1}{2n}\varepsilon'A_2\varepsilon. \qquad \square$$

引理 3.3 $\sum\limits_{i\in S(k+)}\widetilde{r}_i^2$近似服从$[1/(2n)]\cdot c_1\chi^2_{m_1}$分布; $\sum\limits_{i\in S(k-)}\widetilde{r}_i^2$近似服从$[1/(2n)]\cdot c_2\chi^2_{m_2}$分布; 这里$\chi^2_{m_i}$是服从自由度为$m_i$的$\chi^2$分布的随机变量 $(i=1,2)$, 其中:

$$c_1=\frac{\sum\limits_{i=1}^{g}(\lambda_i^{k+})^2}{\sum\limits_{i=1}^{g}\lambda_i^{k+}},\qquad m_1=\frac{\Big(\sum\limits_{i=1}^{g}\lambda_i^{k+}\Big)^2}{\sum\limits_{i=1}^{g}(\lambda_i^{k+})^2},\qquad c_2=\frac{\sum\limits_{i=1}^{g}(\lambda_i^{k-})^2}{\sum\limits_{i=1}^{g}\lambda_i^{k-}},\qquad m_2=\frac{\Big(\sum\limits_{i=1}^{g}\lambda_i^{k-}\Big)^2}{\sum\limits_{i=1}^{g}(\lambda_i^{k-})^2}.$$

这里, λ_i^{k+}是矩阵$\Sigma^{1/2}A_1\Sigma^{1/2}$的特征值, λ_i^{k-}是矩阵$\Sigma^{1/2}A_2\Sigma^{1/2}$的特征值. $\Sigma=\mathsf{Var}\,(\varepsilon)=\mathrm{diag}\{\sigma_i^2\}$, $m_1,m_2\le g$.

证明: 由$\varepsilon\sim N_n(0,\Sigma)$可知: $\Sigma^{-1/2}\varepsilon\sim N(0,I_n)$. 由引理3.2知:

$$\begin{aligned}\sum_{i\in S(k+)}\widetilde{r}_i^2 &= \frac{1}{2n}\varepsilon'A_1\varepsilon=\frac{1}{2n}\varepsilon'\Sigma^{-1/2}\Sigma^{1/2}A_1\Sigma^{-1/2}\Sigma^{1/2}\varepsilon\\ &= \frac{1}{2n}(\Sigma^{-1/2}\varepsilon)'(\Sigma^{1/2}A_1\Sigma^{1/2})(\Sigma^{-1/2}\varepsilon).\end{aligned}$$

记$\varepsilon^*=\Sigma^{-1/2}\varepsilon$, $B_1=\Sigma^{1/2}A_1\Sigma^{1/2}$, 则:

$$\sum_{i\in S(k+)}\widetilde{r}_i^2=\frac{1}{2n}\varepsilon^{*\prime}B_1\varepsilon^*.$$

因为$A_1=\sum\limits_{(j,j')\in Q_k^c}(X_j+X_{j'})(X_j+X_{j'})'$, 而矩阵$(X_j+X_{j'})(X_j+X_{j'})'$的秩为1, 且对任意的$j_1\neq j_2$有$(X_{j_1}+X_{j_1'})'(X_{j_2}+X_{j_2'})=0$, 所以$\mathrm{rank}(A_1)=g$, 又$\Sigma$为可逆矩阵, 因此$\mathrm{rank}(B_1)=g$.

对B_1作奇异值分解, 得$B_1=U_1'\Lambda_1U_1$, 其中Λ_1是由B_1的特征值构成的对角矩阵, 记λ_i^{k+} $(i=1,2,\cdots,g)$为矩阵B_1的特征值, U_1为对应的标准正交特征向量构成的正交矩阵. 则:

$$\sum_{i\in S(k+)}\widetilde{r}_i^2=\frac{1}{2n}\varepsilon^{*\prime}B_1\varepsilon^*=\frac{1}{2n}\varepsilon^{*\prime}U_1'\Lambda_1U_1\varepsilon^*=\frac{1}{2n}(U_1\varepsilon^*)'\Lambda_1(U_1\varepsilon^*).$$

因为$\varepsilon^* \sim N(0, I_n)$, 且$U_1$为正交矩阵, 所以$U_1\varepsilon^* \sim N(0, I_n)$. 从而:

$$\sum_{i \in S(k+)} \tilde{r}_i^2 = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{g} \lambda_i^{k+} \chi_1^2.$$

由satterthwaite (1946) (文献[7])的矩相等近似法:

$$\sum_{i \in S(k+)} \tilde{r}_i^2 = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{g} \lambda_i^{k+} \chi_1^2 \approx \frac{1}{2n} c_1 \chi_{m_1}^2.$$

c_1, m_1由下面得到, 令上式两边一阶矩和二阶矩相等有:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{g} \lambda_i^{k+} = c_1 m_1; \\ 2 \sum_{i=1}^{g} (\lambda_i^{k+})^2 = 2c_1^2 m_1, \end{cases}$$

解上述方程组可得:

$$c_1 = \frac{\sum_{i=1}^{g} (\lambda_i^{k+})^2}{\sum_{i=1}^{g} \lambda_i^{k+}}, \qquad m_1 = \frac{\left(\sum_{i=1}^{g} \lambda_i^{k+} \right)^2}{\sum_{i=1}^{g} (\lambda_i^{k+})^2}.$$

所以有:

$$\sum_{i \in S(k+)} \tilde{r}_i^2 \approx \frac{1}{2n} c_1 \chi_{m_1}^2.$$

同理可证:

$$\sum_{i \in S(k-)} \tilde{r}_i^2 \approx \frac{1}{2n} c_2 \chi_{m_2}^2.$$

证毕. $\square$

引理 3.4 当$k \notin \overline{\mathcal{D}}_{-k}$时, 有$m_1 = m_2$. 这里$\mathcal{D}$表示显著的散度效应集, $\overline{\mathcal{D}}_{-k}$表示$\mathcal{D}$中去掉因子$k$后张成的闭集.

证明: 因为向量$X_j + X_{j'}((j, j') \in Q_k^c)$中的元素, 当对应的$k$因子为正水平时取值为2或者$-2$, 而对应$k$为负水平时取值为0, 所以$\mathsf{Var}\,((X_j + X_{j'})'\varepsilon) = 4 \sum_{i \in S(k+)} \sigma_i^2$.

若记$Z_{k+} = ((X_{j_1} + X_{j_1'})'\varepsilon, (X_{j_2} + X_{j_2'})'\varepsilon, \cdots, (X_{j_g} + X_{j_g'})'\varepsilon)'$, 记$\Sigma_{k+} = \mathsf{Var}\,(Z_{k+})$. 则:

$$\mathsf{E}(\varepsilon^T A_1 \varepsilon) = \mathrm{tr}(\Sigma_{k+}) = 4g \sum_{i \in S(k+)} \sigma_i^2 = c_1 m_1 = \sum_{i=1}^{g} \lambda_i^{k+}.$$

同理记$Z_{k-} = ((X_{j_1} - X_{j_1'})'\varepsilon, (X_{j_2} - X_{j_2'})'\varepsilon, \cdots, (X_{j_g} - X_{j_g'})'\varepsilon)'$, 记$\Sigma_{k-} = \mathsf{Var}\,(Z_{k-})$. 则:

$$\mathsf{E}(\varepsilon^T A_2 \varepsilon) = \mathrm{tr}(\Sigma_{k-}) = 4g \sum_{i \in S(k-)} \sigma_i^2 = c_2 m_2 = \sum_{i=1}^{g} \lambda_i^{k-}.$$

记c_i'表示$C=[\widetilde{X}_{d_1}|\cdots|\widetilde{X}_{d_r}]$的第$i$行, 其中$d_j\in\overline{\mathcal{D}}_{-k}$, $\phi_c=(\phi_{d_1},\cdots,\phi_{d_r})'$. 既然$k\notin\overline{\mathcal{D}}_{-k}$, 所以:

$$\sigma_i^2=\begin{cases}e^{\phi_1+\phi_k}e^{c_i'\phi_c}, & i\in S(k+);\\ e^{\phi_1-\phi_k}e^{c_i'\phi_c}, & i\in S(k-).\end{cases}$$

依据文献[3] P_{404}中结论, 可以按因子k的正负水平调整设计矩阵X的行和列, 使其满足:

1. $S(k+)=\{1,\cdots,n/2\}$及$S(k-)=\{n/2+1,\cdots,n\}$;

2. $c_i=c_{i+n/2}$, $i=1,\cdots,n/2$.

所以对每个$i\in S(k+)$, 有$i+n/2\in S(k-)$使$c_i'\phi_c=c_{i+n/2}'\phi_c$. 从而有$\sum\limits_{i\in S(k+)}e^{c_i'\phi_c}=\sum\limits_{i+n/2\in S(k-)}e^{c_i'\phi_c}$成立.

特别地, 若设计矩阵X为2^{k-p}型试验的饱和正交表时, 按因子k的正负水平调整X的行和列, 可以写为: $X=\begin{bmatrix}A & E\\ A & -E\end{bmatrix}$, 其中$A,E$均为$(n/2)\times(n/2)$的矩阵, 且$k=j\circ j'$, 这里$j$属于$X$的前$n/2$列, j'属于X的后$n/2$列.

由此不难得出, 引理3.2中的矩阵A_1与A_2有如下的形式: $A_1=\begin{bmatrix}B & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$, $A_2=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & B\end{bmatrix}$, 其中$B=(b_{jm})$为$(n/2)\times(n/2)$矩阵.

根据实对称矩阵的特征值的平方和等于该矩阵的所有元素的平方和, 有:

$$\sum_{i=1}^{g}(\lambda_i^{k+})^2=\sum_{i\in S(k+)}\sum_{j\in S(k+)}b_{ij}^2\sigma_i^2\sigma_j^2,\qquad \sum_{i=1}^{g}(\lambda_i^{k-})^2=\sum_{i\in S(k-)}\sum_{j\in S(k-)}b_{ij}^2\sigma_i^2\sigma_j^2.$$

因此:

$$\begin{aligned}m_1&=\frac{\left(\sum\limits_{i=1}^{g}\lambda_i^{k+}\right)^2}{\sum\limits_{i=1}^{g}(\lambda_i^{k+})^2}=\frac{\left(4g\sum\limits_{i\in S(k+)}\sigma_i^2\right)^2}{\sum\limits_{i\in S(k+)}\sum\limits_{j\in S(k+)}b_{ij}^2\sigma_i^2\sigma_j^2}=\frac{\left(4g\sum\limits_{i\in S(k+)}e^{\phi_1+\phi_k}e^{c_i'\phi_c}\right)^2}{\sum\limits_{i\in S(k+)}\sum\limits_{j\in S(k+)}b_{ij}^2e^{\phi_1+\phi_k}e^{c_i'\phi_c}e^{\phi_1+\phi_k}e^{c_j'\phi_c}}\\&=\frac{\left(4g\sum\limits_{i\in S(k+)}e^{c_i'\phi_c}\right)^2}{\sum\limits_{i\in S(k+)}\sum\limits_{j\in S(k+)}b_{ij}^2e^{c_i'\phi_c}e^{c_j'\phi_c}}=\frac{\left(4g\sum\limits_{i\in S(k-)}e^{c_i'\phi_c}\right)^2}{\sum\limits_{i\in S(k-)}\sum\limits_{j\in S(k-)}b_{ij}^2e^{c_i'\phi_c}e^{c_j'\phi_c}}\\&=\frac{\left(4g\sum\limits_{i\in S(k-)}e^{\phi_1-\phi_k}e^{c_i'\phi_c}\right)^2}{\sum\limits_{i\in S(k-)}\sum\limits_{j\in S(k-)}b_{ij}^2e^{\phi_1-\phi_k}e^{c_i'\phi_c}e^{\phi_1-\phi_k}e^{c_j'\phi_c}}=\frac{\left(4g\sum\limits_{i\in S(k-)}\sigma_i^2\right)^2}{\sum\limits_{i\in S(k-)}\sum\limits_{j\in S(k-)}b_{ij}^2\sigma_i^2\sigma_j^2}=\frac{\left(\sum\limits_{i=1}^{g}\lambda_i^{k-}\right)^2}{\sum\limits_{i=1}^{g}(\lambda_i^{k-})^2}\\&=m_2.\qquad\square\end{aligned}$$

定理 3.1 记$\mathcal{D}$表示显著的散度效应集, 则ϕ_k^{BH}无偏的充要条件是$k\notin\overline{\mathcal{D}}_{-k}$. 这里, $\overline{\mathcal{D}}_{-k}$表示$\mathcal{D}$中去掉因子$k$后张成的闭集.

证明: 充分性:

根据引理3.3的记法, 可以将ε也分解为: $\varepsilon=\begin{bmatrix}\varepsilon_{k+}\\ \varepsilon_{k-}\end{bmatrix}$. 其中: $\varepsilon_{k+}\sim N(0,\Omega_{k+})$, $\varepsilon_{k-}\sim N(0,\Omega_{k-})$. 且当$k\notin\overline{\mathcal{D}}_{-k}$时,

$$\Omega_{k+}=\mathrm{diag}\{e^{\phi_1+\phi_k}e^{c_i'\phi_c}\}_{i=1,\cdots,n/2},\qquad \Omega_{k-}=\mathrm{diag}\{e^{\phi_1-\phi_k}e^{c_i'\phi_c}\}_{i=n/2+1,\cdots,n}.$$

由引理3.3知:

$$\begin{aligned}\sum_{i\in S(k+)}\tilde{r}_i^2 &= \frac{1}{2n}\varepsilon' A_1\varepsilon=\frac{1}{2n}\begin{bmatrix}\varepsilon_{k+}' & \varepsilon_{k-}'\end{bmatrix}\begin{bmatrix}B & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\varepsilon_{k+}\\ \varepsilon_{k-}\end{bmatrix}=\frac{1}{2n}\varepsilon_{k+}'B\varepsilon_{k+}\\ &= \frac{1}{2n}e^{(\phi_1+\phi_k)}(e^{-(\phi_1+\phi_k)/2}\varepsilon_{k+})'B(e^{-(\phi_1+\phi_k)/2}\varepsilon_{k+})\\ &= \frac{1}{2n}e^{(\phi_1+\phi_k)}T_1.\\ \sum_{i\in S(k-)}\tilde{r}_i^2 &= \frac{1}{2n}\varepsilon' A_2\varepsilon=\frac{1}{2n}\begin{bmatrix}\varepsilon_{k+}' & \varepsilon_{k-}'\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & B\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\varepsilon_{k+}\\ \varepsilon_{k-}\end{bmatrix}=\frac{1}{2n}\varepsilon_{k-}'B\varepsilon_{k-}\\ &= \frac{1}{2n}e^{(\phi_1-\phi_k)}(e^{-(\phi_1-\phi_k)/2}\varepsilon_{k-})'B(e^{-(\phi_1-\phi_k)/2}\varepsilon_{k-})\\ &= \frac{1}{2n}e^{(\phi_1-\phi_k)}T_2.\end{aligned}$$

其中$T_1=(e^{-(\phi_1+\phi_k)/2}\varepsilon_{k+})'B(e^{-(\phi_1+\phi_k)/2}\varepsilon_{k+})$, $T_2=(e^{-(\phi_1-\phi_k)/2}\varepsilon_{k-})'B(e^{-(\phi_1-\phi_k)/2}\varepsilon_{k-})$.

记$V=\mathrm{diag}\{e^{c_i'\phi_c}\}_{i=1,\cdots,n/2}$. 因为$c_i=c_{i+n/2}$, $i=1,\cdots,n/2$, 所以$\Omega_{k+}=e^{\phi_1+\phi_k}V$, $\Omega_{k-}=e^{\phi_1-\phi_k}V$. 从而有: $e^{-(\phi_1+\phi_k)/2}\varepsilon_{k+}\sim N(0,V)$, $e^{-(\phi_1-\phi_k)/2}\varepsilon_{k-}\sim N(0,V)$. 于是$T_1$与$T_2$同分布, 从而$\log(T_1)$与$\log(T_2)$也同分布. 所以:

$$\begin{aligned}\mathsf{E}[\phi_k^{\mathrm{BH}}] &= \frac{1}{2}\mathsf{E}\Big[\log\Big(\sum_{i\in S(k+)}\tilde{r}_i^2\Big)-\log\Big(\sum_{i\in S(k-)}\tilde{r}_i^2\Big)\Big]\\ &= \frac{1}{2}\mathsf{E}\Big[\log\Big(\frac{1}{2n}e^{(\phi_1+\phi_k)}T_1\Big)-\log\Big(\frac{1}{2n}e^{(\phi_1-\phi_k)}T_2\Big)\Big]\\ &= \frac{1}{2}[2\phi_k+\mathsf{E}(\log T_1)-\mathsf{E}(\log T_2)]\\ &= \phi_k.\end{aligned}$$

必要性: BH估计与BM估计有同样的形式，当$k\in\overline{\mathcal{D}}_{-k}$时, 这种形式会导致结构上的偏差, 其说明见文献[3]中P_{391}和文献[8]中P_{256}, 故略.

定理证毕. □

引理 3.5 记χ_f^2是服从自由度为f的χ^2分布的随机变量, 则$\mathsf{Var}\,(\log(\chi_f^2/f))=\psi'(f/2)$. 其中$\psi'(\cdot)$是trigamma函数.

(见文献[9] P_{943}.)

定理 3.2 BH估计的方差近似公式为: $\mathrm{Var}\,(\phi_k^{\mathrm{BH}}) \approx (1/4)\cdot[\psi'(m_1/2)+\psi'(m_2/2)]$. 其中:

$$m_1 = \frac{\Big(\sum\limits_{i=1}^{g}\lambda_i^{k+}\Big)^2}{\sum\limits_{i=1}^{g}(\lambda_i^{k+})^2}, \qquad m_2 = \frac{\Big(\sum\limits_{i=1}^{g}\lambda_i^{k-}\Big)^2}{\sum\limits_{i=1}^{g}(\lambda_i^{k-})^2}.$$

并且当$k\notin\overline{\mathcal{D}}_{-k}$时, $\mathrm{Var}\,(\phi_k^{\mathrm{BH}}) \approx (1/2)\cdot\psi'(m^*/2)$. 其中$m^*=m_1=m_2$.

证明: 由定理3.1中的证明知:

$$\sum_{i\in S(k+)}\widetilde{r}_i^2 = \frac{1}{2n}\varepsilon'_{k+}B\varepsilon_{k+}, \qquad \sum_{i\in S(k-)}\widetilde{r}_i^2 = \frac{1}{2n}\varepsilon'_{k-}B\varepsilon_{k-}.$$

所以$\sum\limits_{i\in S(k+)}\widetilde{r}_i^2$与$\sum\limits_{i\in S(k+)}\widetilde{r}_i^2$相互独立. 因此由引理3.3及引理3.5可得:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}\,(\phi_k^{\mathrm{BH}}) &= \mathrm{Var}\,\bigg(\frac{1}{2}\Big[\log\Big(\sum_{i\in S(k+)}r_i^2\Big)-\log\Big(\sum_{i\in S(k-)}r_i^2\Big)\Big]\bigg)\\
&\approx \frac{1}{4}\Big[\mathrm{Var}\,\Big(\log\frac{1}{2n}c_1\chi^2_{m_1}\Big)+\mathrm{Var}\,\Big(\log\frac{1}{2n}c_2\chi^2_{m_2}\Big)\Big]\\
&= \frac{1}{4}[\mathrm{Var}\,(\log(c_1m_1/2n)+\log(\chi^2_{m_1}/m_1))+\mathrm{Var}\,(\log(c_2m_2/2n)+\log(\chi^2_{m_2}/m_2))]\\
&= \frac{1}{4}[\mathrm{Var}\,(\log(\chi^2_{m_1}/m_1))+\mathrm{Var}\,(\log(\chi^2_{m_2}/m_2))]\\
&= \frac{1}{4}[\psi'(m_1/2)+\psi'(m_2/2)].
\end{aligned}$$

由引理3.4知: 当$k\notin\overline{\mathcal{D}}_{-k}$时, $m_1=m_2$. 记$m^*=m_1=m_2$, 从而有: $\mathrm{Var}\,(\phi_k^{\mathrm{BH}})\approx(1/2)\cdot\psi'(m^*/2)$. □

文献[3]中给出了散度效应MH估计的方差下界: $\mathrm{Var}\,(\phi_k^{\mathrm{MH}})\geq(1/n)\cdot\psi'(1/2)\approx 4.93/n$, 由定理3.2知$\mathrm{Var}\,(\phi_k^{\mathrm{BH}})\approx(1/4)\cdot[\psi'(m_1/2)+\psi'(m_2/2)]$, 其中$m_1,m_2\leq g=(n-p)/2$. 又注意到$\psi'(\cdot)$是减函数, 从而有$\psi'(m_1/2)\geq\psi'(g/2)$, $\psi'(m_2/2)\geq\psi'(g/2)$. 所以$\mathrm{Var}\,(\phi_k^{\mathrm{BH}})\geq(1/2)\cdot\psi'(g/2)$. 此式表明, L_k^E中因子个数越少, ϕ_k^{BH}估计的方差下界越小. 下面我们以$n=8,16,32$的2^{k-p}型试验为例, 对两个估计的方差下界作简单比较.

下表列出了$g=1,2,\cdots,15$时$(1/2)\cdot\psi'(g/2)$的近似值:

g值	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$\frac{1}{2}\psi'(g/2)$的值	2.46	0.81	0.47	0.33	0.25	0.19	0.17	0.14	0.13	0.11	0.10	0.09	0.08	0.07	0.06

当$n=8$时, 根据扩展模型中因子的个数, $g=(n-p)/2$可能的取值为: $0,1,2,3$, 而$\mathrm{Var}\,(\phi_k^{\mathrm{MH}})\geq(1/8)\cdot\psi'(1/2)\approx 0.62$. 从上表中可以看出, 只有当$g=3$时$(1/2)\cdot\psi'(g/2)<(1/8)\cdot\psi'(1/2)$. 即当$L_k^E$中因子个数$p=2$时, BH估计比MH估计的方差下界小.

当$n=16$时, $g=(n-p)/2$可能的取值为: $g=0,1,2,\cdots,7$, 而$\mathrm{Var}\,(\phi_k^{\mathrm{MH}})\geq(1/16)\cdot\psi'(1/2)\approx0.31$. 从上表中可以看出, 只有当$g\geq5$时$(1/2)\cdot\psi'(g/2)<(1/16)\cdot\psi'(1/2)$. 即当$L_k^E$中因子个数$p\leq6$时, BH估计比MH估计的方差下界小.

当$n=32$时, $g=(n-p)/2$可能的取值为: $g=0,1,2,\cdots,15$, 而$\mathrm{Var}\,(\phi_k^{\mathrm{MH}})\geq(1/32)\cdot\psi'(1/2)\approx0.15$. 从上表中可以看出, 只有当$g\geq8$时$(1/2)\cdot\psi'(g/2)<(1/32)\cdot\psi'(1/2)$. 即当$L_k^E$中因子个数$p\leq16$时, BH估计比MH估计的方差下界小.

§4.　模拟比较

在文献[3]中已经模拟比较了MH与BM, H等方法. 文献[3]的命题3研究了MH估计的性质, 证明了对任意的$k\notin\overline{\mathcal{D}}_{-k}$, ϕ_k^{MH}是无偏的. 本文进一步模拟比较BH与MH估计.

本文模拟试验中, 考虑4个因子(A,B,C,D)完全试验, 每个因子均为两个水平, 分别用BH与MH方法做散度效应的估计. 每个试验模拟1000次. 试验模型的选取参照文献[1], 详细如下:

(1) 位置效应模型为$L=\{I,A,AB\}$; 真值分别为$\beta_0=27$, $\beta_A=7$, $\beta_{AB}=6$. 散度效应模型分别选$D=\{I,A,B,AB\}$, $D=\{I,B,C,D\}$; 真值分别为$\phi_0=0.5$, $\phi_A=1.5$, $\phi_B=1$, $\phi_{AB}=0.8$, $\phi_C=1.2$, $\phi_D=0.6$.

表1　在位置模型$L=\{I,A,AB\}$下针对各种散度模型其散度效应的估计

效应	真值	BH方法			MH方法			真值	BH方法			MH方法		
		Mean	Var	MSE	Mean	Var	MSE		Mean	Var	MSE	Mean	Var	MSE
		$D=\{I,A,B,AB\}$							$D=\{I,B,C,D\}$					
A	**1.5**	**1.97**	0.29	0.50	**1.49**	0.33	0.33	0.0	-0.01	0.42	0.42	-0.01	0.39	0.39
B	**1.0**	**1.63**	0.35	0.74	**1.00**	0.31	0.31	**1.0**	**1.01**	0.34	0.34	**1.00**	0.43	0.43
C	0.0	0.00	0.65	0.65	0.01	0.76	0.76	**1.2**	**1.20**	0.35	0.35	**1.20**	0.43	0.43
D	0.0	0.00	0.68	0.68	0.03	0.80	0.80	**0.6**	**0.60**	0.40	0.40	**0.60**	0.46	0.46
AB	**0.8**	**1.56**	0.34	0.92	**0.79**	0.33	0.33	0.0	0.00	0.42	0.42	0.00	0.39	0.39
AC	0.0	0.00	0.67	0.67	0.01	0.78	0.78	0.0	0.01	0.48	0.48	0.00	0.53	0.53
AD	0.0	0.00	0.68	0.68	0.04	0.77	0.77	0.0	0.00	0.43	0.43	0.00	0.52	0.51
BC	0.0	0.00	0.65	0.65	0.01	0.78	0.77	0.0	**0.66**	0.40	0.84	**0.52**	0.57	0.84
BD	0.0	0.00	0.70	0.70	0.02	0.78	0.78	0.0	**0.36**	0.42	0.55	**0.25**	0.56	0.63
CD	0.0	0.00	0.69	0.69	0.00	0.81	0.81	0.0	**0.46**	0.39	0.61	**0.48**	0.48	0.71
ABC	0.0	0.00	0.66	0.65	0.02	0.78	0.78	0.0	0.01	0.49	0.49	-0.01	0.54	0.54
ABD	0.0	0.01	0.70	0.70	0.02	0.80	0.80	0.0	0.00	0.45	0.45	0.00	0.54	0.54
ACD	0.0	0.00	0.67	0.67	-0.01	0.80	0.80	0.0	0.00	0.44	0.44	0.00	0.53	0.53
BCD	0.0	0.00	0.68	0.68	-0.02	0.80	0.80	0.0	**0.28**	0.47	0.54	**0.21**	0.59	0.63
$ABCD$	0.0	0.00	0.68	0.68	-0.02	0.81	0.81	0.0	0.00	0.46	0.46	0.01	0.53	0.53

(2) 位置效应模型为$L = \{I, A, B\}$; 真值分别为$\beta_0 = 27$, $\beta_A = 7$, $\beta_B = 18$. 散度效应模型分别选$D = \{I, B, C\}$, $D = \{I, C, D\}$; 真值分别为$\phi_0 = 0.5$, $\phi_B = 1$, $\phi_C = 1.2$, $\phi_D = 0.6$.

从表1可以看出, 散度模型为$D = \{I, A, B, AB\}$时, A, B, AB的散度效应BH估计均有偏, 且比MH估计的偏度大. 由于$\dim(L) \leq 6$, BH估计的方差下界应当比MH估计的方差下界小, 从模拟结果看BH比MH的方差小. 当散度模型为$\mathcal{D} = \{I, B, C, D\}$时, 对$k = BC, BD, CD, BCD$, 均有$k \in \overline{\mathcal{D}}_{-k}$, 不满足定理3.1的条件, 从而此时因子$BC, BD, CD$, BCD的BH估计与MH估计有偏, 从数据看, BH的偏度比MH的偏度略大.

表2 在位置模型$L = \{I, A, B\}$下针对各种散度模型其散度效应的估计

效应	真值	BH方法			MH方法			真值	BH方法			MH方法		
		Mean	Var	MSE	Mean	Var	MSE		Mean	Var	MSE	Mean	Var	MSE
		$D = \{I, B, C\}$							$D = \{I, C, D\}$					
A	0.0	-0.02	0.37	0.37	-0.01	0.38	0.38	0.0	-0.01	0.32	0.32	-0.01	0.39	0.39
B	**1.0**	**1.00**	0.28	0.28	**0.99**	0.40	0.39	0.0	0.01	0.34	0.34	0.00	0.43	0.43
C	**1.2**	**1.19**	0.33	0.33	**1.19**	0.44	0.44	**1.2**	**1.21**	0.25	0.25	**1.20**	0.39	0.39
D	0.0	0.00	0.39	0.39	0.00	0.48	0.48	**0.6**	**0.60**	0.27	0.27	**0.60**	0.41	0.41
AB	0.0	0.00	0.38	0.38	0.00	0.41	0.41	0.0	0.00	0.31	0.31	0.00	0.39	0.39
AC	0.0	-0.01	0.45	0.45	0.00	0.51	0.51	0.0	-0.01	0.39	0.39	0.01	0.45	0.45
AD	0.0	0.01	0.24	0.24	0.03	0.31	0.31	0.0	-0.01	0.21	0.21	0.01	0.34	0.34
BC	0.0	**0.66**	0.36	0.80	**0.52**	0.52	0.79	0.0	0.00	0.43	0.43	-0.01	0.50	0.50
BD	0.0	-0.01	0.41	0.41	0.00	0.48	0.48	0.0	0.00	0.36	0.36	0.03	0.47	0.47
CD	0.0	0.01	0.40	0.40	0.00	0.47	0.46	0.0	**0.48**	0.27	0.50	**0.47**	0.40	0.61
ABC	0.0	0.00	0.46	0.46	-0.01	0.52	0.52	0.0	0.01	0.40	0.40	0.03	0.48	0.48
ABD	0.0	0.01	0.41	0.41	0.01	0.50	0.50	0.0	0.00	0.35	0.35	0.00	0.46	0.46
ACD	0.0	0.01	0.41	0.41	0.01	0.51	0.51	0.0	0.00	0.33	0.33	-0.02	0.42	0.42
BCD	0.0	0.01	0.42	0.41	0.00	0.52	0.52	0.0	0.01	0.37	0.37	0.01	0.52	0.52
$ABCD$	0.0	0.00	0.41	0.41	0.00	0.49	0.49	0.0	-0.01	0.35	0.35	0.00	0.47	0.47

从表2可以看出, 散度模型为$D = \{I, B, C\}$, $D = \{I, C, D\}$时, 除了BC, CD之外, 各效应均满足定理3.1的条件$k \notin \overline{\mathcal{D}}_{-k}$, BH与MH方法得到的估计均为无偏估计. 且$\dim(L) \leq 6$, BH估计的方差下界应当比MH估计的方差下界小, 从模拟结果看BH估计比MH估计的方差小, 故均方误差也比MH估计小.

参 考 文 献

[1] Box, G.E.P. and Meyer, R.D., Dispersion effects from fractional designs, *Technometrics*, **28**(1986), 19–27.

[2] Harvey, A.C., Estimating regression models with multiplicative heteroscedasticity, *Econometrica*, **44**(1976), 461–465.

[3] Brenneman, W.A. and Nair, V.N., Methods for identifying dispersion effects in unreplicated factorial experiments: a critical analysis and proposed strategies, *Technometrics*, **43**(2001), 388–404.

[4] Bergman, B. and Hynen, A., Dispersion effects form unreplicated designs in the 2^{k-p} series, *Technometrics*, **39**(1997), 191–198.

[5] Wang, P.C., Tests for dispersion effects from orthogonal arrays, *Computational Statistics and Data Analysis*, **8**(1989), 109–117.

[6] McGrath, R.N. and Lin, D.K.J., Confounding of location and dispersion effects in unreplicated fractional factorials, *Jourmal of Quality Technology*, **33**(2001), 129–139.

[7] Satterthwaite, F.E., An approximate distribution of estimates of variance components, *Biometrics Bulletin*, **2**(1946), 110–114.

[8] Nair, V. and Pregibon, D., Analyzing dispersion effects from replicated factorial experiments, *Technometrics*, **30**(1988), 247–257.

[9] Abramowitz, M. and Stegum, I.A., *Handbook of Mathematical Functions*, New York: Dover Publications, Inc., 1965.

Properties of BH Estimator of Dispersion Effect in Unreplicated Two-Level Factorial Experiments

Li Jihong[1] Ren Gaixian[2] Wang Yu[1]

([1] *Computer Center of Shanxi Univercity, Taiyuan, 030006*)

([2] *College of Mathematics Science, Shanxi University, Taiyuan, 030006*)

In this paper, the property of BH estimator in unreplicated two-level factorial experiments was studied. The necessary and sufficient condition of the unbiasedness property was given. The variance of BH estimator was presented. Finally, the comparison of BH and MH estimators was taken through simulation.

Keywords: Dispersion effects, BH estimator, unreplicated factorial experiments.

AMS Subject Classification: 62J05, 62K15.