Panel数据模型中方差分量的精确检验 *

程靖[1,2] 王松桂[3] 岳荣先[1]

([1]上海师范大学数理学院, 上海, 200234; [2]巢湖学院数学系, 安徽巢湖, 238000)

([3]北京工业大学应用数理学院, 北京, 100022)

摘 要

本文利用广义p值和广义置信区间的概念构造含有三个随机效应的Panel数据模型中方差分量的几种新的精确检验和置信区间, 并讨论它们在尺度变换下的不变性. 通过模拟给出检验的功效和置信区间的覆盖率. 模拟结果表明, 广义p值理论方法应用于含有冗余参数的Panel数据模型参数检验问题是灵活而有效的.

关键词: Panel数据模型, 随机效应, 广义p值, 广义置信区间, 方差分量.

学科分类号: O212.1.

§1. 引 言

在实际应用中, 关于线性模型参数的检验和置信区间的研究已成为模型研究的一个重要组成部分, 受到统计学家的极大关注. 然而, 在很多情况下由于冗余参数(nuisance parameter)的出现, 很难甚至无法构造参数的精确检验和置信区间. Tsui和Weerahandi[1]和Weerahandi[2]分别提出了广义p值(generalized p value)检验和广义置信区间(generalized confidence interval)的概念. 实际应用表明在精确F检验不存在或冗余参数存在时, 基于广义p值和广义置信区间来获得精确检验和置信区间的方法是富有成效的, 文献中已有不少研究成果[1–10]. Weerahandi[3]分别对单向分类模型方差分量和多向分类模型中方差分量的单边假设问题给出了基于广义p值的精确检验. Zhou和Mathew[4]把这种方法应用到混合效应模型中, 分别对单个方差分量的显著性和两个独立平衡模型方差分量的的比较建立了精确检验, 并把部分结果推广到非平衡情况. Chi和Weerahandi[5], Weerahandi和Berger[6]利用广义p值对协方差具有组内相关结构的简单生长曲线模型中回归系数建立了精确检验, Lin和Lee[7]则将他们的结果推广到具有等相关结构的简单生长曲线模型. Ye和Wang[8]对平衡数据下一般随机效应模型的单个方差分量构造出精确检验和置信区间, 并将结论推广至两个独立平衡模型方差分量的比较. Tsui和Weerahandi[1]还讨论了广义p值检验的不变性. Weerahandi[2, 9]构造了不同指数族均值差异性的广义置信区间, 并构造了混合模型方差分量差异的广义置信区间. Krishnamoorthy和Mathew[10]利用

*国家自然科学基金项目(10671129)、教育部高校博士点专项基金项目(20060270002)资助.

本文2007年12月23日收到, 2009年2月19日收到修改稿.

《应用概率统计》版权所用

广义枢轴量对对数正态分布的均值建立了置信区间. 还有一些文献[11, 12]对广义p值方法进行了探讨.

Panel数据模型本质上是具有套误差结构(nested error structure)的线性回归模型. 文献中关于其方差分量显著性的检验主要有: Lagrange-multiple(简记为LM)卡方检验及Honda[13]提出的标准的LM检验; King和Wu提出了一个局部平均最优势检验. 另外, Baltagi, Chang和Li[14]针对一类假设问题提出一个新的卡方检验. Moulton和Randolph则建立了方差分量的显著性假设问题基于方差分析(ANOVA)的F检验. 本文将利用广义p值和广义置信区间的概念对Panel模型中方差分量的各类单边假设问题建立精确检验, 构造参数的置信区间, 并讨论有关统计性质.

§2. 广义p值和广义置信区间

设Z为分布依赖于参数(η,δ)的随机变量, 其中η为检验参数, δ为冗余参数, 且δ可以为参数向量. 假设要检验的问题是

$$H_0:\eta\le\eta_0 \quad\leftrightarrow\quad H_1:\eta>\eta_0, \tag{2.1}$$

这里η_0为预先给定的值. 记z为Z的观测值.

定义 2.1 设$T_1(Z,z,\eta,\delta)$为随机变量Z, Z的观测值z, 及参数(η,δ)的函数. 如果T_1满足

(1) $T_1(Z,z,\eta_0,\delta)$的分布与冗余参数无关,

(2) $T_1(Z,z,\eta,\delta)$的观测值$T_1(z,z,\eta,\delta)$与未知参数无关,

(3) 对于固定的z和δ, $T_1(Z,z,\eta,\delta)$的分布关于η随机单调增(stochastically increasing)或随机单调减(stochastically decreasing),

则称$T_1(Z,z,\eta,\delta)$为一个广义检验变量.

当$T_1(Z,z,\eta,\delta)$的分布关于η随机单调增时, 对于检验问题(2.1)定义广义p值为

$$p=\mathsf{P}(T_1(Z,z,\eta,\delta)\ge T_1(z,z,\eta,\delta)|\eta=\eta_0).$$

当$T_1(Z,z,\eta,\delta)$的分布关于η随机单调减时, 对于检验问题(2.1)定义广义p值为

$$p=\mathsf{P}(T_1(Z,z,\eta,\delta)\le T_1(z,z,\eta,\delta)|\eta=\eta_0).$$

对于给定水平α, 如果$p\ge\alpha$则接受原假设, 反之拒绝. 由条件(1)(2)可知, 广义p值与任何未知参数无关, 是可以计算的.

定义 2.2 设$T_2(Z,z,\eta,\delta)$为随机变量Z, Z的观测值z, 及参数(η,δ)的函数. 如果T_2满足

《应用概率统计》版权所用

(1) $T_2(Z,z,\eta,\delta)$的分布与未知参数无关,

(2) $T_2(Z,z,\eta,\delta)$的观测值$T_2(z,z,\eta,\delta)$与冗余参数无关,

则称$T_2(Z,z,\eta,\delta)$为一个广义枢轴量.

对于感兴趣参数的广义置信区间可以利用$T_2(Z,z,\eta,\delta)$来构造. 例如, 当$T_2(z,z,\eta,\delta)=\eta$时, 若$T_2(1-\alpha)$表示$T_2(Z,z,\eta,\delta)$的$1-\alpha$分位数, 则$T_2(1-\alpha)$就为$\eta$的广义置信上限. 广义置信下限和双边置信限类似可得. 详细讨论参见Tusi和Weerahandi [1], Weerahandi [2].

§3. 模型分析

本文考虑含有三个随机效应的的Panel数据模型为

$$y_{it}=\beta_0+x_{it1}\beta_1+\cdots+x_{itk}\beta_k+\mu_i+\lambda_t+\varepsilon_{it},\qquad i=1,\cdots,N;\ t=1,\cdots,T. \tag{3.1}$$

这里y_{it}表示第i个个体在时刻t因变量的观测值; x_{itj}表示第i个个体上第j个自变量在时刻t的取值; $\beta=(\beta_1,\cdots,\beta_k)'$为未知回归系数; μ_i为第i个个体效应, 假定这N个个体是从一个大的总体中随机抽取的, μ_i是随机的; λ_t表示时刻t的时间效应, 也视为随机的; ε_{it}为随机误差. 假定所有μ_i,λ_t和ε_{it}都彼此独立, 且$\mu_i\sim N(0;\sigma_\mu^2)$, $\lambda_t\sim N(0,\sigma_\lambda^2)$, $\varepsilon_{it}\sim N(0,\sigma_\varepsilon^2)$. 模型(3.1)可记为

$$y=\mathbf{1}_{NT}\beta_0+X\beta+u. \tag{3.2}$$

其中

$$\begin{aligned}
&y=(y_{11},\cdots,y_{1T},y_{21},\cdots,y_{2T},\cdots,y_{N1},\cdots,y_{NT})';\\
&X=(x_{11},\cdots,x_{1T},x_{21},\cdots,x_{2T},\cdots,x_{N1},\cdots,x_{NT})';\\
&x_{it}'=(x_{it1},\cdots,x_{itk});\\
&u=(I_N\otimes\mathbf{1}_T)\mu+(\mathbf{1}_N\otimes I_T)\lambda+\varepsilon;\\
&\mu=(\mu_1,\cdots,\mu_N)';\quad \lambda=(\lambda_1,\cdots,\lambda_T)';\quad \varepsilon=(\varepsilon_{11},\cdots,\varepsilon_{1T},\cdots,\varepsilon_{N1},\cdots,\varepsilon_{NT})'.
\end{aligned}$$

则

$$\Sigma=\mathsf{Cov}\,(u)=\sigma_\mu^2(I_N\otimes J_T)+\sigma_\lambda^2(J_N\otimes I_T)+\sigma_\varepsilon^2 I_{NT}.$$

其中, $J_T=\mathbf{1}_t\mathbf{1}_t'$, $J_N=\mathbf{1}_N\mathbf{1}_N'$, $I_{NT}=I_N\otimes I_T$. 记$\overline{J}_T=J_T/T$, $\overline{J}_N=J_N/N$, $E_N=I_N-\overline{J}_N$, $E_T=I_T-\overline{J}_T$, 则有

$$\begin{aligned}
\mathsf{Cov}\,(u)&=\sigma_\varepsilon^2(E_N\otimes E_T)+(T\sigma_\mu^2+\sigma_\varepsilon^2)(E_N\otimes\overline{J}_T)+(N\sigma_\lambda^2+\sigma_\varepsilon^2)(\overline{J}_N\otimes E_T)\\
&\quad+(T\sigma_\mu^2+N\sigma_\lambda^2+\sigma_\varepsilon^2)(\overline{J}_N\otimes\overline{J}_T)\\
&\triangleq\sigma_1^2Q_1+\sigma_2^2Q_2+\sigma_3^2Q_3+\sigma_4^2Q_4.
\end{aligned}\tag{3.3}$$

《应用概率统计》版权所用

其中, $\sigma_1^2=\sigma_\varepsilon^2$, $\sigma_2^2=T\sigma_\mu^2+\sigma_\varepsilon^2$, $\sigma_3^2=N\sigma_\lambda^2+\sigma_\varepsilon^2$, $\sigma_2^2=T\sigma_\mu^2+N\sigma_\lambda^2+\sigma_\varepsilon^2$, $Q_1=E_N\otimes E_T$, $Q_2=E_N\otimes \overline{J}_T$, $Q_3=\overline{J}_N\otimes E_T$, $Q_4=\overline{J}_N\otimes \overline{J}_T$. 对上述分解有以下引理

引理 3.1 (1) Q_1,Q_2,Q_3,Q_4为对称幂等阵,

(2) Q_1,Q_2,Q_3,Q_4两两相互正交,

(3) Q_1,Q_2,Q_3,Q_4的秩分别为$(N-1)(T-1),N-1,T-1,1$.

该引理可依据王松桂等[15]中相关结论加以证明. 分别用Q_1,Q_2,Q_3左乘原模型, 由于$E_T\mathbf{1}_T=0$, $E_N\mathbf{1}_N=0$, 故有

$$\begin{cases} y_1=Q_1y=Q_1X\beta+Q_1u\triangleq Q_1X\beta+u_1, \\ y_2=Q_2y=Q_2X\beta+Q_2u\triangleq Q_2X\beta+u_2, \\ y_3=Q_3y=Q_3X\beta+Q_3u\triangleq Q_3X\beta+u_3. \end{cases} \tag{3.4}$$

其中$\mathsf{E}u_i=Q_i\mathsf{E}u=0$, $\mathsf{Cov}\,(u_i)=\sigma_i^2Q_i$, $i=1,2,3$. 假定$(X'Q_iX)^{-1}$均存在, 这在实际数据观测中是容易满足的. 在(3.4)各子模型中可得到β的最小二乘估计为

$$\widehat{\beta}_i=(X'Q_iX)^{-1}X'Q_iy,\qquad i=1,2,3.$$

由最小二乘统一理论知$\widehat{\beta}_i$分别为上述三个模型中β的最佳线性无偏估计, 且

$$\mathsf{Cov}\,(\widehat{\beta}_i)=\sigma_i^2(X'Q_iX)^{-1}\triangleq\Sigma_i(\sigma_i^2),\qquad i=1,2,3.$$

利用残差估计$\widehat{u}_i=Q_iy-Q_iX\widehat{\beta}_i$, $i=1,2,3$. 得到的σ_i^2无偏估计

$$\widehat{\sigma}_i^2=S_i^2=\frac{\widehat{u}_i'\widehat{u}_i}{n_i}=\frac{y'(Q_i-Q_iX(X'Q_iX)^{-1}X'Q_i)y}{n_i}. \tag{3.5}$$

其中$n_i=rk(Q_i)-k$, 且有

$$V_i=\frac{n_iS_i^2}{\sigma_i^2}\sim\chi^2_{n_i},\qquad i=1,2,3.$$

引理 3.2 $\widehat{\beta}_1,\widehat{\beta}_2,\widehat{\beta}_3,S_1^2,S_2^2,S_3^2$相互独立.

$\widehat{\beta}_i,S_i^2$分别为y的线性型和二次型, 而y服从多元正态分布. 依据王松桂等[15]中的相关结论可以证明引理.

下面将利用这里获得的优良估计来构造方差分量的精确检验和置信区间.

§4. 方差分量的精确检验和置信区间

这一部分将讨论Panel数据模型(3.1)中方差分量的几种假设问题基于广义p值理论的精确检验和置信区间, 并探讨其有关统计性质. 本节沿用§3中参数估计的结果和记号.

《应用概率统计》版权所用

首先我们考虑Panel数据模型(3.1)中个体效应的单边假设检验问题

$$H_0 : \sigma_\mu^2 \le c_0 \quad \leftrightarrow \quad H_1 : \sigma_\mu^2 > c_0, \tag{4.1}$$

其中c_0为一已知正数. 记s_i^2为S_i^2, $i = 1, 2$的观测值, 定义

$$T_1 = \frac{n_2 S_2^2}{\sigma_2^2} - \frac{n_2 s_2^2}{T\sigma_\mu^2 + \sigma_1^2 s_1^2 S_1^{-2}} = V_2 - \frac{n_2 s_2^2}{T\sigma_\mu^2 + n_1 s_1^2 V_1^{-1}}. \tag{4.2}$$

对于T_1: T_1的观测值$t_1 = 0$与未知参数无关; 由S_1^2, S_2^2独立, 知

$$V_1 = \frac{n_1 S_1^2}{\sigma_1^2} \sim \chi^2_{n_1}, \qquad V_2 = \frac{n_2 S_2^2}{\sigma_2^2} \sim \chi^2_{n_2}$$

相互独立, 故T_1的分布与冗余参数无关; T_1关于σ_μ^2随机单调增. 因此对于假设问题(4.1), T_1定义了一个广义检验变量. 基于T_1的广义p值为

$$\begin{aligned} p_1 &= \mathsf{P}(T_1 \ge t_1 | \sigma_\mu^2 = c_0) = \mathsf{P}\Big(V_2 \ge \frac{n_2 s_2^2}{Tc_0 + n_1 s_1^2 V_1^{-1}}\Big) \\ &= 1 - \mathsf{E}_{V_1}\Big[F_{\chi^2_{n_2}}\Big(\frac{n_2 s_2^2}{Tc_0 + n_1 s_1^2 V_1^{-1}}\Big)\Big]. \end{aligned} \tag{4.3}$$

其中E_{V_1}表示对V_1求期望, $F_{\chi^2_{n_2}}$表示自由度为n_2的卡方分布的分布函数.

考虑尺度变换

$$\begin{aligned} &(\beta, \sigma_1, \sigma_2) \to (a\beta, a\sigma_1, a\sigma_2) \\ &(\widehat{\beta}, S_1, S_2) \to (a\widehat{\beta}, aS_1, aS_2), \qquad (a > 0). \end{aligned} \tag{4.4}$$

虽然广义检验变量T_1在尺度变换(4.4)下保持不变, 但假设检验问题(4.1)本身不是尺度变换(4.4)下的不变检验问题. 考虑与之等价的假设检验问题

$$H_0 : \frac{\sigma_\mu^2}{s_1^2} = \theta_\mu \le \theta_0 = \frac{c_0}{s_1^2} \quad \leftrightarrow \quad H_1 : \theta_\mu > \theta_0. \tag{4.5}$$

定义

$$\widetilde{T}_1 = \frac{n_2 S_2^2}{\sigma_2^2} - \frac{n_2 s_1^{-2} s_2^2}{T\theta_\mu + \sigma_\varepsilon^2 S_1^{-2}} = V_2 - \frac{n_2 s_1^{-2} s_2^2}{T\theta_\mu + n_1 V_1^{-1}}.$$

容易验证$\widetilde{T}_1$对于假设检验问题(4.5)满足广义检验变量的三个条件. 故基于$\widetilde{T}_1$得到假设检验问题(4.5)的广义p值计算式

$$\widetilde{p}_1 = \mathsf{P}(\widetilde{T}_1 \ge \widetilde{t}_1 | \theta_\mu = \theta_0).$$

考虑尺度变换

$$\begin{aligned} &(\beta, \sigma_1, \theta_\mu) \to (a\beta, a\sigma_1, a\theta_\mu) \\ &(\widehat{\beta}, S_1, S_2) \to (a\widehat{\beta}, aS_1, aS_2), \qquad (a > 0). \end{aligned} \tag{4.6}$$

《应用概率统计》版权所用

发现在尺度变换(4.6)下假设检验问题(4.5)和$\widetilde{T}_1$都不发生变化, 因此假设检验问题(4.5)基于$\widetilde{T}_1$的广义p值检验是尺度变换(4.6)下的不变检验.

如果将c_0取0, 并在假设问题(4.1)中将原假设取等号, 假设问题(4.1)就转化为

$$H_0:\sigma_\mu^2=0 \quad\leftrightarrow\quad H_1:\sigma_\mu^2>0.$$

可以发现此时基于(4.2)所获得的广义p值检验等价于精确F检验. 在很多情况下广义p值检验都被被视为精确F检验的一种推广, 在一些文献中还将广义p值检验称为广义F检验.

下面来构造σ_μ^2的广义置信区间. 定义

$$T_1^*=\frac{1}{T}\Big(\frac{\sigma_2^2s_2^2}{S_2^2}-\frac{\sigma_1^2s_1^2}{S_1^2}\Big)=\frac{1}{T}\Big(\frac{n_2s_2^2}{V_2}-\frac{n_1s_1^2}{V_1}\Big).$$

T_1^*满足: T_1^*的观测值为σ_μ^2, 与冗余参数无关, 由$V_1\sim\chi^2_{n_1}$, $V_2\sim\chi^2_{n_2}$相互独立, T_1^*的分布与未知参数无关. 因而T_1^*为一广义枢轴量. 利用T_1^*可得到σ_μ^2的置信水平为$(1-\alpha)$的广义置信下限和广义置信上限分别为$T_1^*(\alpha)$和$T_1^*(1-\alpha)$. 这里$T_1^*(\alpha),T_1^*(1-\alpha)$分别表示$T_1^*$的$\alpha$和$1-\alpha$分位数. 对于$\theta_\mu$的广义不变置信区间可以利用下面定义的广义枢轴量$\widetilde{T}_1^*$获得

$$\widetilde{T}_1^*=\frac{1}{Ts_1^2}\Big(\frac{\sigma_2^2s_2^2}{S_2^2}-\frac{\sigma_1^2s_1^2}{S_1^2}\Big).$$

对于时间效应及随机误差效应的单边假设检验问题

$$H_0:\sigma_\lambda^2\le c_0 \quad\leftrightarrow\quad H_1:\sigma_\lambda^2>c_0, \tag{4.7}$$

$$H_0:\sigma_\varepsilon^2\le c_0 \quad\leftrightarrow\quad H_1:\sigma_\varepsilon^2>c_0, \tag{4.8}$$

其中c_0为一已知正数. 类似于假设检验问题(4.1)定义

$$T_2=\frac{n_3S_3^2}{\sigma_3^2}-\frac{n_3s_3^2}{N\sigma_\lambda^2+\sigma_1^2s_1^2S_1^{-2}}=V_3-\frac{n_3s_3^2}{N\sigma_\lambda^2+n_1\sigma_1^2V_1^{-1}},$$

$$T_3=\frac{\sigma_\varepsilon^2s_1^2}{S_1^2}-\sigma_\varepsilon^2=\frac{n_1s_1^2}{V_1}-\sigma_\varepsilon^2.$$

这里s_i^2表示S_i^2, $i=1,2,3$的观测值. 同样可以验证T_2,T_3为广义检验变量. 由此分别得到假设检验问题(4.7) (4.8)的广义p值计算式

$$p_2=\mathsf{P}(T_2\ge t_2|\sigma_\lambda^2=c_0)=1-\mathsf{E}_{V_1}\Big[F_{\chi^2_{n_3}}\Big(\frac{n_3s_3^2}{Nc_0+n_1s_1^2V_1^{-1}}\Big)\Big],$$

$$p_3=\mathsf{P}(T_3\le t_3|\sigma_\varepsilon^2=c_0)=1-F_{\chi^2_{n_1}}\Big(\frac{n_1s_1^2}{c_0}\Big).$$

这里随机误差的广义p值检验与卡方检验是等价的. 同样对于$\sigma_\lambda^2,\sigma_\varepsilon^2$的广义置信区间, 我们类似可利用下述两个广义枢轴量来构造

$$T_2^*=\frac{1}{N}\Big(\frac{\sigma_3^2s_3^2}{S_3^2}-\frac{\sigma_1^2s_1^2}{S_1^2}\Big),\qquad T_3^*=\frac{\sigma_1^2s_1^2}{S_1^2}.$$

《应用概率统计》版权所用

对尺度变换下的不变检验及不变置信区间的构造, 可以作出与前面同样的处理, 考虑与之等价的假设检验问题在尺度变换下的不变性, 这里就不再详细叙述.

最后我们讨论方差分量线性组合的单边假设检验问题

$$H_0: l\sigma_\mu^2+m\sigma_\lambda^2+n\sigma_\varepsilon^2\le c_0 \quad\leftrightarrow\quad H_1: l\sigma_\mu^2+m\sigma_\lambda^2+n\sigma_\varepsilon^2> c_0. \tag{4.9}$$

其中$l,m,n\in\mathbf{R}$, c_0为一给定值. 事实上(4.9)是许多有实际意义的假设检验问题的一般表示形式. 例如, 取$l=1$, $m=-1$, $n=c_0=0$时, 我们要检验的就是个体效应是否小于时间效应($\sigma_\mu^2\le\sigma_\lambda^2$); 如果取$l=m=1$, $n=-1$, $c_0=0$, 我们要检验的就是个体效应与时间效应之和是否小于随机误差效应($\sigma_\mu^2+\sigma_\lambda^2\le\sigma_\varepsilon^2$); 特别的, 分别取$l=m=0$, $n=1$或$l=n=0$, $m=1$或$m=n=0$, $l=1$, (4.9)就归结为我们在前面讨论三种假设检验问题. 下面我们就将对一般性假设检验问题(4.9)建立广义p值检验, 定义

$$\begin{aligned}T_4 &= \Big(\frac{l}{T}\frac{\sigma_2^2s_2^2}{S_2^2}+\frac{m}{N}\frac{\sigma_3^2s_3^2}{S_3^2}+\Big(n-\frac{l}{T}-\frac{m}{N}\Big)\frac{\sigma_1^2s_1^2}{S_1^2}\Big)-(l\sigma_\mu^2+m\sigma_\lambda^2+n\sigma_\varepsilon^2)\\ &= \Big(\frac{l}{T}\frac{n_2s_2^2}{V_2}+\frac{m}{N}\frac{n_3s_3^2}{V_3}+\Big(n-\frac{l}{T}-\frac{m}{N}\Big)\frac{n_1s_1^2}{V_1}\Big)-(l\sigma_\mu^2+m\sigma_\lambda^2+n\sigma_\varepsilon^2).\end{aligned} \tag{4.10}$$

则有: T_4的观测值$t_4=0$与未知参数无关;

$$V_i=\frac{n_iS_i^2}{\sigma_i^2}\sim\chi_{ni}^2,\qquad i=1,2,3$$

相互独立故T_4的分布与冗余参数无关; T_4关于$l\sigma_\mu^2+m\sigma_\lambda^2+n\sigma_\varepsilon^2$随机单调减. T_4为一广义检验变量, 基于T_4得到广义p值

$$\begin{aligned}p_4 &= \mathsf{P}(T_4\le t_4\mid l\sigma_\mu^2+m\sigma_\lambda^2+n\sigma_\varepsilon^2=c_0)\\ &= \mathsf{P}\Big(c_0-\frac{l}{T}\frac{n_2s_2^2}{V_2}-\frac{m}{N}\frac{n_3s_3^2}{V_3}-\Big(n-\frac{l}{T}-\frac{m}{N}\Big)\frac{n_1s_1^2}{V_1}\Big)\\ &= \mathsf{P}\Big(V_2\ge\frac{l}{T}n_2s_2^2\Big(c_0-\frac{m}{N}\frac{n_3s_3^2}{V_3}-\Big(n-\frac{l}{T}-\frac{m}{N}\Big)\frac{n_1s_1^2}{V_1}\Big)^{-1}\Big)\\ &= 1-\mathsf{E}_{V_1,V_3}\Big(F_{\chi_{n_2}^2}\Big(\frac{l}{T}n_2s_2^2\Big(c_0-\frac{m}{N}\frac{n_3s_3^2}{V_3}-\Big(n-\frac{l}{T}-\frac{m}{N}\Big)\frac{n_1s_1^2}{V_1}\Big)^{-1}\Big)\Big).\end{aligned}$$

为构造$l\sigma_\mu^2+m\sigma_\lambda^2+n\sigma_\varepsilon^2$的置信区间, 定义

$$T_4^*=\frac{l}{T}\frac{\sigma_2^2s_2^2}{S_2^2}+\frac{m}{N}\frac{\sigma_3^2s_3^2}{S_3^2}+\Big(n-\frac{l}{T}-\frac{m}{N}\Big)\frac{\sigma_1^2s_1^2}{S_1^2}. \tag{4.11}$$

则有: 由上面的分析知T_4^*的分布与未知参数无关, T_4^*的观测值$t_4^*=l\sigma_\mu^2+m\sigma_\lambda^2+n\sigma_\varepsilon^2$与冗余参数无关. 故$T_4^*$定义了一个广义枢轴量, 由的$T_4^*$分位点可以构造$l\sigma_\mu^2+m\sigma_\lambda^2+n\sigma_\varepsilon^2$的广义置信区间. 如$T_4^*(1-\alpha)$为$T_4^*$的$(1-\alpha)$分位点, 则$T_4^*(1-\alpha)$可作为$l\sigma_\mu^2+m\sigma_\lambda^2+n\sigma_\varepsilon^2$的置信水平为$(1-\alpha)$的广义置信上限. 广义置信下限和双边置信限可类似获得.

《应用概率统计》版权所用

如果考虑尺度变换

$$
\begin{aligned}
&(\beta,\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3)\to(a\beta,a\sigma_1,a\sigma_2,a\sigma_3)\\
&(\widehat{\beta},S_1,S_2,S_3)\to(a\widehat{\beta},aS_1,aS_2,aS_3),\qquad(a>0).
\end{aligned}\tag{4.12}
$$

在此尺度变换下假设检验问题(4.10)本身和广义检验变量T_4均发生了变化, 考虑与等价的假设检验问题

$$
H_0:\frac{l\sigma_\mu^2+m\sigma_\lambda^2+n\sigma_\varepsilon^2}{s_1^2}=\theta\le\theta_0=\frac{c_0}{s_1^2}\quad\leftrightarrow\quad H_1:\theta>\theta_0.\tag{4.13}
$$

定义

$$
\widetilde{T}_4=\theta-\Big(\frac{l}{T}\frac{\sigma_2^2s_2^2}{s_1^2S_2^2}+\frac{m}{N}\frac{\sigma_3^2s_3^2}{s_1^2S_3^2}+\Big(n-\frac{l}{T}-\frac{m}{N}\Big)\frac{\sigma_1^2}{S_1^2}\Big).
$$

可以验证对于假设检验问题(4.13), $\widetilde{T}_4$定义了一个广义检验变量, 相应的广义p值为

$$
\widetilde{p}_4=\mathsf{P}(\widetilde{T}_4\ge\widetilde{t}_4|\theta=\theta_0).
$$

考虑相应尺度变换

$$
\begin{aligned}
&(\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3,\theta)\to(a\sigma_1,a\sigma_2,a\sigma_3,\theta)\\
&(S_1,S_2,S_3)\to(aS_1,aS_2,aS_3),\qquad(a>0).
\end{aligned}\tag{4.14}
$$

由于$\widetilde{T}_4$和假设检验问题(4.13)在尺度变换(4.14)下均保持不变, 所以假设检验问题(4.13)基于$\widetilde{T}_4$的广义p值检验为尺度变换(4.14)下的p不变检验.

为了构造$l\sigma_\mu^2+m\sigma_\lambda^2+n\sigma_\varepsilon^2$的不变置信区间, 我们考虑在尺度变换(4.14)下参数θ的不变置信区间. 定义

$$
\widetilde{T}_4^*=\frac{l}{T}\frac{\sigma_2^2s_2^2}{s_1^2S_2^2}+\frac{m}{N}\frac{\sigma_3^2s_3^2}{s_1^2S_3^2}+\Big(n-\frac{l}{T}-\frac{m}{N}\Big)\frac{\sigma_1^2}{S_1^2}.\tag{4.15}
$$

可以验证$\widetilde{T}_4^*$为一广义枢轴量, 且其观测值为θ. 利用$\widetilde{T}_4^*$可以构造θ的不变置信区间. 设$\widetilde{T}_4^*(\alpha)$和$\widetilde{T}_4^*(1-\alpha)$分别为$\widetilde{T}_4^*(\alpha)$的$\alpha$和$(1-\alpha)$分位数, 则$\widetilde{T}_4^*(\alpha)$为$\theta$的置信水平为$(1-\alpha)$的广义不变置信下限, $\widetilde{T}_4^*(1-\alpha)$则为$\theta$的置信水平为$(1-\alpha)$的广义不变置信上限.

§5. 模拟结果

本部分我们给出方差分量一般形式的假设检验问题(4.9)的部分模拟结果, 不失一般性取$l=m=n=1$. 选择截距为0的Panel数据模型(3.1), $y_{it}=x_{it1}\beta_1+\cdots+x_{itk}\beta_k+\mu_i+\lambda_t+\varepsilon_{it}$, $i=1,\cdots,N$; $t=1,\cdots,T$. 其中, $\lambda_t\sim N(0,1)$, $\varepsilon_{it}\sim N(0,0.1)$; $\mu_i\sim N(0,\sigma_\mu^2)$, $N=15$, $T=10$, 设计点$(x_{it1},x_{it2},\cdots,x_{itk})$随机选取. 考虑在回归系数的个数$k$为$2\backsim 5$时, 对基于广义检验变量(4.10)的广义p值检验的功效和基于广义枢轴量(4.11)的广义置信区间的覆盖率进行数值模拟, 结果如下面两表所示.

《应用概率统计》版权所用

表1　基于T_4的广义p值检验的功效($\alpha=0.05$)

k	β	c_0	σ_μ^2					
			0.1	0.2	0.4	0.8	1.2	1.5
2	$(1,2)'$	1.2	<u>0.0593</u>	0.0993	0.2013	0.5187	0.7767	0.8633
		1.3	0.0360	<u>0.0533</u>	0.1560	0.4300	0.6793	0.7974
		1.5	0.0120	0.0280	<u>0.0540</u>	0.2480	0.5020	0.6453
3	$(1,2,1)'$	1.2	<u>0.0513</u>	0.0933	0.1860	0.4780	0.7293	0.8213
		1.3	0.0320	<u>0.0593</u>	0.1467	0.4187	0.6353	0.7673
		1.5	0.0127	0.0153	<u>0.0533</u>	0.2553	0.4700	0.6187
4	$(1,2,1,2)'$	1.2	<u>0.0487</u>	0.0873	0.1973	0.4493	0.6687	0.7960
		1.3	0.0427	<u>0.0560</u>	0.1360	0.3270	0.5973	0.7427
		1.5	0.0153	0.0207	<u>0.0607</u>	0.2247	0.4440	0.5907
5	$(1,2,1,2,1)'$	1.2	<u>0.0587</u>	0.0853	0.1713	0.4067	0.6340	0.7578
		1.3	0.0340	<u>0.0560</u>	0.1247	0.3687	0.5753	0.6900
		1.5	0.0153	0.0307	<u>0.0540</u>	0.1973	0.4040	0.5573

表2　基于T_4^*的广义置信区间的覆盖率($\alpha=0.05$)

k	β	σ_μ^2					
		0.1	0.2	0.4	0.8	1.2	1.5
2	$(1,2)'$	0.9140	0.9340	0.9220	0.9610	0.9820	0.9840
3	$(1,2,1)'$	0.9350	0.9220	0.9240	0.9690	0.9710	0.9800
4	$(1,2,1,2)'$	0.9440	0.9220	0.9270	0.9760	0.9790	0.9820
5	$(1,2,1,2,1)'$	0.9400	0.9640	0.9350	0.9660	0.9820	0.9810

表1可以看出本文构造的广义p值检验能较好地控制犯第一类错误的概率, 功效为待检验参数的增函数且功效增长较为理想. 表2可以看出本文构造的广义置信区间包含参数的概率在$(1-\alpha)$附近波动. 因此广义p值理论方法用于解决此类问题具有一定的可行性.

参 考 文 献

[1] Tusi, K.W. and Weerahandi, S., Generalized p value in significiance testing of hytheses in the presence of nuisance parameters, *J. Amer. Statist. Assoc.*, **84**(1989), 602–607.

[2] Weerahandi, S., Generalized confidence intervals, *J. Amer. Statist. Assoc.*, **88**(1993), 899–905.

[3] Weerahandi, S., Testing variance components in mixed models with generalized p values, *J. Amer. Statist. Assoc.*, **86**(1991), 151–153.

《应用概率统计》版权所用

[4] Zhou, L.P. and Mathew, T., Some tests for variance components using generalized p values models, *Technometrics*, **36**(1994), 394–402.

[5] Chi, E.M. and Weerahandi, S., Comparing treatments under growth curve models: exact tests using generalized p values, *J. Statist. Plan. Inference*, **71**(1998), 179–189.

[6] Weerahandi, S. and Berger, V.W., Exact inference for growth curves with intraclass correlation structure, *Biometrics*, **55**(1999), 921-924.

[7] Lin, S.H. and Lee, J.C., Exact tests in simple growth curve models and one-way ANOVA with equicorrelation structure, *J. Multivariate Anal.*, **84**(2003), 351–368.

[8] Ye, R.D. and Wang, S.G., Generalized p values and generalized confidences intervals for variance components in genreal random effects model with balanced data, *Journal of Systems Science and Complexity*, **20**(2007), 572–584.

[9] Weerahandi, S., ANOVA under unequal error variances, *Bimetrics*, **51**(1995), 289–299.

[10] Krishnamoorthy, K. and Mathew, T., Inference on the means of lognormal distributions using generalized p-values and generalized confidence intervals, *J. Statist. Plan. Inference*, **115**(2003), 103–121.

[11] 李新民, 徐兴忠, 李国英, 广义P值的Fiducial推断, 中国科学(A辑), **6**(2007), 95–103.

[12] Tang, S.J. and Tusi, K.W., Distributional properties for the generalized p value for Behren-Fisher problem, *Statistics & Probability Letters*, **77**(2007), 1–8.

[13] Honda, Y., Testing the error compontents model with non-nonmal distributions, *Review of Econometric Studies*, **55**(1985), 681–690.

[14] Baltagi, B.H., Chang, Y.J. and Li, Q., Monte Carlo results on several new and existing tests for the error compontent model, *Journal of Econometrics*, **54**(1992), 95–120.

[15] 王松桂, 史建红, 尹素菊, 吴密霞, 线性模型引论, 科学出版社, 2004.

Exact Tests of Variance Components in Panel Data Model

CHENG JING[1,2] WANG SONGGUI[3] YUE RONGXIAN[1]

([1] *Mathematics and Science College, Shanghai Normal University, Shanghai, 200234*)

([2] *Department of Mathematics, Chaohu college, Chaohu, 238000*)

([3] *College of Applied Sciences, Beijing University of Technology, Beijing, 100022*)

In this paper, some new exact tests and confidence intervals of variance components in Panel data model with three random effects are constructed base on the concepts of generalized p value and generalized confidence interval. Invariance of these tests and confidence intervals under scale transformation is also discussed in the paper.The powers of these tests and coverage probabilities are obtained by numerical simulations. It is shown that generalized p value method is feasible and effective to resolve the hypothesis testing problems with nuisance parameters.

Keywords: Panel data model, random effect, generalized p value, generalized confidence interval, variance component.

AMS Subject Classification: 62J10.

《应用概率统计》版权所用