

半直线上随机环境中随机游动的极限性质 *

胡学平 李会葆

徐 聿

(安庆师范学院数学与计算科学学院, 安庆, 246133)

(华东师范大学金融与统计学院, 上海, 200241)

摘 要

本文对右半直线上在0点带有反射壁的随机环境中随机游动进行了研究, 得到了在环境是平稳遍历条件下的常返准则及在环境是独立同分布条件下的一个强大数定律和中心极限定理.

关键词: 随机环境, 随机游动, 常返性, 强大数定律, 中心极限定理.

学科分类号: O211.62.

§1. 引 言

随机环境中的随机游动(RWIRE)已成为当今随机过程研究的一个较活跃的问题, 一维随机环境中的随机游动首先是由M.V. Kozlov^[1]提出的, 随后Solomon^[2]讨论了在环境为独立同分布下一维紧邻的情形. 文[3]研究了在独立同分布环境下半直线上随机游动的常返性和依概率收敛的大数定律. 文[4]研究了在环境独立不同分布情形下直线上随机游动的一些性质. 本文进一步研究文[3]中的模型, 当环境是平稳遍历时得到了一个常返暂留准则, 在环境为独立同分布情形下得到了一个强大数定律和中心极限定理, 从而推广了文[3]中有关结论.

定义 1.1 设 $p_0 = 1$, $\{(p_n, q_n), n \geq 1\}$ 为概率空间 (Ω, \mathcal{F}, P) 上的一系列随机变量, 记为 $\omega = \{(p_n, q_n), n \geq 1\}$, 我们称具有状态空间 $Z_+ = \{0, 1, 2, \dots\}$ 的随机序列 $\{X_n, n \geq 0\}$ 为在0点具有反射壁的右半直线上随机环境中的随机游动(RWIRE), 如果 X_n 满足:

$$P(X_0 = 0) = 1;$$

$$P(X_{n+1} = j | X_0 = 0, X_1 = x_1, \dots, X_{n-1} = x_{n-1}, X_n = i; \omega) = \begin{cases} p_i, & j = i + 1; \\ q_i, & j = i - 1; \text{ a.s.} \\ 0, & \text{其它.} \end{cases}$$

其中 $x_k, i, j \in Z_+, k = 1, 2, \dots, n-1, 0 < p_n, q_n < 1, p_n + q_n = 1$. 称这样的随机变量列 $\omega = \{(p_n, q_n), n \geq 1\}$ 为随机环境. 由文[2]知在给定随机环境下的右半直线上的RWIRE是存在的. 固定环境, 此时 $\{X_n, n \geq 0\}$ 是 Z_+ 上的时齐马氏链. 记 $\rho_n = q_n/p_n, n \geq 1, \sigma_n = \rho_1 \cdots \rho_n, n \geq 1, (T\omega)_i = \omega_{i+1}, (i \in Z_+)$ (T 为定义在 Z_+ 上的推移算子).

*安徽省高校青年教师资助项目(2007jq1117)、安徽省教育厅自然科学基金项目(Kj2007B122)资助.

本文2006年12月7日收到, 2007年9月3日收到修改稿.

引理 1.1^[2] 若对于几乎所有的环境, $\{X_n, n \geq 0\}$ 在此环境下某一性质成立, 则半直线上的RWIRE $\{X_n, n \geq 0\}$ 几乎必然具有此性质.

§2. 常返性

引理 2.1^[3] 对固定的环境 ω , 对任意 $n \geq 1, 0 < p_n, q_n < 1, p_n + q_n = 1$ 有 $P - a.s.$

- (i) $\{X_n, n \geq 0\}$ 常返 $\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n = \infty$;
- (ii) $\{X_n, n \geq 0\}$ 正常返 $\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n \sigma_n} < \infty$;
- (iii) $\{X_n, n \geq 0\}$ 零常返 $\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n = \infty, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n \sigma_n} = \infty$;
- (iv) $\{X_n, n \geq 0\}$ 非常返 $\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n < \infty$.

引理 2.2^[5] 设 $Y_i, i \geq 1$ 为实值的平稳序列, $Z_n = \sum_{i=1}^n Y_i$, 则依概率1有 $\lim_{n \rightarrow \infty} Z_n = \infty$ 蕴含 $\liminf_{n \rightarrow \infty} Z_n/n > 0$.

定理 2.1 对于以上模型中定义的随机游动, 当环境是平稳遍历且 $E \log \rho_1$ 存在时, 则有:

- (i) $\{X_n, n \geq 0\}$ 非常返 $\Leftrightarrow E \log \rho_1 < 0$;
- (ii) $\{X_n, n \geq 0\}$ 常返 $\Leftrightarrow E \log \rho_1 \geq 0$.

证明: 令 $s = s(\omega) = \sum_{n=1}^{\infty} \rho_1 \cdots \rho_n, D = \{\omega \in \Omega : s(\omega) < \infty\}$, 则 D 为 T -推移不变集, 由于环境是平稳遍历的, 于是 $Q(D) = 0$ 或 1 (Q 为定义在环境空间中的概率测度). 由引理 2.1 知只需证明 $Q(D) = 1 \Leftrightarrow E \log \rho_1 < 0$ 即可.

若 $E \log \rho_1 < 0$, 则存在 $c < 0$ 使得 $c = E \log \rho_1 < 0$, 由 Q 的遍历性, 存在 $n_0(\omega)$, 当 $n > n_0(\omega)$ 时, 有 $(1/n) \sum_{i=1}^n \log \rho_i \leq c/2 < 0$, 从而存在某个 $C_1(\omega) < \infty, Q - a.s.$ 有

$$\sum_{n=1}^{\infty} \rho_1 \cdots \rho_n \leq C_1(\omega) + \sum_{k=n_0(\omega)+1}^{\infty} e^{kc/2} < \infty, \quad Q - a.s..$$

由此可得 $Q(D) = 1$.

反之, 若 $\omega \in D$, 由于 $s < \infty$, 有 $\rho_1 \cdots \rho_n \rightarrow 0, (n \rightarrow \infty)$, 所以

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \log \rho_k = -\infty.$$

令 $Y_i = -\log \rho_i$, 则 $\{Y_i, i \geq 1\}$ 为平稳序列, 由引理 2.2 可得

$$E \log \rho_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \log \rho_k < 0.$$

从而 (i) 得证. 同理可证明 (ii). \square

定理 2.2 在定理2.1的假设下, 有:

- (i) $\{X_n, n \geq 0\}$ 正常返 $\Leftrightarrow E \log \rho_1 > 0$;
 (ii) $\{X_n, n \geq 0\}$ 零常返 $\Leftrightarrow E \log \rho_1 = 0$.

证明: (i)的充分性: 记 $S_n = \sum_{i=1}^n \log \rho_i$, 当 $E \log \rho_1 > 0$, $E \log \rho_1^{-1} < 0$. 由定理2.1的证明可知 $\lim_{n \rightarrow \infty} -S_n/n^{1/2} = -\infty$ (a.s.). 故对几乎所有的 ω 存在 $K(\omega)$, 当 $n > K(\omega)$ 时,

$$-S_n(\omega) < -n^{1/2}, \quad \sum_{n=K(\omega)}^{\infty} \exp\{-S_n\} < \sum_{n=K(\omega)}^{\infty} \exp\{-n^{1/2}\} < \infty.$$

从而

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n \rho_n} &= \frac{1}{q_1} + \sum_{n=2}^{\infty} (1 + \rho_n) e^{-S_n} < \frac{1}{q_1} + \sum_{n=2}^{\infty} (1 + e^{S_n - S_{n-1}}) e^{-S_n} \\ &= \frac{1}{q_1} + \sum_{n=2}^{\infty} (e^{-S_n} + e^{-S_{n-1}}) < \infty \quad (\text{a.s.}). \end{aligned}$$

又 $\sum_{n=1}^{\infty} \rho_n = \infty$, 故对几乎所有的环境, $\{X_n, n \geq 0\}$ 正常返, 从而由引理1.1和引理2.1知在随机环境中 $\{X_n, n \geq 0\}$ 正常返.

(ii)的充分性: 令 $F(\omega) = \sum_{n=1}^{\infty} 1/(p_n \rho_1 \cdots \rho_n)$, 则当 $E \log \rho_1 = 0$, 由于 $\{F(\omega) = \infty\}$ 是推移不变集, 根据(i)的证明知 $P(\{F(\omega) = \infty\}) = 1$, 故对几乎所有的环境, $\{X_n, n \geq 0\}$ 零常返, 从而由引理1.1和引理2.1知在随机环境中 $\{X_n, n \geq 0\}$ 零常返.

往证必要性: 对于(i)若 $\{X_n, n \geq 0\}$ 是正常返的, 则必有 $E \log \rho_1 > 0$, 否则若 $E \log \rho_1 = 0$, 由(ii)的充分性知 $\{X_n, n \geq 0\}$ 是零常返的, 矛盾; 同理若 $\{X_n, n \geq 0\}$ 是零常返的, 则必有 $E \log \rho_1 = 0$, 故定理2.2得证. \square

推论 当环境是独立同分布且 $E \log \rho_1$ 存在时, 则有

- (i) $\{X_n, n \geq 0\}$ 常返 $\Leftrightarrow E \log \rho_1 \geq 0$;
 (ii) $\{X_n, n \geq 0\}$ 正常返 $\Leftrightarrow E \log \rho_1 > 0$;
 (iii) $\{X_n, n \geq 0\}$ 零常返 $\Leftrightarrow E \log \rho_1 = 0$;
 (iv) $\{X_n, n \geq 0\}$ 非常返 $\Leftrightarrow E \log \rho_1 < 0$.

注 此推论为文[3]中定理2.1与定理2.2.

§3. 强大数定律与中心极限定理

以下讨论 Z_+ 上 RWIRE $\{X_n\}$ 的极限性质, 令 $\mathcal{A} = \sigma((p_n, q_n), n \geq 1)$

$$T_0 = 0, \quad T_n = \begin{cases} \min\{k \geq 0, X_k = n\}, & \text{右边集非空;} \\ \infty, & \text{否则.} \end{cases}$$

记 $f(i, k) = P(T_n = k | X_0 = i) \triangleq P_i(T_n = k)$, $F(i) = \sum_{k=1}^{\infty} k f(i, k)$, 则 $F(i) = E_i(T_n | \mathcal{A})$, 且固定环境 ω 时, $f(i, k)$ 表示从 i 出发, 恰好在 k 时刻首达 n 的概率, 由马氏性有:

$$F(i) = p_i F(i+1) + q_i F(i-1) + 1, \quad 0 < i < n, \quad F(0) = 1 + F(1), \quad F(n) = 0.$$

定理 3.1 记 $\delta = E\rho_1$, 当环境是独立同分布时, 若 $\delta < 1$, 有

$$(1) \quad \frac{T_n}{n} \xrightarrow{\text{a.s.}} \frac{1+\delta}{1-\delta}; \quad (2) \quad \frac{X_n}{n} \xrightarrow{\text{a.s.}} \frac{1-\delta}{1+\delta}.$$

为证明定理 3.1 需要以下引理

引理 3.1^[3] 假设 $\delta = E\rho_1$ 存在, 当 $\delta < 1$ 时, 有

$$ET_n = n \frac{1+\delta}{1-\delta} - 2 \frac{\delta(1-\delta^n)}{(1-\delta)^2}.$$

引理 3.2^[6] 假设 $\{X_n, n \geq 1\}$ 为独立的随机变量序列, $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$, 则:

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{\text{a.s.}} 0 \Leftrightarrow \frac{S_n}{n} \xrightarrow{P} 0 \text{ 且 } \frac{S_{2^n}}{2^n} \xrightarrow{\text{a.s.}} 0.$$

定理 3.1 之证明 (1) 首先构造如下一个耦合, 如果对 $\omega, \omega' \in \Omega$ 且 $\omega'(x) = \omega(x)$, $x \geq 1$, 在 $Z_{+\text{even}}^2 = \{\bar{x} = (x', x) \in Z \times Z_+; x - x' \in 2Z\}$ 上构造一个马氏链 $\{(X'_n, X_n), n \geq 0\}$, 它以 $P_{\bar{x}, \omega', \omega}$ 为分布律, 对 $\bar{x} = (x', x) \in Z_{+\text{even}}^2$ 使得:

在 $P_{\bar{x}, \omega', \omega}$ 与 $P_{x, \omega}$ 下 X_n 有相同的分布;

在 $P_{\bar{x}, \omega', \omega}$ 与 $P_{x', \omega'}$ 下 X'_n 有相同的分布;

且若 $x' \leq x$, 则 $P_{\bar{x}, \omega', \omega}[X'_n \leq X_n, n \geq 0] = 1$.

且按以下方式选取马氏链的转移概率: 当 $\bar{x} = (x', x)$, $x' \neq x$ 时, 粒子独立地各自以相应的概率

$$p(x'; \omega') = \omega'(x'); \quad p(x; \omega) = \begin{cases} \omega(x), & x \geq 1; \\ 1, & x = 0; \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

跳向 $x' + 1$ 和 $x + 1$, 以

$$q(x'; \omega') = 1 - \omega'(x'); \quad q(x; \omega) = \begin{cases} 1 - \omega(x), & x \geq 1; \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

跳向 $x' - 1$ 和 $x - 1$; 另一方面, 当 $\bar{x} = (x, x)$ 时, 粒子按如下方式运动:

$$\omega(x) : (x, x) \rightarrow (x+1, x+1), \quad x \geq 1;$$

$$1 - \omega(x) : (x, x) \rightarrow (x-1, x-1), \quad x \geq 1;$$

$$1 : (0, 0) \rightarrow (1, 1); \quad x = 0;$$

$$0 : \text{其它}.$$

考虑 Z 上的RWIRE $\{X'_n\}$, 令

$$T'_0 = 0, \quad T'_n = \begin{cases} \min\{k > 0, X'_k = n\}, & \text{右边集非空;} \\ +\infty, & \text{否则,} \end{cases} \quad \tau'_n = \begin{cases} T'_n - T'_{n-1}, & n \geq 1; \\ T'_n - T'_{n+1}, & n \leq -1. \end{cases}$$

由Solomon文[2]知, $\{\tau'_n, n \geq 1\}$ 是独立同分布序列, 且

$$\mathbf{E}\tau'_n = \begin{cases} (1+\delta)/(1-\delta), & \delta < 1; \\ +\infty, & \delta \geq 1. \end{cases}$$

当 $\delta < 1$ 时, $\mathbf{E}T'_n = \mathbf{E} \sum_{i=1}^n \tau'_i = n \times [(1+\delta)/(1-\delta)]$, 当同在 Z 上考虑 Z_+ 上的RWIRE $\{X_n\}$ 时, 由以上耦合易得 $T_n \leq T'_n$, 且 $\{\tau_n, n > 0\}$ 为独立的随机变量序列, 故由引理3.1知: 对任意 $\epsilon > 0, \delta < 1$,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\left(\left|\frac{T_n}{n} - \frac{T'_n}{n}\right| \geq \epsilon\right) &\leq \frac{\mathbf{E}T'_n - \mathbf{E}T_n}{n\epsilon} \\ &= \frac{n \times \frac{1+\delta}{1-\delta} - n \times \frac{1+\delta}{1-\delta} + \frac{2\delta(1-\delta^n)}{(1-\delta)^2}}{n\epsilon} \rightarrow 0, \quad (n \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

因此 $T_n/n - T'_n/n \xrightarrow{P} 0$, 又对任意 $\epsilon > 0, \delta < 1$, 有:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\left(\left|\frac{T_{2^n}}{2^n} - \frac{T'_{2^n}}{2^n}\right| \geq \epsilon\right) &\leq \frac{\mathbf{E}T'_{2^n} - \mathbf{E}T_{2^n}}{2^n\epsilon} \\ &= \frac{2^n \times \frac{1+\delta}{1-\delta} - 2^n \times \frac{1+\delta}{1-\delta} + \frac{2\delta(1-\delta^{2^n})}{(1-\delta)^2}}{2^n\epsilon} \rightarrow 0, \quad (n \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

由Borel-Cantelli引理可知 $(T_{2^n} - T'_{2^n})/2^n \xrightarrow{\text{a.s.}} 0$, 从而由引理3.2可得 $T_n/n - T'_n/n \xrightarrow{\text{a.s.}} 0$. 再由[2]知 $T'_n/n \xrightarrow{\text{a.s.}} (1+\delta)/(1-\delta)$, ($\delta < 1$), 从而结论(1)成立.

(2) 由 T_n 的定义, 有 $T_n < T_{n+1}$, $n = 1, 2, \dots$, 故 $T_n \xrightarrow{\text{a.s.}} +\infty$, ($n \rightarrow \infty$), 因此对任意的 n , 存在唯一的 $k_n(\omega)$ 使得

$$T_{k_n} \leq n < T_{k_n+1}, \quad k_n \in Z_+, \quad \text{即} \quad \frac{k_n}{T_{k_n+1}} < \frac{k_n}{n} \leq \frac{k_n}{T_{k_n}}.$$

当 $\delta < 1$ 时, 由Jensen不等式有 $\mathbf{E} \log \rho_1 \leq \log \mathbf{E} \rho_1 = \log \delta < 0$, 由引理2.1的(iv)知 $\{X_n, n \geq 0\}$ 是非常返的. 即 $X_n \rightarrow +\infty$, a.s. ($n \rightarrow \infty$), 又在时刻 n 粒子尚未到达 $k_n + 1$, 故 $X_n < k_n + 1$, 因此 $k_n \rightarrow +\infty$, a.s., 又 $k_n/T_{k_n} \xrightarrow{\text{a.s.}} (1-\delta)/(1+\delta)$. 从而可得

$$\frac{k_n}{n} \xrightarrow{\text{a.s.}} \frac{1-\delta}{1+\delta}, \quad \frac{T_{k_n}}{n} \xrightarrow{\text{a.s.}} 1.$$

再由 k_n 的定义, 从 T_{k_n} 到 n 这段时间粒子至多左移 $n - T_{k_n}$ 个单位, 故 $k_n - (n - T_{k_n}) \leq X_n < k_n + 1$. 即

$$\frac{k_n}{n} - \left(1 - \frac{T_{k_n}}{n}\right) \leq \frac{X_n}{n} < \frac{k_n + 1}{n}.$$

从而可得证 $X_n/n \xrightarrow{\text{a.s.}} (1 - \delta)/(1 + \delta)$. \square

引理3.3^[7] 对固定环境 $e = \{p_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$, 当 $\lim_{n \rightarrow \infty} X'_n = +\infty$ 时, 有:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_e \tau'_n &= (1 + \rho_{k-1}) + \sum_{j=-\infty}^{k-1} (1 + \rho_{j-1}) \rho_j \cdots \rho_{k-1}, \quad k \in \mathbb{Z}. \\ D_e(\tau'_n) &= 4(\rho_{n-1} + \rho_{n-1}^2)(1 + \rho_{n-2} + \rho_{n-2}\rho_{n-3} + \rho_{n-2}\rho_{n-3}\rho_{n-4} + \cdots)^2 \\ &\quad + 4 \sum_{k=1}^{\infty} \rho_{n-1}\rho_{n-2} \cdots \rho_{n-k}(\rho_{n-k-1} + \rho_{n-k-1}^2) \\ &\quad \cdot (1 + \rho_{n-k-2} + \rho_{n-k-2}\rho_{n-k-3} + \rho_{n-k-2}\rho_{n-k-3}\rho_{n-k-4} + \cdots)^2. \end{aligned}$$

定理 3.2 当环境是独立同分布时, 令 $v = (1 - \delta)/(1 + \delta)$, $\sigma^2 = D\tau'_n$, $A = \sigma v^{3/2}$, 若 $\mathbb{E} \log \rho_1 < 0$; $q_n < p_n$, $n \in \mathbb{Z}_+$, $\mathbb{E}[(1 + \rho_1)/(1 - \rho_1)]^2 < \infty$, 则

$$\frac{T_n - nv^{-1}}{\sqrt{n}} \Rightarrow N(0, \sigma); \quad \frac{X_n - nv}{\sqrt{n}} \Rightarrow N(0, A), \quad (n \rightarrow \infty).$$

证明: 对任意正整数 $n, L(> 1), M$, 由 T_n 的定义有

$$\begin{aligned} \{T_L \geq n\} &\subset \{X_n \leq L\} \subset \left(\{T_{L+M} \geq n\} \cup \left\{ \left(\inf_{s \geq T_{L+M}} X_s \leq L \right) \cap (T_{L+M} < n) \right\} \right) \\ &\subset \left(\{T_{L+M} \geq n\} \cup \left\{ \inf_{s \geq T_{L+M}} X_s - (L + M) \leq -M \right\} \right). \end{aligned}$$

因为 Q 是i.i.d.的, 由马氏性及 $\mathbb{E} \log \rho_1 < 0$ 可得

$$\lim_{M \rightarrow +\infty} \mathbb{P} \left(\inf_{s \geq T_{L+M}} X_s - (L + M) \leq -M \right) = 0.$$

因此对任何正整数 L 及 $\delta > 0$, 存在足够大的 M 使得

$$\mathbb{P}(T_L \geq n) \leq \mathbb{P}(X_n \leq L) \leq \mathbb{P}(T_{L+M} \geq n) + \delta. \quad (3.1)$$

对任意实数 x , 令

$$L = L(n, x) = nv + x\sigma v^{3/2}\sqrt{n} + o(\sqrt{n}).$$

于是 $L(n, x) \rightarrow +\infty, (n \rightarrow \infty)$ 且

$$\mathbb{P}(X_n \leq L(n, x)) \approx \mathbb{P} \left(\frac{X_n - nv}{\sigma v^{3/2}\sqrt{n}} \leq x \right). \quad (3.2)$$

另一方面

$$\begin{aligned} P(T_{L(n,x)} \geq n) &= P\left(\frac{T_{L(n,x)} - L(n,x)v^{-1}}{\sigma\sqrt{L(n,x)}} \geq \frac{n - L(n,x)v^{-1}}{\sigma\sqrt{L(n,x)}}\right), \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n - L(n,x)v^{-1}}{\sigma\sqrt{L(n,x)}} &= -x. \end{aligned}$$

由引理3.3

$$\begin{aligned} E_e(\tau'_n)^2 &= D_e(\tau'_n) + (E_e \tau'_n)^2 \\ &= 4(\rho_{n-1} + \rho_{n-1}^2)(1 + \rho_{n-2} + \rho_{n-2}\rho_{n-3} + \rho_{n-2}\rho_{n-3}\rho_{n-4} + \cdots)^2 \\ &\quad + 4 \sum_{k=1}^{\infty} \rho_{n-1}\rho_{n-2} \cdots \rho_{n-k}(\rho_{n-k-1} + \rho_{n-k-1}^2) \\ &\quad \cdot (1 + \rho_{n-k-2} + \rho_{n-k-2}\rho_{n-k-3} + \rho_{n-k-2}\rho_{n-k-3}\rho_{n-k-4} + \cdots)^2 \\ &\quad + \left[(1 + \rho_{k-1}) + \sum_{j=-\infty}^{k-1} (1 + \rho_{j-1})\rho_j \cdots \rho_{k-1}\right]^2. \end{aligned}$$

对上式两边关于环境取数学期望, 并注意 $q_n < p_n$, $n \in Z$, 且环境是独立同分布, 在随机环境下有:

$$\begin{aligned} E(\tau'_n)^2 &= 4(E\rho_{n-1} + E\rho_{n-1}^2)E(1 + \rho_{n-2} + \rho_{n-2}\rho_{n-3} + \rho_{n-2}\rho_{n-3}\rho_{n-4} + \cdots)^2 \\ &\quad + 4 \sum_{k=1}^{\infty} E\rho_{n-1}E\rho_{n-2} \cdots E\rho_{n-k}(E\rho_{n-k-1} + E\rho_{n-k-1}^2) \\ &\quad \cdot E(1 + \rho_{n-k-2} + \rho_{n-k-2}\rho_{n-k-3} + \rho_{n-k-2}\rho_{n-k-3}\rho_{n-k-4} + \cdots)^2 \\ &\quad + E\left[(1 + \rho_{k-1}) + \sum_{j=-\infty}^{k-1} (1 + \rho_{j-1})\rho_j \cdots \rho_{k-1}\right]^2 \\ &\leq 4\left[E\left(\frac{1 + \rho_1}{1 - \rho_1}\right)^2\right]^2 + 4\left[E\left(\frac{1 + \rho_1}{1 - \rho_1}\right)^2\right]^3 + E\left(\frac{1 + \rho_1}{1 - \rho_1}\right)^2 < \infty. \end{aligned}$$

从而 $D(\tau'_n) \leq E(\tau'_n)^2 < \infty$, 又 $\{\tau'_n, n \geq 1\}$ 独立同分布, 由条件及独立同分布随机变量列的中心极限定理有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(T'_{L(n,x)} \geq n) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(T'_{L(n,x)+M} \geq n) = 1 - \Phi(-x) = \Phi(x).$$

而 $T_n/n - T'_n/n \xrightarrow{\text{a.s.}} 0$, 故

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(T_{L(n,x)} \geq n) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(T_{L(n,x)+M} \geq n) = \Phi(x).$$

这里 $\Phi(x) = (1/\sqrt{2\pi}) \int_{-\infty}^x \exp(-t^2/2)dt$, 由(3.1)和(3.2)知结论成立. \square

参 考 文 献

- [1] Kozlov, M.V., Random walk in a one dimensional random medium, *Theory Prob. Appl.*, **18**(1973), 387–388.
- [2] Solomon, F., Random walks in a random environment, *Ann. Prob.*, **3**(1975), 1–31.
- [3] 毕秋香, 半直线上随机环境中的随机游动的若干性质, *应用概率统计*, **13**(2)(1997), 120–124.
- [4] 胡学平, 李会葆, 直线上随机环境中可逗留的随机游动的若干性质, *数学研究*, **39**(2)(2006), 198–203.
- [5] Kesten, H., Sum of stationary sequences cannot grow slower than linearly, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **49**(1975), 145–168.
- [6] Chung, K.L., *A Course in Probability Theory*, New York: Academic Press, 1974.
- [7] Alili, S., Asymptotic behavior for random walks in random environments, *J. Appl. Prob.*, **36**(1999), 334–349.

Limit Properties for Random Walks in Random Environments on Half-Line

HU XUEPING LI HUIBAO

(School of Mathematics and Computation Science, Anqing Teachers College, Anqing, 246133)

XU SONG

(School of Finance and Statistics, East China Normal University, Shanghai, 200241)

In this article, we mainly discuss a class of random walks in random environments on right half line and obtain an recurrence-transience criterion in stationary and ergodic random environments. Then we further study the limit properties and derive a strong law of large numbers and a center limit theorem of this random walks in i.i.d. random environments. So we extend some results in [3].

Keywords: Random environment, random walks, recurrence, strong law of large numbers, center limit theorem.

AMS Subject Classification: 60J15.