应用概率统计　第二十五卷
第四期　2009年8月

Chinese Journal of Applied Probability
and Statistics Vol.25 No.4 Aug. 2009

一类上界型拟合优度检验统计量的精确分布 *

张军舰

(广西师范大学数学科学学院, 桂林, 541004;　北京工业大学应用数理学院, 北京, 100124)

李国英　　赵志源

(中国科学院数学与系统科学研究院, 北京, 100190)

摘　要

对于简单假设的拟合优度检验, Zhang (2002)构造出一类上界型检验. 取不同的参数λ和不同的权函数$q(t)$, 这类检验包含了Kolmogorov-Smirov检验, Berk and Jones (1979)检验等已有的上界型检验. 文献中仅对极少数λ和$q(t)$所对应的检验给出了零假设下的精确分布. 然而, 针对不同的问题, "好"的检验是不同的, 因此有必要对任意给定的λ和$q(t)$情况, 讨论该类检验. 本文对任意给定的λ和$q(t)\equiv 1$情况, 导出了相应上界型检验统计量在零假设下的精确分布. 当样本容量n较大时, 精确分布的计算时间较长, 本文还通过模拟比较得到了在不同样本量下, 应采用的计算方法. 最后, 给出一个实际例子对前述方法加以简单说明.

关键词:　精确分布, 广义非参似然比, 拟合优度检验.

学科分类号:　O211.3, O212.7.

§1.　引　　言

设$X\sim F$为连续型随机变量, $X_1,\cdots,X_n$为来自X的i.i.d.样本, F_n为相应的经验分布函数. 考虑检验问题

$$H_0: F=F_0 \longleftrightarrow H_1: F\neq F_0. \tag{1.1}$$

其中F_0为一个已知的连续分布函数. 记

$$K_\lambda(t,s)=\frac{1}{\lambda(\lambda+1)}\left[\frac{t^{\lambda+1}}{s^\lambda}+\frac{(1-t)^{\lambda+1}}{(1-s)^\lambda}-1\right], \tag{1.2}$$

其中$\lambda\in(-\infty,\infty)$, $t,s\in[0,1]$, 当λ,t,s取某些特殊值, (1.2)式右边无定义时, $K_\lambda(t,s)$均取为(1.2)式右边相应的极限.

对检验问题(1.1), 文献[1]构造了一类上界型拟合优度检验统计量, 它可以表示为

$$R_{n,\lambda}(q)=\begin{cases}\sup\limits_{-\infty<x<\infty}|K_\lambda(F_n(x),F_0(x))|/q(F_0(x)) & \lambda>-1;\\ \sup\limits_{X_{(1)}\le x<X_{(n)}}|K_\lambda(F_n(x),F_0(x))|/q(F_0(x)) & \lambda\le -1,\end{cases} \tag{1.3}$$

*国家自然科学基金(10661003, 10371126)、广西自然科学基金(桂科自0832102)、广西师范大学博士基金资助.
本文2007年1月23日收到, 2009年1月4日收到修改稿.

其中$X_{(1)} \le \cdots \le X_{(n)}$为样本$X_1, \cdots, X_n$的次序统计量. 由于$\lambda = 0$时, $K_0(F_n(x), F_0(x))$实际上是非参数似然比(见[2]), 因此本文将$R_{n,\lambda}(q)$称为上界型广义非参似然比检验统计量, 简称为上界型(检验)统计量.

取不同的λ值和不同的权函数$q(t)$, 可以得到不同的拟合优度检验, 包括常见的检验. 例如, 当$\lambda = 1$, $q(t) = [t(1-t)]^{-1}$时, $2R_{n,\lambda}(q)$为Kolmogorov-Smirov (KS)检验统计量的平方; 当$\lambda = 1$, $q(t) \equiv 1$时, $2R_{n,\lambda}(q)$为标准化经验过程的上界统计量[3, 4]的平方; 当$\lambda = 0$, $q(t) \equiv 1$时, $R_{n,\lambda}(q)$为[5]中的BJ统计量; 当$\lambda = -1$, $q(t) \equiv 1$时, $R_{n,\lambda}(q)$为修正的BJ统计量[6].

关于这类统计量的渐近性质, [7]对任意给定的λ和一般的权函数$q(t)$, 进行了比较系统的讨论. 对于小样本问题, 用渐近分布的结果误差较大, 因此有必要讨论小样本下的精确分布. 关于(1.3)的精确分布, 文献中仅对$\lambda = 1, 0, -1$三种情况有讨论. 对$\lambda = 1$的情况, 目前的文献主要集中在KS统计量上. 如[8]和[9] (第九章)等讨论并给出了KS统计量的精确分布. 对$\lambda = 0, -1$的情况, [6]给出了BJ统计量和修正BJ统计量的精确分布. 其他情况, 尚未见有文献研究. 众所周知, 拟合优度检验是一个复杂的问题, 随着实际背景的不同, 较好的处理方法也就各异. 每一种方法都在特定的条件下有其优越性, 而在另外的条件下又显示其不足. 因此对所有的λ和一般的权函数$q(t)$, 讨论广义非参似然比检验的精确分布具有较大的理论意义和实用价值. 本文将对任意给定的λ和权函数$q(t) \equiv 1$情况, 讨论上界型统计量(1.3)在零假设成立时的精确分布, 并对该精确分布与数值模拟得到的经验分布进行了简单比较.

本文第二节给出在$q(t) \equiv 1$时, 零假设下统计量(1.3)的精确分布及其计算步骤; 第三节就精确方法与模拟方法进行了简单比较, 并给出一个实例加以简单说明; 第四节给出第二节中定理的证明.

§2. 零假设下统计量的精确分布

在第一节的记号和假定下, 令$T = F_0(X)$. 显然T是一个$(0,1)$上的随机变量, 且当H_0成立时, $T = F_0(X) \sim U(0,1)$. 因此不失一般性, 取F_0为$[0,1]$上的均匀分布$U(0,1)$. 相应地, 要检验的零假设为:

$$H_0 : F \text{ 为 } U(0,1) \text{ 分布}. \tag{2.1}$$

此时上界型统计量(1.3)式为

$$R_{n,\lambda}(q) = \begin{cases} \sup\limits_{0<t<1} |K_\lambda(F_n(t), t)|/q(t) & \lambda > -1; \\ \sup\limits_{X_{(1)} \le t < X_{(n)}} |K_\lambda(F_n(t), t)|/q(t) & \lambda \le -1. \end{cases} \tag{2.2}$$

本节对$q(t)\equiv 1$和任意给定的参数λ情况, 导出上界型统计量$R_{n,\lambda}(1)$的精确分布. 其证明放在第四节. 对一般权函数$q(t)$情况, 由于$q(t)$与λ和样本无关, 因此不难得到类似的结果, 不再一一细说.

定理 2.1　设零假设(2.1)成立,

(i) 当$\lambda>-1$时, $R_{n,\lambda}(1)\,\hat{=}\,R_{n,\lambda}$ $(n\geq 1)$的分布函数为

$$\mathsf{P}(R_{n,\lambda}\leq z)=\mathsf{P}(a_i\leq X_{(i)}\leq b_i, 1\leq i\leq n). \tag{2.3}$$

其中

$$a_i=\min\left\{x\middle|K_\lambda\left(\frac{i}{n},x\right)\leq z\right\},\quad b_i=1-a_{n-i+1},\qquad i=1,\cdots,n.$$

(ii) 当$\lambda\leq -1$时, $R_{n,\lambda}$ $(n\geq 2)$的分布函数为

$$\mathsf{P}\{R_{n,\lambda}\leq z\}=\mathsf{P}\{\widetilde{a}_i\leq X_{(i)}\leq \widetilde{b}_i, 1\leq i\leq n\}. \tag{2.4}$$

其中

$$\widetilde{a}_i=\min\left\{x\middle|K_\lambda\left(\frac{i}{n},x\right)\leq z\right\},\qquad i=1,\cdots,n-1;\ \widetilde{a}_n=\widetilde{a}_{n-1}.$$
$$\widetilde{b}_i=1-\widetilde{a}_{n-i+1},\qquad i=1,\cdots,n.$$

定理2.1的证明见第四节.

注记 1　当$\lambda=0$或-1时, (2.3)和(2.4)即是[6]中的结论; 当$\lambda=1$时, (2.3)即是[8, 9]中的结果.

当样本容量n较小时, 我们可以给出(2.3)和(2.4)的显式表达. 即

推论 2.1　设零假设(2.1)成立,

(i) 当$\lambda>0$时, $R_{1,\lambda}$ (即$n=1$)的分布函数为

$$\mathsf{P}(R_{1,\lambda}\leq z)=1-2[1+\lambda(\lambda+1)z]^{-1/\lambda},\qquad z\geq(2^\lambda-1)/[\lambda(\lambda+1)].$$

(ii) 当$\lambda=0$时, $R_{1,\lambda}$ (即$n=1$)的分布函数为

$$\mathsf{P}(R_{1,0}\leq z)=1-2\mathrm{e}^{-z},\qquad z\geq\log 2.$$

(iii) 当$-1<\lambda<0$时, $R_{1,\lambda}$ (即$n=1$)的分布函数为

$$\mathsf{P}(R_{1,\lambda}\leq z)=\begin{cases}0 & z<0;\\ 2-2[1+\lambda(\lambda+1)z]^{-1/\lambda} & 0\leq z\leq(2^\lambda-1)/[\lambda(\lambda+1)];\\ 1 & z>(2^\lambda-1)/[\lambda(\lambda+1)].\end{cases}$$

(iv) 当$\lambda \le -1$时, $R_{2,\lambda}$ (即$n=2$)的分布函数为

$$\mathsf{P}\{R_{2,\lambda} \le z\} = \begin{cases} 0 & z < 0; \\ (1-2l_z)^2 & 0 \le z \le (2^{-(\lambda+1)}-1)/[\lambda(\lambda+1)]; \\ 1 & z > (2^{-(\lambda+1)}-1)/[\lambda(\lambda+1)]. \end{cases}$$

其中l_z满足$0 \le l_z \le 1/2$且$K_\lambda(1/2, l_z) = z$; $\lambda = -1$时, 上式右边取$\lambda \to 0$时的极限.

证明: 由定理2.1可直接得到. □

由推论2.1可知, 当样本容量$n=1$或$n=2$时, 可以得到(2.3)和(2.4)的显式表达. 但当n较大时, (2.3)和(2.4)的显式表达式并不容易得到或计算起来比较复杂. 文献[10]给出了一种在得到a_i和b_i之后的迭代算法. 归纳起来, 可得到精确分布的计算步骤如下.

1. 给定n, λ, z;
2. 按照定理2.1给出的公式求a_i, b_i, $i=1,\cdots,n$;
3. 用[10]中的迭代方法计算由(2.3)和(2.4)所确定的$\mathsf{P}(R_{n,\lambda} \le z)$.

由此步骤, 对任意给定的n, λ和z, 均可精确地求出相应的$\mathsf{P}(R_{n,\lambda} \le z)$. 进一步也可以求出$R_{n,\lambda}$的分位数, 给出检验的临界值. 例如表1就是利用上述步骤并结合二分法对部分(n,λ)所得到的$R_{n,\lambda}$的0.95分位点.

表1 统计量$R_{n,\lambda}$的0.95分位点(精确方法)

参数λ	样本容量n							
	10	20	30	50	70	100	200	300
-5	8.6965	7.6847	6.2166	4.3594	3.3302	2.4518	1.3004	0.8843
-4	3.2070	2.5456	1.9865	1.3535	1.0212	0.7450	0.3909	0.2648
-3	1.3486	0.9651	0.7275	0.4821	0.3596	0.2600	0.1351	0.0912
-2	0.6779	0.4402	0.3214	0.2078	0.1534	0.1101	0.0567	0.0382
-1	0.4323	0.2574	0.1831	0.1165	0.0856	0.0613	0.0317	0.0215
-1/2	0.6784	0.3572	0.2427	0.1481	0.1066	0.0752	0.0380	0.0254
0	0.4729	0.2479	0.1692	0.1042	0.0756	0.0538	0.0276	0.0187
1/2	0.7736	0.3922	0.2632	0.1590	0.1141	0.0802	0.0403	0.0270
1	2.0645	1.0368	0.6922	0.4159	0.2972	0.2081	0.1041	0.0694
2	27.484	13.769	9.1858	5.5144	3.9398	2.7583	1.3795	0.9197
3	539.38	269.89	179.97	108.01	77.154	54.012	27.008	18.010
4	12748.	6373.0	4248.5	2549.0	1820.7	1274.5	637.18	424.85
5	335353	167515	111642	66969.	47829.	33480.	16738.	11158.

§3.　模拟比较和实例分析

原则上说, 对任意给定的(n,λ), 由第二节中的结果即可求出$R_{n,\lambda}$的精确分布和分位点. 但实际上, 当n较大时, 计算分位点所需的时间较长, 而模拟计算所需的时间相对较短(详情见后). 为了给出实用的计算方法, 本节对精确方法和模拟方法进行比较, 并在后面给出一个实例来加以简单说明.

3.1　模拟比较

考虑参数$\lambda=-5,-4,-3,-2,-1,-1/2,0,1/2,1,2,3,4,5$, 样本容量$n=10,20,30,50,70,100,200,300$. 对每组$(n,\lambda)$, 由上一节给出的方法并结合二分法计算$R_{n,\lambda}$的0.95分位点(如表1所示). 同时产生$10^5$个容量为$n$的$U(0,1)$样本, 对每个样本计算相应的$R_{n,\lambda}$, 进而由$R_{n,\lambda}$的$10^5$个"观测值"得到其0.95分位点, 如表2所示. 对每一个分位点, 由上一节的方法可求出$R_{n,\lambda}$的分布函数在该分位点处的值, 此值与0.95的差如表3所示.

表2　统计量$R_{n,\lambda}$的0.95分位点(模拟方法)

参数λ	样本容量n							
	10	20	30	50	70	100	200	300
-5	8.7127	7.5383	6.2436	4.3818	3.3746	2.4152	1.3260	0.8763
-4	3.2124	2.5590	1.9922	1.3623	1.0114	0.7530	0.3893	0.2641
-3	1.3540	0.9687	0.7248	0.4894	0.3621	0.2619	0.1340	0.0903
-2	0.6784	0.4416	0.3194	0.2088	0.1542	0.1097	0.0578	0.0379
-1	0.4337	0.2553	0.1828	0.1165	0.0861	0.0609	0.0317	0.0215
-1/2	0.6829	0.3584	0.2436	0.1492	0.1064	0.0753	0.0379	0.0255
0	0.4728	0.2469	0.1689	0.1051	0.0756	0.0540	0.0276	0.0187
1/2	0.7831	0.3892	0.2598	0.1598	0.1146	0.0804	0.0402	0.0267
1	2.0753	1.0221	0.6733	0.4131	0.2934	0.2067	0.1042	0.0704
2	28.368	13.638	9.2875	5.4013	3.9854	2.6193	1.3519	0.9575
3	516.27	285.39	173.66	102.58	78.036	57.212	25.465	18.240
4	13162.	7015.9	4163.4	2565.8	1758.4	1240.7	675.90	453.25
5	375696	149859	119355	68965.	50002.	36951.	16326.	11174.

由表3可以看出, 通过模拟所得到的分位点还是比较准确的. 表中的差值均小于百分之一, 而且大部分小于千分之一(黑体部分为超过千分之一的值).

当n较大时, 由精确方法计算分位点所需的时间较长, 而模拟方法计算所需的时间相对较短. 表4给出精确方法与模拟方法所需计算时间的比较. 我们所用的台式机配置为Pentium(R) 4, CPU 3.06GHz, 内存480MB, 编程语言为R (版本2.2.0).

表3 $R_{n,\lambda}$的0.95分位点(模拟方法)的分布函数值与0.95的偏差$\times 10^4$

参数λ	样本容量n							
	10	20	30	50	70	100	200	300
-5	1.198	**-10.761**	2.292	2.602	6.631	-7.499	9.470	-4.391
-4	1.343	3.604	1.887	4.147	-6.142	6.671	-2.526	-1.680
-3	4.085	3.390	-3.176	**12.422**	5.799	5.912	-5.966	-7.741
-2	1.067	3.741	-7.600	5.580	5.850	-4.300	**21.612**	**-10.963**
-1	5.510	**-13.833**	-2.936	1.343	**10.651**	**-12.067**	-3.377	5.984
-1/2	**13.607**	6.950	7.505	**14.720**	-4.706	3.373	-3.433	6.281
0	-0.276	-9.395	-4.080	**19.907**	**-0.624**	9.641	-1.360	2.390
1/2	**11.962**	-8.309	**-13.846**	5.356	5.195	3.377	-3.433	**-12.245**
1	2.707	-7.446	**-14.702**	-3.503	-6.812	-3.680	**0.540**	7.597
2	7.967	-2.450	2.792	-5.302	2.920	**-13.332**	-5.164	**10.150**
3	-7.380	9.247	-6.013	-8.700	1.900	9.546	-9.948	2.160
4	3.976	**11.860**	-2.534	**0.822**	-4.364	-3.363	7.307	8.027
5	**11.194**	**-11.220**	6.612	2.918	4.407	9.738	-2.482	**0.148**

表4 $R_{n,\lambda}$的0.95分位点的计算时间(单位: 秒)

参数λ		样本容量n								
		10	50	100	110	120	140	150	200	300
-5	精确	0.96	54.46	390.63	520.22	736.24	1030.53	1410.08	3013.49	9249.16
	模拟	81.36	335.96	653.11	709.64	768.55	896.89	961.44	1264.77	1880.47
-3	精确	0.99	51.97	355.10	462.95	591.54	922.03	1257.25	2509.36	8025.30
	模拟	78.74	334.05	647.78	703.09	764.64	892.54	949.47	1265.21	1878.28
-1	精确	1.11	47.24	319.00	415.04	533.26	832.31	1150.39	2309.59	7541.06
	模拟	78.28	330.03	640.50	696.70	759.99	883.33	943.49	1249.09	1859.97
-1/2	精确	1.23	55.28	386.95	424.06	544.94	851.67	1168.52	2717.00	8762.45
	模拟	82.73	338.11	657.80	715.77	779.44	913.86	966.23	1266.69	1884.95
0	精确	1.61	49.01	312.28	422.17	541.68	842.72	1145.76	2334.75	7818.53
	模拟	81.32	337.44	647.75	702.86	764.25	888.77	949.17	1259.69	1877.45
1/2	精确	1.90	55.24	345.38	446.26	569.83	880.18	1189.48	2433.66	7783.12
	模拟	82.82	340.83	657.25	706.05	772.15	901.47	957.55	1272.12	1897.19
1	精确	2.31	67.23	414.19	537.80	780.21	1020.79	1352.06	2744.67	8468.02
	模拟	82.18	335.77	646.99	703.81	763.00	889.84	955.86	1262.02	1873.00
3	精确	2.74	71.02	479.89	640.00	906.31	1283.95	1691.20	3604.07	11805.36
	模拟	82.53	336.06	646.85	707.61	769.99	890.53	959.57	1238.80	1886.82
5	精确	3.06	72.48	484.25	638.54	925.51	1285.75	1692.10	3604.71	11902.67
	模拟	81.62	336.06	646.96	710.81	768.42	891.72	958.78	1261.82	1878.18

由表4可以看出, 对给定的参数λ, 当样本容量n增大时, 寻找分位点所需的时间都在增加, 但精确方法所需时间增长速度更快. 当$n \leq 110$时, 精确方法计算所需时间均小于模拟方法计算所需的时间; 当$n \geq 150$时, 精确方法计算所需时间均大于模拟方法计算所需的时间. 当$n = 200$时, 精确方法所需时间为模拟方法所需时间的2倍左右. 到$n = 300$时所需时间相差大约3倍. 值得说明的是, 精确方法每次计算一个特定的分位点, 而模拟方法是一次就给出$R_{n,\lambda}$的经验分布, 因此可以同时求出任意分位点. 综上所述, 我们认为: 当$n \leq 110$时, 直接用精确方法确定分位点; 当 $110 < n < 150$时, 用精确方法或用模拟方法确定分位点均可; 当$n \geq 150$时, 可以用模拟方法来近似确定分位点.

3.2　实例分析

为了说明前面几节的结果, 本节我们给出一个实际例子. 该例是由Bliss (1967)[11]给出. 它是由20只饲养21天的来亨鸡(leghorn chicks)的体重数据X (单位: 克)所组成, 其数据如下: 156, 162, 168, 182, 186, 190, 190, 196, 202, 210, 214, 220, 226, 230, 230, 236, 236, 242, 246, 270. 根据以往的经验, 此时鸡的重量是一个正态分布, 均值为200, 标准差为35. 我们现在的任务就是检验这组数据是否与以往的经验分布一致, 也就是检验

$$H_0 : X \sim N(200, 35^2).$$

表5　实例的计算结果

参数λ	实际计算的$R_{n,\lambda}$值	按模拟方法计算的p值	按精确方法计算的p值	按极限分布计算的p值
-5	0.39125280	0.46449	0.4641790	0.0019832
-4	0.21758770	0.48799	0.4894907	0.0620025
-3	0.12956640	0.54129	0.5399682	0.3107841
-2	0.09243243	0.58576	0.5878658	0.5426022
-1	0.07519322	0.65470	0.6533871	0.6685316
-1/2	0.21445050	0.24530	0.2437218	0.0658822
0	0.11020660	0.53159	0.5309238	0.4220073
1/2	0.07750332	0.75805	0.7588946	0.6515868
1	0.08307234	0.72482	0.7229935	0.6106335
2	0.09764782	0.70607	0.7083852	0.5057546
3	0.11835960	0.71972	0.7192991	0.3723125
4	0.14787230	0.73376	0.7341621	0.2274757
5	0.19019300	0.74803	0.7476744	0.1048004

由于此例中分布F_0为$N(200,35^2)$的分布函数, 因此首先需要对所观察到的样本数据进行变换得到$F_0(X_i)$, 其中X_i为第i次观测值; 然后按照第二节所述的统计量公式、零假设下检验统计量的分布函数值以及第三节的模拟方法等可得计算结果如表5所示. 表5的第一列为参数λ; 第二列是对应于各参数λ的检验统计量实际数据计算值; 第三列是通过模拟方法得到的相应p值; 第四列是通过精确方法得到的相应p值; 第五列是通过零假设下的极限分布得到的相应p值. 结果显示: (1) 通过模拟方法得到的相应p值与通过精确方法得到的相应p值差别并不很明显, 但模拟方法用计算机计算所花费的时间较长, 而精确方法基本不需等待即可知道检验p值. 如果按照显著水平0.05来看, 所有的检验p值均大于0.05, 因此接受零假设H_0, 即认为新得到的这组数据与以往的经验分布一致, 服从正态分布$N(200,35^2)$, 这与Bliss (1967)的结论一致[11, 12]. (2) 通过零假设下的极限分布所得的p值普遍偏低, 特别是较大的λ值所对应的检验, 相应的p值有可能小于显著水平0.05, 从而拒绝零假设. 因此在使用极限分布时要特别小心, 此时误差较大.

§4. 定理的证明

为证第二节中的主要结论, 我们先给出两个引理.

引理 4.1 假定对任给的$0<t_1<t_2<1$, 集合$\{x|K_\lambda(t_1,x)\le z, K_\lambda(t_2,x)\le z\}$非空, 则对$0<t_1<t_2<1$, $z>0$, 有

$$\max\{x|K_\lambda(t_1,x)\le z, K_\lambda(t_2,x)\le z\}=\max\{x|K_\lambda(t_1,x)\le z\}, \tag{4.1}$$

$$\min\{x|K_\lambda(t_1,x)\le z, K_\lambda(t_2,x)\le z\}=\min\{x|K_\lambda(t_2,x)\le z\}. \tag{4.2}$$

证明: 由(1.2)式易知, 给定t,λ, $K_\lambda(t,x)$在$x\le t$时单调递减, 在$x\ge t$时连续单调递增, 且其最小值在$t=x$处达到为$K_\lambda(t,t)=0$. 这说明$\max\{x|K_\lambda(t,x)\le z\}$应该落在$[t,1]$内, $\min\{x|K_\lambda(t,x)\le z\}$应该落在$[0,t]$内. 对固定的$0<t_1<t_2<1$, 在$x\in[t_1,t_2]$时, $K_\lambda(t_1,x)$连续单调递增且$K_\lambda(t_1,t_1)=0$; $K_\lambda(t_2,x)$连续单调递减且$K_\lambda(t_2,t_2)=0$. 故$K_\lambda(t_1,x)$与$K_\lambda(t_2,x)$在$x\in[t_1,t_2]$内必然相交, 不妨设其交点为c, 即$K_\lambda(t_1,c)=K_\lambda(t_2,c)$. 注意到在$x\in[c,t_2]$时, $K_\lambda(t_1,x)$连续单调递增, 而$K_\lambda(t_2,x)$连续单调递减, 所以$K_\lambda(t_2,x)\le K_\lambda(t_1,x)$, $x\in[c,t_2]$.

另一方面, 对任意$x,t\in(0,1)$和$\lambda\in(-\infty,\infty)$均有

$$\frac{\partial K_\lambda(t,x)}{\partial x}=\frac{1}{\lambda+1}\Big[\frac{(1-t)^{\lambda+1}}{(1-x)^{\lambda+1}}-\frac{t^{\lambda+1}}{x^{\lambda+1}}\Big],$$

$$\frac{\partial^2 K_\lambda(t,x)}{\partial x\partial t}=-\frac{t^\lambda}{x^{\lambda+1}}-\frac{(1-t)^\lambda}{(1-x)^{\lambda+1}}<0.$$

故$\partial K_\lambda(t,x)/(\partial x)$关于$t\in(0,1)$单调递减. 从而对所有的$x\in(0,1)$有

$$\frac{\partial K_\lambda(t_1,x)}{\partial x}>\frac{\partial K_\lambda(t_2,x)}{\partial x}.$$

因此对所有的$x \in [c,1]$, 均有

$$K_\lambda(t_2,x) \le K_\lambda(t_1,x). \tag{4.3}$$

如果$z > K_\lambda(t_1,c)$, 则

$$\max\{x|K_\lambda(t_1,x) \le z, K_\lambda(t_2,x) \le z\} > c.$$

由(4.3)知

$$\max\{x|K_\lambda(t_1,x) \le z, K_\lambda(t_2,x) \le z\} = \max\{x|K_\lambda(t_1,x) \le z\}.$$

如果$z = K_\lambda(t_1,c)$, 则

$$\max\{x|K_\lambda(t_1,x) \le z, K_\lambda(t_2,x) \le z\} = c = \max\{x|K_\lambda(t_1,x) \le z\}.$$

如果$0 < z < K_\lambda(t_1,c)$, 则

$$\max\{x|K_\lambda(t_1,x) \le z, K_\lambda(t_2,x) \le z\} = \emptyset,$$

与题设矛盾. 这样就证明了(4.1)式.

同理可得(4.2)式. $\square$

引理 4.2 对任给的$z > 0$和固定的$t \in (0,1)$, 有

$$\max\{x|K_\lambda(t,x) \le z\} = 1 - \min\{x|K_\lambda(1-t,x) \le z\}. \tag{4.4}$$

证明: 由(1.2)式, 对所有$t, x \in (0,1)$, 均有

$$K_\lambda(t,x) = K_\lambda(1-t,1-x). \tag{4.5}$$

先考虑$\lambda \ge 0$的情况. 此时对固定的t, 当$x \to 1$时, $K_\lambda(t,x) \to \infty$. 借助于与引理4.1证明开始相同的理由, 我们有, 对任给的$z > 0$和固定的$t \in (0,1)$, 总存在$x^* \in [t,1]$, 使得$x^* = \max\{x|K_\lambda(t,x) \le z\}$, 且$K_\lambda(t,x^*) = z$. 而$K_\lambda(1-t,1-x^*) = K_\lambda(t,x^*) = z$且$1-x^* \in [0,1-t]$, 所以$1-x^* = \min\{x|K_\lambda(1-t,x) \le z\}$.

现设$\lambda < 0$, 此时对固定的t, 当$x \to 1$时, $K_\lambda(t,x) \to [t^{\lambda+1}-1]/[\lambda(\lambda+1)]$; 类似地, 当$x \to 0$时, $K_\lambda(t,x) \to [(1-t)^{\lambda+1}-1]/[\lambda(\lambda+1)]$. 当$0 \le z < [t^{\lambda+1}-1]/[\lambda(\lambda+1)]$时, 存在$x^* \in [t,1]$, 使得$x^* = \max\{x|K_\lambda(t,x) \le z\}$, 且$K_\lambda(t,x^*) = z$, 利用(4.5)式得$1-x^* = \min\{x|K_\lambda(1-t,x) \le z\}$, 即(4.4)式. 当$z \ge [t^{\lambda+1}-1]/[\lambda(\lambda+1)]$时, $\max\{x|K_\lambda(t,x) \le z\} = 1$, $\min\{x|K_\lambda(1-t,x) \le z\} = 0$, 此时(4.4)式显然成立. $\square$

定理2.1的证明: (i) 先考虑$\lambda > -1$的情况. 由$K_\lambda(t,x)$的性质知, 当x落在$(0,1)$内的某一区间时, $K_\lambda(t,x)$的上确界应在其区间的两个端点之一处达到. 因此

$$\mathsf{P}\{R_{n,\lambda} \le z\} = \mathsf{P}\Big\{\max_{1\le i\le n}\Big\{K_\lambda\Big(\frac{i-1}{n}, X_{(i)}\Big) \vee K_\lambda\Big(\frac{i}{n}, X_{(i)}\Big)\Big\} \le z\Big\}. \tag{4.6}$$

(4.6)式中的事件可以分解为以下三个事件的交:

$$A=\left\{K_\lambda(0,X_{(1)})\vee K_\lambda\Big(\frac{1}{n},X_{(1)}\Big)\le z\right\}; \tag{4.7}$$

$$B=\left\{\max_{2\le i\le n-1}\left\{K_\lambda\Big(\frac{i-1}{n},X_{(i)}\Big)\vee K_\lambda\Big(\frac{i}{n},X_{(i)}\Big)\right\}\le z\right\}; \tag{4.8}$$

$$C=\left\{K_\lambda\Big(\frac{n-1}{n},X_{(n)}\Big)\vee K_\lambda(1,X_{(n)})\le z\right\}. \tag{4.9}$$

记

$$a_i=\min\left\{x\Big|K_\lambda\Big(\frac{i-1}{n},x\Big)\vee K_\lambda\Big(\frac{i}{n},x\Big)\le z\right\},\qquad i=1,\cdots,n,$$
$$b_i=\max\left\{x\Big|K_\lambda\Big(\frac{i-1}{n},x\Big)\vee K_\lambda\Big(\frac{i}{n},x\Big)\le z\right\},\qquad i=1,\cdots,n,$$

则(4.7)–(4.9)式中的事件A,B,C变成

$$A=\{a_1\le X_{(1)}\le b_1\},\qquad B=\bigcup_{i=2}^{n-1}\{a_i\le X_{(i)}\le b_i\},\qquad C=\{a_n\le X_{(n)}\le b_n\}.$$

由引理4.1可以得到

$$a_i=\min\left\{x\Big|K_\lambda\Big(\frac{i}{n},x\Big)\le z\right\},\qquad i=2,\cdots,n-1,$$
$$b_i=\max\left\{x\Big|K_\lambda\Big(\frac{i-1}{n},x\Big)\le z\right\},\qquad i=2,\cdots,n-1.$$

类似引理4.1的证明也容易得到

$$a_1=\min\left\{x\Big|K_\lambda\Big(\frac{1}{n},x\Big)\le z\right\},\qquad b_1=\max\{x|K_\lambda(0,x)\le z\};$$
$$a_n=\min\{x|K_\lambda(1,x)\le z\},\qquad b_n=\max\left\{x\Big|K_\lambda\Big(\frac{n-1}{n},x\Big)\le z\right\}.$$

再由引理4.2容易得到对所有的$1\le i\le n$, 有

$$a_i=\min\left\{x\Big|K_\lambda\Big(\frac{i}{n},x\Big)\le z\right\}=1-b_{n-i+1}.$$

由此可得(2.3)式.

(ii) 考虑$\lambda\le-1$的情况. 类似于$\lambda>-1$的情况, 当$n>2$时,

$$\begin{aligned}\{R_{n,\lambda}\le z\}&=\left\{\max_{1\le i\le n-1}\left\{K_\lambda\Big(\frac{i}{n},X_{(i)}\Big)\vee K_\lambda\Big(\frac{i}{n},X_{(i+1)}\Big)\right\}\le z\right\}\\&=\left\{K_\lambda\Big(\frac{1}{n},X_{(1)}\Big)\le z\right\}\cap\left\{K_\lambda\Big(\frac{n-1}{n},X_{(n)}\Big)\le z\right\}\\&\quad\cdot\bigcap_{i=2}^{n-1}\left\{K_\lambda\Big(\frac{i-1}{n},X_{(i)}\Big)\vee K_\lambda\Big(\frac{i}{n},X_{(i)}\Big)\le z\right\}\\&=\{\widetilde{a}_i\le X_{(i)}\le\widetilde{b}_i,1\le i\le n\}.\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}
\widetilde{a}_1 &= \min\Big\{x\Big|K_\lambda\Big(\frac{1}{n},x\Big)\le z\Big\}, \qquad \widetilde{b}_1 = \max\Big\{x\Big|K_\lambda\Big(\frac{1}{n},x\Big)\le z\Big\};\\
\widetilde{a}_i &= \min\Big\{x\Big|K_\lambda\Big(\frac{i-1}{n},x\Big)\vee K_\lambda\Big(\frac{i}{n},x\Big)\le z\Big\}, \qquad i=2,\cdots,n-1,\\
\widetilde{b}_i &= \max\Big\{x\Big|K_\lambda\Big(\frac{i-1}{n},x\Big)\vee K_\lambda\Big(\frac{i}{n},x\Big)\le z\Big\}, \qquad i=2,\cdots,n-1;\\
\widetilde{a}_n &= \min\Big\{x\Big|K_\lambda\Big(\frac{n-1}{n},x\Big)\le z\Big\}, \qquad \widetilde{b}_n = \max\Big\{x\Big|K_\lambda\Big(\frac{n-1}{n},x\Big)\le z\Big\}.
\end{aligned}$$

所以

$$\mathsf{P}\{R_{n,\lambda}\le z\}=\mathsf{P}\{a_i\le X_{(i)}\le b_i, 1\le i\le n\}.$$

由引理4.1可以得到

$$\begin{aligned}
\widetilde{a}_i &= \min\Big\{x\Big|K_\lambda\Big(\frac{i}{n},x\Big)\le z\Big\}, \qquad i=2,\cdots,n-1,\\
\widetilde{b}_i &= \max\Big\{x\Big|K_\lambda\Big(\frac{i-1}{n},x\Big)\le z\Big\}, \qquad i=2,\cdots,n-1.
\end{aligned}$$

再由引理4.2容易得到对所有的$1\le i\le n$, 有$\widetilde{a}_i=1-\widetilde{b}_{n-i+1}$. 由此可得(2.4)式. □

参 考 文 献

[1] Zhang, J., Powerful goodness-of-fit tests based on the likelihood ratio, *J. R. Statist. Soc. B*, **64(2)** (2002), 281–294.

[2] Owen, A.B., Nonparametric likelihood confidence bands for a distribution function, *J. Amer. Statist. Assoc.*, **90**(1995), 516–521.

[3] Eicher, F., The asymptotic distribution of the suprema of the standardized empirical processes, *Ann. Statist.*, **7(1)**(1979), 116–138.

[4] Jaeschke, D., The asymptotic distribution of the supremum of the standardized empirical distribution function on subintervals, *Ann. Statist.*, **7(1)**(1979), 108–115.

[5] Berk, R.H. and Jones, D.H., Goodness-of-fit statistics that dominate the Kolmogorov statistics, *Z. Wahrscheinlieitstheorie Verw. Gebiete.*, **47**(1979), 47–59.

[6] Jager, L. and Wellner, J.A., A new goodness of fit test: the reversed Berk-Jones statistic, *Technical Report 443*, Department of statistics, University of Washington, http://www.stat.washington.edu/www/research/reports/2004/tr443.ps, 2004.

[7] 张军舰, 广义非参似然比拟合优度检验, 中国科学院数学与系统科学研究院博士论文, 2006.

[8] Niederhausen, H., Scheffer polynomials for computing exact Kolmogorov-Smirnov and Renyi type distributions, *Ann. Statist.*, **9**(1981), 923–944.

[9] Shorack, G.R. and Wellner, J.A., *Empirical Processes with Applications to Statistics*, New York: Wiley, 1986.

[10] Noe, M., The calculation of distributions of two-sided Kolmogorov-Smirnov type statistics, *Ann. Math. Statist.*, **43**(1972), 58–64.

[11] Bliss, C., *Statistics in Biology: Statistical Methods for Research in the Natural Sciences*, New York: McGraw-Hill, 1967.

[12] Stephens, M.A., Tests based on EDF statistics, in *Goodness-of-Fit Techniques* (eds. D'Agostino, R.B., Stephens, M.A.), New York: Marcel Dekker, 1986, 97–193.

On Exact Distribution of a Class of Supremum-type Statistics for Goodness of Fit

Zhang Junjian

(*College of Mathematical Sciences, Guangxi Normal University, Guilin, 541004*)

(*College of Applied Sciences, Beijing University of Technology, Beijing 100124*)

Li Guoying   Zhao Zhiyuan

(*Academy of Mathematics and System Sciences, Chinese Academy of Sciences, Beijing, 100190*)

For goodness of fit tests with simple null hypothesis, Zhang (2002) constructed a classes of supremum-type tests. Different parameter λ and different weighted function $q(t)$ result in different tests, including the Kolmogorov-Smirov test, Berk and Jones (1979) test and so on. So far, only a few tests corresponding to particular λ and $q(t)$ have been studied in the literature. However, for different problems, the "best" tests are different. It is necessary to discuss the tests for all λ and the general $q(t)$. In this paper, the exact distributions of the test statistics for all λ and $q(t) \equiv 1$ are derived. When sample size n is large, it takes a long time to get the exact quantile. So we give some advice on the computation methods for different sample size by simulation studies, and a real example to simply illustrate the above methods.

Keywords: Exact distribution, generalized nonparametric likelihood ratio, goodness-of-fit test.

AMS Subject Classification: 62E15, 62G10.