应用概率统计　第二十五卷
第四期　2009年8月

Chinese Journal of Applied Probability
and Statistics Vol.25 No.4 Aug. 2009

关于正态分布的次序统计量的随机序 *

黄永军　　张新生

(复旦大学管理学院统计系, 上海, 200433)

摘　要

设$X_1, X_2, \cdots, X_n$和$X_1^*, X_2^*, \cdots, X_n^*$分别服从正态分布$N(\mu_i, \sigma^2)$和$N(\mu_i^*, \sigma^2)$, 以$X_{(1)}$, $X_{(1)}^*$分别表示$X_1, \cdots, X_n$和$X_1^*, \cdots, X_n^*$的极小次序统计量, 以$X_{(n)}$, $X_{(n)}^*$分别表示$X_1, \cdots, X_n$和$X_1^*, \cdots$, X_n^*的极大次序统计量. 我们得到了如下结果: (i) 如果存在严格单调函数f使得$(f(\mu_1), \cdots, f(\mu_n)) \succeq_{\rm m} (f(\mu_1^*), \cdots, f(\mu_n^*))$, 且$f'(x)f''(x) \ge 0$, 则$X_{(1)} \le_{\rm st} X_{(1)}^*$; (ii) 如果存在严格单调函数$f$使得$(f(\mu_1), \cdots, f(\mu_n)) \succeq_{\rm m} (f(\mu_1^*), \cdots, f(\mu_n^*))$, 且$f'(x)f''(x) \le 0$, 则$X_{(n)} \ge_{\rm st} X_{(n)}^*$. (iii) 设$X_1, X_2, \cdots, X_n$和$X_1^*, X_2^*, \cdots, X_n^*$分别服从正态分布$N(\mu, \sigma_i^2)$和$N(\mu, \sigma_i^{*2})$, 若$(1/\sigma_1, \cdots, 1/\sigma_n) \succeq_{\rm m} (1/\sigma_1^*, \cdots, 1/\sigma_n^*)$, 则有$X_{(1)} \le_{\rm st} X_{(1)}^*$和$X_{(n)} \ge_{\rm st} X_{(n)}^*$同时成立.

关键词:　正态分布, 随机序, 优化序, 次序统计量.

学科分类号:　O212.1.

§1.　引　　言

随机序(Stochastic orders)是当前数理统计中的一个热点研究课题之一, 在可靠性检验、对比试验、排队论、精算数学和风险管理等诸多领域, 已成为不可或缺的研究方法和有效的决策工具. 对于来自异总体的次序统计量的随机序, 因其在可靠性检验和对比试验等领域具有广泛的应用, 使得它在随机序的研究中备受关注. Proschan and Sethuraman (1976), Barbour, Lindvall and Rogers (1991), Hu (1995), Kochar and Korwar (1996), Sun and Zhang (2005)等对于非负寿命分布的次序统计量的随机序做了大量的研究工作并获得许多有意义的成果. 关于正态分布的次序统计量的随机序, 早在上世纪六十年代就有Slepian不等式等经典的结果[9], 但随后相关问题的研究进展较为缓慢. 本文针对来自独立正态分布样本的极大与极小次序统计量进行了研究并得到了若干较有意义的新结果. 为给出本文的主要结论及相关证明, 下面我们首先介绍在本文研究中将要用到的一般随机序、优化序(Majorization)和Schur函数的概念和性质.

定义 1.1 ([8])　设X和X^*为两个随机变量, 若对任意$t \in \mathbf{R}$, 都有$\mathsf{P}\{X > t\} \le \mathsf{P}\{X^* > t\}$成立, 则称随机变量$X$在一般随机序意义下小于$X^*$ (记为$X \le_{\rm st} X^*$).

下面是关于优化序、弱下优化序和弱上优化序的定义, 后两者是优化序概念的推广.

*国家自然科学基金项目(10671037)、上海市重点学科基金(B210)资助.

本文2006年4月7日收到, 2008年5月29日收到修改稿.

定义 1.2 ([6]) 对正整数$n \geq 2$, 设$\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$和$\boldsymbol{\lambda}^* = (\lambda_1^*, \lambda_2^*, \cdots, \lambda_n^*)$为两个$n$维实向量. 令$\lambda_{[1]} \geq \lambda_{[2]} \geq \cdots \geq \lambda_{[n]}$, $\lambda^*_{[1]} \geq \lambda^*_{[2]} \geq \cdots \geq \lambda^*_{[n]}$, $\lambda_{(1)} \leq \lambda_{(2)} \leq \cdots \leq \lambda_{(n)}$, $\lambda^*_{(1)} \leq \lambda^*_{(2)} \leq \cdots \leq \lambda^*_{(n)}$为它们的次序统计量.

(i) 如果

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_{[i]} \geq \sum_{i=1}^{m} \lambda^*_{[i]} \qquad \text{对所有的 } m = 1, 2, \cdots, n-1 \text{ 成立}, \tag{1.1}$$

且$\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i^*$, 则称$\boldsymbol{\lambda}$优化于$\boldsymbol{\lambda}^*$ (或者称$\boldsymbol{\lambda}^*$被$\boldsymbol{\lambda}$优化), 用符号$\boldsymbol{\lambda} \succeq_{\mathrm{m}} \boldsymbol{\lambda}^*$表示.

(ii) 如果不等式(1.1)和$\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i \geq \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i^*$成立, 则称$\boldsymbol{\lambda}$弱下优化于$\boldsymbol{\lambda}^*$, 用符号$\boldsymbol{\lambda} \succeq_{\mathrm{w}} \boldsymbol{\lambda}^*$表示.

(iii) 如果

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_{(i)} \leq \sum_{i=1}^{m} \lambda^*_{(i)} \qquad \text{对所有的 } m = 1, 2, \cdots, n-1 \text{ 成立}, \tag{1.2}$$

且$\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i \leq \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i^*$成立, 则称$\boldsymbol{\lambda}$弱上优化于$\boldsymbol{\lambda}^*$, 用符号$\boldsymbol{\lambda} \succeq^{\mathrm{w}} \boldsymbol{\lambda}^*$表示.

定义 1.3 对于$\mathbf{R}_+^n$中向量$\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$和$\boldsymbol{\lambda}^* = (\lambda_1^*, \lambda_2^*, \cdots, \lambda_n^*)$, 如果

$$\prod_{i=1}^{m} \lambda_{(i)} \leq \prod_{i=1}^{m} \lambda^*_{(i)} \qquad \text{对所有的 } m = 1, 2, \cdots, n \text{ 成立},$$

则称$\boldsymbol{\lambda}$ p-larger于$\boldsymbol{\lambda}^*$, 用符号$\boldsymbol{\lambda} \succeq^{\mathrm{p}} \boldsymbol{\lambda}^*$表示. 容易看出, 当$\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\lambda}^* \in \mathbf{R}_+^n$时, $\boldsymbol{\lambda} \succeq^{\mathrm{p}} \boldsymbol{\lambda}^*$同$\ln \boldsymbol{\lambda} \succeq^{\mathrm{w}} \ln \boldsymbol{\lambda}^*$等价, 其中$\ln \boldsymbol{\lambda} = (\ln \lambda_1, \ln \lambda_2, \cdots, \ln \lambda_n)$, $\ln \boldsymbol{\lambda}^* = (\ln \lambda_1^*, \ln \lambda_2^*, \cdots, \ln \lambda_n^*)$.

定理 1.1 ([6]) (i) $\boldsymbol{\lambda} \succeq_{\mathrm{w}} \boldsymbol{\lambda}^*$成立当且仅当存在$n$维向量$\boldsymbol{\nu}$使得$\boldsymbol{\lambda} \succeq_{\mathrm{m}} \boldsymbol{\nu}$和$\boldsymbol{\nu} \geq \boldsymbol{\lambda}^*$ (即对$i = 1, 2, \cdots, n$, $\nu_i \geq \lambda_i^*$)成立.

(ii) $\boldsymbol{\lambda} \succeq^{\mathrm{w}} \boldsymbol{\lambda}^*$成立当且仅当存在$n$维向量$\boldsymbol{\nu}$使得$\boldsymbol{\nu} \succeq_{\mathrm{m}} \boldsymbol{\lambda}^*$和$\boldsymbol{\nu} \geq \boldsymbol{\lambda}$ (即对$i = 1, 2, \cdots, n$, $\nu_i \geq \lambda_i$)成立.

为证明本文主要结果, 我们还需要给出Schur凸(schur凹)函数的定义及其相关结果.

定义 1.4 ([6]) 设ϕ为定义在集合$\mathbf{A} \subseteq \mathbf{R}^n$上的实函数, 如果对于$\mathbf{A}$上所有满足$\boldsymbol{\lambda} \succeq_{\mathrm{m}} \boldsymbol{\lambda}^*$的向量, 都有$\phi(\boldsymbol{\lambda}) \geq (\leq)\, \phi(\boldsymbol{\lambda}^*)$成立, 则称$\phi$为集合$\mathbf{A}$上的Schur凸(schur凹)函数.

下面的定理提供了Schur凸(schur凹)函数的充要条件, 它在证明中非常有用.

定理 1.2 ([6]) 设$\phi: \mathbf{A} \to \mathbf{R}$为一阶偏导数存在的实函数, $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{R}^n$为置换不变量(即若$\mathbf{x} \in \mathbf{A}$, 则对任意$n \times n$阶置换矩阵$\mathbf{P}$, 有$\mathbf{P}\mathbf{x} \in \mathbf{A}$成立). 则$\phi$为$\mathbf{A}$上的Schur凸(schur凹)函数的充要条件是: 对所有$1 \leq i \neq j \leq n$和任意$\mathbf{x} \in \mathbf{A}$, 有

$$(x_i - x_j)\Big(\frac{\partial \phi(\mathbf{x})}{\partial x_i} - \frac{\partial \phi(\mathbf{x})}{\partial x_j}\Big) \geq (\leq)\, 0$$

成立.

§2. 主要结果及其证明

正态分布(Normal distribution), 又名高斯分布(Gaussian distribution), 是一个在数学、物理及工程等各领域皆非常重要的概率分布. 标准正态分布的密度函数为

$$U \sim \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\Big(-\frac{x^2}{2}\Big), \qquad x \in \mathbf{R}.$$

其分布函数通常记为$\Phi(x)$. 对任意实数μ和正实数σ, 令$X = \mu + \sigma U$, 则

$$X \sim f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\Big(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\Big), \qquad x \in \mathbf{R}.$$

并且$\mathsf{E}(X) = \mu$, $\mathsf{Var}\,(X) = \sigma^2$, 这时称随机变量$X$服从期望为$\mu$, 方差为$\sigma^2$的正态分布, 记为$X \sim N(\mu, \sigma^2)$.

下面我们给出本文的两个主要结论及其证明.

定理 2.1 设$X_1, X_2, \cdots, X_n$和$X_1^*, X_2^*, \cdots, X_n^*$为独立正态随机变量, 分别服从$N(\mu_i, \sigma^2)$和$N(\mu_i^*, \sigma^2)$, $i = 1, \cdots, n$分布. 令$a = \min(\mu_1, \cdots, \mu_n, \mu_1^*, \cdots, \mu_n^*)$, $b = \max(\mu_1, \cdots, \mu_n, \mu_1^*, \cdots, \mu_n^*)$. 如果存在严格单调函数$f : [a, b] \to \mathbf{R}$满足$(f(\mu_1), \cdots, f(\mu_n)) \succeq_{\rm m} (f(\mu_1^*), \cdots, f(\mu_n^*))$, 我们有如下结论:

(a) 若$f'(x)f''(x) \ge 0$, 则$X_{(1)} \le_{\rm st} X_{(1)}^*$.

(b) 若$f'(x)f''(x) \le 0$, 则$X_{(n)} \ge_{\rm st} X_{(n)}^*$.

证明: 设$\lambda_1 = f(\mu_1), \cdots, \lambda_n = f(\mu_n), \lambda_1^* = f(\mu_1^*), \cdots, \lambda_n^* = f(\mu_n^*)$. 那么$\mu_1 = f^{-1}(\lambda_1), \cdots, \mu_n = f^{-1}(\lambda_n), \mu_1^* = f^{-1}(\lambda_1^*), \cdots, \mu_n^* = f^{-1}(\lambda_n^*)$且$(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \succeq_{\rm m} (\lambda_1^*, \cdots, \lambda_n^*)$, 其中$f^{-1}(x)$是$f(x)$的逆函数.

(a) 要证明$X_{(1)} \le_{\rm st} X_{(1)}^*$, 即要证明对任意$x \in \mathbf{R}$, 都有$\overline{F}_{X_{(1)}}(x) \le \overline{F}_{X_{(1)}^*}(x)$成立. 根据定义1.4, 我们只要能证明$X_{(1)}$的生存函数$\overline{F}_{X_{(1)}}(x)$关于$(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$为Schur凹函数即可.

$$\overline{F}_{X_{(1)}}(x) = \mathsf{P}(X_{(1)} > x) = \prod_{i=1}^{n} \Big(1 - \Phi\Big(\frac{x - \mu_i}{\sigma}\Big)\Big) = \prod_{i=1}^{n} \Big(1 - \Phi\Big(\frac{x - f^{-1}(\lambda_i)}{\sigma}\Big)\Big).$$

对任意$x \in \mathbf{R}$, $\overline{F}_{X_{(1)}}(x)$关于$\lambda_i$, $i = 1, \cdots, n$的偏导数为

$$\begin{aligned} \frac{\partial \overline{F}_{X_{(1)}}(x)}{\partial \lambda_i} &= \frac{\overline{F}_{X_{(1)}}(x)}{1 - \Phi[(x - f^{-1}(\lambda_i))/\sigma]} \frac{\varphi[(x - f^{-1}(\lambda_i))/\sigma]}{\sigma f'(f^{-1}(\lambda_i))} \\ &= \frac{\overline{F}_{X_{(1)}}(x)}{1 - \Phi[(x - \mu_i)/\sigma]} \frac{\varphi[(x - \mu_i)/\sigma]}{\sigma f'(\mu_i)}. \end{aligned} \tag{2.1}$$

从(2.1)我们可得

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial\overline{F}_{X_{(1)}}(x)}{\partial\lambda_i}-\frac{\partial\overline{F}_{X_{(1)}}(x)}{\partial\lambda_j}\\
= & -\frac{\overline{F}_{X_{(1)}}(x)\varphi[(x-\mu_i)/\sigma]\varphi[(x-\mu_j)/\sigma]}{\sigma f'(\mu_i)f'(\mu_j)\{1-\Phi[(x-\mu_i)/\sigma]\}\{1-\Phi[(x-\mu_j)/\sigma]\}}\\
&\times\Big(\frac{1-\Phi[(x-\mu_i)/\sigma]}{\varphi[(x-\mu_i)/\sigma]}f'(\mu_i)-\frac{1-\Phi[(x-\mu_j)/\sigma]}{\varphi[(x-\mu_j)/\sigma]}f'(\mu_j)\Big)\\
= & -\frac{\overline{F}_{X_{(1)}}(x)\varphi[(x-\mu_i)/\sigma]\varphi[(x-\mu_j)/\sigma]}{\sigma^2 f'(\mu_i)f'(\mu_j)\{1-\Phi[(x-\mu_i)/\sigma]\}\{1-\Phi[(x-\mu_j)/\sigma]\}}\\
&\times\Big(f'(\mu_i)\int_x^{+\infty}\mathrm{e}^{[x^2-t^2+2\mu_i(t-x)]/(2\sigma^2)}\mathrm{d}t-f'(\mu_j)\int_x^{+\infty}\mathrm{e}^{[x^2-t^2+2\mu_j(t-x)]/(2\sigma^2)}\mathrm{d}t\Big).
\end{aligned}$$

若$f'(x)f''(x)\geq 0$, 即$f'(x)>0$, $f''(x)\geq 0$或$f'(x)<0$, $f''(x)\leq 0$, 根据上式分别计算可得

$$(\lambda_i-\lambda_j)\Big(\frac{\partial\overline{F}_{X_{(1)}}(x)}{\partial\lambda_i}-\frac{\partial\overline{F}_{X_{(1)}}(x)}{\partial\lambda_j}\Big)\leq 0.$$

因此$X_{(1)}\leq_{\rm st}X^*_{(1)}$.

(b) 要证明$X_{(n)}\geq_{\rm st}X^*_{(n)}$, 根据定义1.4, 我们只要能证明$X_{(n)}$的生存函数$\overline{F}_{X_{(n)}}(x)$关于$(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$为Schur凸函数即可.

$$\overline{F}_{X_{(n)}}(x)=1-\mathsf{P}(X_{(n)}\leq x)=1-\prod_{i=1}^n\Phi\Big(\frac{x-\mu_i}{\sigma}\Big)=1-\prod_{i=1}^n\Phi\Big(\frac{x-f^{-1}(\lambda_i)}{\sigma}\Big).$$

对任意$x\in\mathbf{R}$, $\overline{F}_{X_{(n)}}(x)$关于$\lambda_i$, $i=1,\cdots,n$的偏导数为

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\overline{F}_{X_{(n)}}(x)}{\partial\lambda_i} &= \frac{1-\overline{F}_{X_{(n)}}(x)}{\Phi[(x-f^{-1}(\lambda_i))/\sigma]}\frac{\varphi[(x-f^{-1}(\lambda_i))/\sigma]}{\sigma f'(f^{-1}(\lambda_i))}\\
&= \frac{1-\overline{F}_{X_{(n)}}(x)}{\Phi[(x-\mu_i)/\sigma]}\frac{\varphi[(x-\mu_i)/\sigma]}{\sigma f'(\mu_i)}.
\end{aligned}\tag{2.2}$$

从(2.2)我们可得

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial\overline{F}_{X_{(n)}}(x)}{\partial\lambda_i}-\frac{\partial\overline{F}_{X_{(n)}}(x)}{\partial\lambda_j}\\
= & -\frac{(1-\overline{F}_{X_{(n)}}(x))\varphi[(x-\mu_i)/\sigma]\varphi[(x-\mu_j)/\sigma)}{\sigma f'(\mu_i)f'(\mu_j)\Phi[(x-\mu_i)/\sigma]\Phi[(x-\mu_j)/\sigma]}\\
&\times\Big(\frac{\Phi[(x-\mu_i)/\sigma]}{\varphi[(x-\mu_i)/\sigma]}f'(\mu_i)-\frac{\Phi[(x-\mu_j)/\sigma]}{\varphi[(x-\mu_j)/\sigma]}f'(\mu_j)\Big)\\
= & -\frac{(1-\overline{F}_{X_{(n)}}(x))\varphi[(x-\mu_i)/\sigma]\varphi[(x-\mu_j)/\sigma]}{\sigma^2 f'(\mu_i)f'(\mu_j)\Phi[(x-\mu_i)/\sigma]\Phi[(x-\mu_j)/\sigma]}\\
&\times\Big(f'(\mu_i)\int_{-\infty}^x\mathrm{e}^{(x^2-t^2+2\mu_i(t-x))/(2\sigma^2)}\mathrm{d}t-f'(\mu_j)\int_{-\infty}^x\mathrm{e}^{(x^2-t^2+2\mu_j(t-x))/(2\sigma^2)}\mathrm{d}t\Big).
\end{aligned}$$

若$f'(x)f''(x)\le 0$, 即$f'(x)>0$, $f''(x)\le 0$或$f'(x)<0$, $f''(x)\ge 0$, 根据上式分别计算可得

$$(\lambda_i-\lambda_j)\Big(\frac{\partial \overline{F}_{X_{(n)}}(x)}{\partial\lambda_i}-\frac{\partial \overline{F}_{X_{(n)}}(x)}{\partial\lambda_j}\Big)\ge 0.$$

因此$X_{(n)}\ge_{\rm st} X^*_{(n)}$. □

定理 2.2 设$X_1,X_2,\cdots,X_n$和$X^*_1,X^*_2,\cdots,X^*_n$为独立正态随机变量, 分别服从$N(\mu,\sigma_i^2)$和$N(\mu,\sigma_i^{*2})$, $i=1,\cdots,n$分布. 如果$(1/\sigma_1,\cdots,1/\sigma_n)\succeq_{\rm m}(1/\sigma^*_1,\cdots,1/\sigma^*_n)$, 则$X_{(1)}\le_{\rm st} X^*_{(1)}$和$X_{(n)}\ge_{\rm st} X^*_{(n)}$同时成立.

证明: 设$\lambda_1=1/\sigma_1,\cdots,\lambda_n=1/\sigma_n,\lambda^*_1=1/\sigma^*_1,\cdots,\lambda^*_n=1/\sigma^*_n$, 则$(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)\succeq_{\rm m}(\lambda^*_1,\cdots,\lambda^*_n)$. 要证明$X_{(1)}\le_{\rm st} X^*_{(1)}$, 根据定义1.4, 我们只要能证明$X_{(1)}$的生存函数$\overline{F}_{X_{(1)}}(x)$关于$(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$为Schur凹函数即可.

$$\overline{F}_{X_{(1)}}(x)=\mathsf{P}(X_{(1)}>x)=\prod_{i=1}^n\Big(1-\Phi\Big(\frac{x-\mu}{\sigma_i}\Big)\Big)=\prod_{i=1}^n(1-\Phi(\lambda_i(x-\mu))).$$

对任意$x\in\mathbf{R}$, $\overline{F}_{X_{(1)}}(x)$关于$\lambda_i$, $i=1,\cdots,n$的偏导数为

$$\frac{\partial \overline{F}_{X_{(1)}}(x)}{\partial\lambda_i}=-\frac{\overline{F}_{X_{(1)}}(x)}{1-\Phi(\lambda_i(x-\mu))}(x-\mu)\varphi(\lambda_i(x-\mu)).\tag{2.3}$$

从(2.3)我们可得

$$\begin{aligned}&\frac{\partial \overline{F}_{X_{(1)}}(x)}{\partial\lambda_i}-\frac{\partial \overline{F}_{X_{(1)}}(x)}{\partial\lambda_j}\\ =&\frac{(x-\mu)\overline{F}_{X_{(1)}}(x)\varphi(\lambda_i(x-\mu))\varphi(\lambda_j(x-\mu))}{(1-\Phi(\lambda_i(x-\mu)))(1-\Phi(\lambda_j(x-\mu)))}\Big(\frac{1-\Phi(\lambda_i(x-\mu))}{\varphi(\lambda_i(x-\mu))}-\frac{1-\Phi(\lambda_j(x-\mu))}{\varphi(\lambda_j(x-\mu))}\Big).\end{aligned}$$

对任意$x>0$, 容易证明如下不等式成立:

$$\int_x^{+\infty}{\rm e}^{-t^2/2}{\rm d}t=\int_{-\infty}^{-x}{\rm e}^{-t^2/2}{\rm d}t\le\frac{1}{x}\,{\rm e}^{-x^2/2}.\tag{2.4}$$

设

$$g(x)=\frac{1-\Phi(x)}{\varphi(x)}={\rm e}^{x^2/2}\int_x^{+\infty}{\rm e}^{-t^2/2}{\rm d}t,\qquad x\in\mathbf{R},$$

则

$$g'(x)=x{\rm e}^{x^2/2}\int_x^{+\infty}{\rm e}^{-t^2/2}{\rm d}t-1.$$

根据(2.4), 可得对任意$x\in\mathbf{R}$, 有$g'(x)\le 0$成立, 从而$g(x)$为减函数. 由此可得

$$(\lambda_i-\lambda_j)\Big(\frac{\partial \overline{F}_{X_{(1)}}(x)}{\partial\lambda_i}-\frac{\partial \overline{F}_{X_{(1)}}(x)}{\partial\lambda_j}\Big)\le 0.$$

因此$X_{(1)} \le_{\rm st} X^*_{(1)}$.

要证明$X_{(n)} \ge_{\rm st} X^*_{(n)}$, 根据定义1.4, 我们只要能证明$X_{(n)}$的生存函数$\overline{F}_{X_{(n)}}(x)$关于$(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$为Schur凸函数即可.

$$\overline{F}_{X_{(n)}}(x) = 1 - \mathsf{P}(X_{(n)} \le x) = 1 - \prod_{i=1}^n \Phi\Big(\frac{x-\mu}{\sigma_i}\Big) = 1 - \prod_{i=1}^n \Phi(\lambda_i(x-\mu)).$$

对任意$x\in\mathbf{R}$, $\overline{F}_{X_{(n)}}(x)$关于$\lambda_i$, $i=1,\cdots,n$的偏导数为

$$\frac{\partial \overline{F}_{X_{(n)}}(x)}{\partial \lambda_i} = -\frac{1-\overline{F}_{X_{(n)}}(x)}{\Phi(\lambda_i(x-\mu))}(x-\mu)\varphi(\lambda_i(x-\mu)). \tag{2.5}$$

从(2.5)我们可得

$$\begin{aligned}&\frac{\partial \overline{F}_{X_{(n)}}(x)}{\partial \lambda_i} - \frac{\partial \overline{F}_{X_{(n)}}(x)}{\partial \lambda_j}\\ =& \frac{(x-\mu)(1-\overline{F}_{X_{(n)}}(x))\varphi(\lambda_i(x-\mu))\varphi(\lambda_j(x-\mu))}{\Phi(\lambda_i(x-\mu))\Phi(\lambda_j(x-\mu))}\Big(\frac{\Phi(\lambda_i(x-\mu))}{\varphi(\lambda_i(x-\mu))} - \frac{\Phi(\lambda_j(x-\mu))}{\varphi(\lambda_j(x-\mu))}\Big).\end{aligned}$$

设

$$h(x) = \frac{\Phi(x)}{\varphi(x)} = \mathrm{e}^{x^2/2}\int_{-\infty}^x \mathrm{e}^{-t^2/2}\mathrm{d}t, \qquad x\in\mathbf{R},$$

则

$$h'(x) = x\mathrm{e}^{x^2/2}\int_{-\infty}^x \mathrm{e}^{-t^2/2}\mathrm{d}t + 1.$$

根据(2.4), 可得对任意$x\in\mathbf{R}$, 有$h'(x)\ge 0$成立, 从而$h(x)$为增函数. 由此可得

$$(\lambda_i-\lambda_j)\Big(\frac{\partial \overline{F}_{X_{(n)}}(x)}{\partial \lambda_i} - \frac{\partial \overline{F}_{X_{(n)}}(x)}{\partial \lambda_j}\Big) \ge 0.$$

因此$X_{(n)} \ge_{\rm st} X^*_{(n)}$. □

§3. 结果的推广和推论

利用$\boldsymbol{\mu}_f \succeq^{\rm w} \boldsymbol{\mu}^*_f$或者$\boldsymbol{\mu}_f \succeq_{\rm w} \boldsymbol{\mu}^*_f$来代替定理中的条件$\boldsymbol{\mu}_f \succeq_{\rm m} \boldsymbol{\mu}^*_f$, 我们可以把定理2.1的结果推广到一个更加广泛的参数空间. 首先, 我们需要下面的引理.

引理 3.1 设$X_1,X_2,\cdots,X_n$和$X^*_1,X^*_2,\cdots,X^*_n$为独立正态随机变量, 分别服从$N(\mu_i,\sigma^2)$和$N(\mu^*_i,\sigma^2)$, $i=1,\cdots,n$分布. 如果$\mu_i\ge\mu^*_i$, $i=1,\cdots,n$, 则$X_{(1)} \ge_{\rm st} X^*_{(1)}$且$X_{(n)} \ge_{\rm st} X^*_{(n)}$.

证明: 按照随机序的定义易于证明此结论成立. □

定理 3.1 设$X_1, X_2, \cdots, X_n$和$X_1^*, X_2^*, \cdots, X_n^*$为独立正态随机变量, 分别服从$N(\mu_i, \sigma^2)$和$N(\mu_i^*, \sigma^2)$, $i=1,\cdots,n$分布. 令$a=\min(\mu_1,\cdots,\mu_n,\mu_1^*,\cdots,\mu_n^*)$, $b=\max(\mu_1,\cdots,\mu_n,\mu_1^*,\cdots,\mu_n^*)$. 假设函数$f:[a,b]\to\mathbf{R}$是二次可微的, 令$\boldsymbol{\mu}_f=(f(\mu_1),\cdots,f(\mu_n))$, $\boldsymbol{\mu}_f^*=(f(\mu_1^*),\cdots,f(\mu_n^*))$, 那么成立以下结论:

(a) 如果$f'(x)>0$, $f''(x)\geq 0$且$\boldsymbol{\mu}_f \succeq^{\mathrm{w}} \boldsymbol{\mu}_f^*$, 则$X_{(1)} \leq_{\mathrm{st}} X_{(1)}^*$.

(b) 如果$f'(x)<0$, $f''(x)\leq 0$且$\boldsymbol{\mu}_f \succeq_{\mathrm{w}} \boldsymbol{\mu}_f^*$, 则$X_{(1)} \leq_{\mathrm{st}} X_{(1)}^*$.

(c) 如果$f'(x)>0$, $f''(x)\leq 0$且$\boldsymbol{\mu}_f \succeq_{\mathrm{w}} \boldsymbol{\mu}_f^*$, 则$X_{(n)} \geq_{\mathrm{st}} X_{(n)}^*$.

(d) 如果$f'(x)<0$, $f''(x)\geq 0$且$\boldsymbol{\mu}_f \succeq^{\mathrm{w}} \boldsymbol{\mu}_f^*$, 则$X_{(n)} \geq_{\mathrm{st}} X_{(n)}^*$.

证明: (a) 设$f'(x)>0$, $f''(x)\geq 0$且$\boldsymbol{\mu}_f \succeq^{\mathrm{w}} \boldsymbol{\mu}_f^*$. 根据定理1.1可知存在$\boldsymbol{\lambda}_f=(f(\lambda_1),\cdots,f(\lambda_n))$使得$\boldsymbol{\lambda}_f \succeq_{\mathrm{m}} \boldsymbol{\mu}_f^*$且$f(\lambda_i)\geq f(\mu_i)$, $i=1,\cdots,n$. 设$Y_1,Y_2,\cdots,Y_n$为同$X_1,\cdots,X_n$, $X_1^*,\cdots,X_n^*$相互独立的正态随机变量, 服从$N(\lambda_i,\sigma^2)$, $i=1,\cdots,n$分布. 根据定理2.1知$Y_{(1)} \leq_{\mathrm{st}} X_{(1)}^*$, 再根据引理3.1知$Y_{(1)} \geq_{\mathrm{st}} X_{(1)}$, 因此可得$X_{(1)} \leq_{\mathrm{st}} X_{(1)}^*$.

采用类似的方法可以证明(b), (c), (d). □

从定理3.1, 我们还可以获得以下一些有意义的推论(特例).

推论 3.1 对定理3.1中的随机变量$X_1,\cdots,X_n$和$X_1^*,\cdots,X_n^*$, 如果$(\mu_1,\cdots,\mu_n)\succeq_{\mathrm{m}}(\mu_1^*,\cdots,\mu_n^*)$, 则$X_{(1)} \leq_{\mathrm{st}} X_{(1)}^*$和$X_{(n)} \geq_{\mathrm{st}} X_{(n)}^*$同时成立.

推论 3.2 对定理3.1中的随机变量$X_1,\cdots,X_n$和$X_1^*,\cdots,X_n^*$, 如果存在实数$a>0$使得$a^{\boldsymbol{\mu}} \succeq^{\mathrm{w}} a^{\boldsymbol{\mu}^*}$, 其中$a^{\boldsymbol{\mu}}=(a^{\mu_1},\cdots,a^{\mu_n})$, $a^{\boldsymbol{\mu}^*}=(a^{\mu_1^*},\cdots,a^{\mu_n^*})$, 那么

(a) 若$a>1$, 则$X_{(1)} \leq_{\mathrm{st}} X_{(1)}^*$.

(b) 若$0<a<1$, 则$X_{(n)} \geq_{\mathrm{st}} X_{(n)}^*$.

证明: 单调函数$f(x)=a^x$, 当$a>1$时, 有$f'(x)>0$且$f''(x)\geq 0$; 当$0<a<1$时, 有$f'(x)<0$且$f''(x)\geq 0$. 根据定理3.1我们可以得到此结果. □

推论 3.3 对定理3.1中的随机变量$X_1,\cdots,X_n$和$X_1^*,\cdots,X_n^*$, 设$\mu_i>0$, $\mu_i^*>0$, $i=1,\cdots,n$. 对于非零实数τ, 令$\boldsymbol{\mu}^\tau=(\mu_1^\tau,\cdots,\mu_n^\tau)$, $\boldsymbol{\mu}^{*\tau}=(\mu_1^{*\tau},\cdots,\mu_n^{*\tau})$, 那么

(a) 若$\tau\geq 1$且$\boldsymbol{\mu}^\tau \succeq^{\mathrm{w}} \boldsymbol{\mu}^{*\tau}$, 则$X_{(1)} \leq_{\mathrm{st}} X_{(1)}^*$.

(b) 若$0<\tau\leq 1$且$\boldsymbol{\mu}^\tau \succeq_{\mathrm{w}} \boldsymbol{\mu}^{*\tau}$, 则$X_{(n)} \geq_{\mathrm{st}} X_{(n)}^*$.

(c) 若$\tau<0$且$\boldsymbol{\mu}^\tau \succeq^{\mathrm{w}} \boldsymbol{\mu}^{*\tau}$, 则$X_{(n)} \geq_{\mathrm{st}} X_{(n)}^*$.

证明: 单调函数$f(x)=x^\tau$, $x>0$, 当$\tau\geq 1$时, 有$f'(x)>0$且$f''(x)\geq 0$; 当$0<\tau\leq 1$时, 有$f'(x)>0$且$f''(x)\leq 0$; 当$\tau<0$时, 有$f'(x)<0$且$f''(x)\geq 0$. 根据定理3.1我们可以得到此结果. □

推论 3.4 对定理3.1中的随机变量$X_1,\cdots,X_n$和$X_1^*,\cdots,X_n^*$, 设$\mu_i>0$, $\mu_i^*>0$, $i=1,\cdots,n$. 如果$(1/\mu_1,\cdots,1/\mu_n)\succeq^{\mathrm{p}}(1/\mu_1^*,\cdots,1/\mu_n^*)$, 则$X_{(n)} \geq_{\mathrm{st}} X_{(n)}^*$.

证明: 根据定义1.3可知, $(1/\mu_1,\cdots,1/\mu_n)\succeq^{\mathrm{p}}(1/\mu_1^*,\cdots,1/\mu_n^*)$等价于$(\ln 1/\mu_1,\cdots,\ln 1/\mu_n)\succeq^{\mathrm{w}}(\ln 1/\mu_1^*,\cdots,\ln 1/\mu_n^*)$. 单调函数$f(x)=-\ln x$, 有$f'(x)<0$且$f''(x)\geq 0$. 根据定理3.1我们可以得到此结果. □

参 考 文 献

[1] Barbour, A.D., Lindvall, T. and Rogers, L.C.G., Stochastic ordering of order statistics, *J. Appl. Prob.*, **28**(1991), 278–286.

[2] Hu, T., Monotone coupling and stochastic ordering of order statistics, *Sys. Sci. Math. Sci.*, **8**(1995), 209–214.

[3] Kochar, S.C. and Korwar, R., Stochastic orders for spacings of heterogeneous exponential random variables, *J. Multivariate Anal.*, **57**(1996), 69–83.

[4] Müller, A., Stochastic ordering of multivariate normal distributions, *Ann. Inst. Statist. Math.*, **53(3)**(2001), 567–575.

[5] Müller, A. and Stoyan, D., *Comparison Methods for Stochastic Models and Risks*, John Wiley & Sons, Ltd. West Sussex, 2002.

[6] Pečaric, J.E., Proschan F. and Tong, Y.L., *Convex Functions, Partial Orderings and Statistical Application*, Academic Press, New York, 1992.

[7] Proschan, F. and Sethuraman, J., Stochastic comparisons of order statistics from heterogeneous populations, with applications in reliability, *J. Multivariate Anal.*, **6**(1976), 608–616.

[8] Shaked, M. and Shanthikumar, J.G., *Stochastic Orders and their Applications*, Academic Press, New York, 1994.

[9] Slepian, D., The one-sided barrier problem for Gaussian processes, *Bell System Tech. J.*, **41**(1962), 463–501.

[10] Sun, L. and Zhang, X., Stochastic comparisons of order statistics from gamma distributions, *J. Multivariate Anal.*, **93**(2005), 112–121.

On Stochastic Orders for Order Statistics from Normal Distributions

Huang Yongjun Zhang Xinsheng

(*Department of Statistics, School of Management, Fudan University, Shanghai, 200433*)

In this paper we obtain some new results on stochastic orders for order statistics from normal distributions. Let $X_1,\cdots,X_n,X_1^*,\cdots,X_n^*$ be independent normal random variables with $X_i\sim N(\mu_i,\sigma^2)$ and $X_i^*\sim N(\mu_i^*,\sigma^2)$, $i=1,\cdots,n$. Suppose that there exists a strictly monotone function f such that $(f(\mu_1),\cdots,f(\mu_n))\succeq_{\rm m}(f(\mu_1^*),\cdots,f(\mu_n^*))$, we prove that: (i) if $f'(x)f''(x)\geq 0$, then $X_{(1)}\leq_{\rm st}X_{(1)}^*$; (ii) if $f'(x)f''(x)\leq 0$, then $X_{(n)}\geq_{\rm st}X_{(n)}^*$. Moreover, let $X_i\sim N(\mu,\sigma_i^2)$ and $X_i^*\sim N(\mu,\sigma_i^{*2})$, $i=1,\cdots,n$. We obtain that $(1/\sigma_1,\cdots,1/\sigma_n)\succeq_{\rm m}(1/\sigma_1^*,\cdots,1/\sigma_n^*)$ implies that $X_{(1)}\leq_{\rm st}X_{(1)}^*$ and $X_{(n)}\geq_{\rm st}X_{(n)}^*$.

Keywords: Normal distribution, stochastic orders, majorization, order statistics.

AMS Subject Classification: 60E15, 62G30.