

非对称Marshall-Olkin Laplace分布
及其在自回归模型中的应用 *

颜荣芳

(西北师范大学数学与信息科学学院, 兰州, 730070)

张娟

(定西师范高等专科学校, 定西, 743000)

摘 要

引入了一种新的概率分布类——非对称Marshall-Olkin Laplace分布(AMOL), 讨论了这一分布类的性质, 得到了其几乎所有的数字特征. 最后讨论了非对称Marshall-Olkin Laplace分布在自回归分析中的应用, 得到了以AMOL为边际分布的自回归模型的一个充分必要条件.

关键词: 非对称Laplace分布, 自回归模型, Laplace分布, 非对称Marshall-Olkin Laplace分布.

学科分类号: O211.67.

§1. 引 言

经典Laplace分布的概率密度函数和特征函数分别为

$$f(x) = \frac{1}{2\sigma} e^{-|x|/\sigma} \quad (-\infty < x < +\infty, \sigma > 0),$$

和

$$\Phi_X(t) = \frac{1}{1 + \sigma^2 t^2} \quad (\sigma > 0).$$

由于经典Laplace分布的对称性, 它被成功地用来拟合具有尖峰厚尾对称特性的数据. 然而在实际应用中, 我们需要处理大量的具有一定偏倚性(非对称性)的数据. 如果用经典Laplace分布分析和处理这样的数据就不可避免地造成不必要的误差, 甚至导致决策的失误. 因此Kouzubowski和Podgorski在[1]中引入了一类新的非对称分布, 即非对称Laplace分布(AL(μ, σ)), 研究了AL(μ, σ)分布的性质, 给出了AL(μ, σ)分布的密度函数和分布函数, 同时还得到了它几乎所有的数字特征. AL(μ, σ)分布的特征函数为

$$\Phi_X(t) = \frac{1}{1 + \sigma^2 t^2 - i\mu t}, \quad \sigma > 0, -\infty < \mu < +\infty. \quad (1.1)$$

由于AL(μ, σ)分布的优良性质, 加之它能够很好地拟合具有尖峰厚尾偏倚特性的数据, 因此AL(μ, σ)分布具有广泛的应用前景, 事实上, 它已被成功的应用到金融、保险领域([2], [3]).

基于非对称Laplace分布, 在本文中我们试图建立一种新的分布类, 即非对称Marshall-Olkin Laplace分布, 进而讨论这一分布类的性质及其在自回归分析中的应用.

*甘肃省自然科学基金(ZS-011-A25-024-G), 甘肃省教育厅科研项目(041-14), 西北师范大学科技创新工程资助项目(NWNU-KJCXGC-212)资助.

本文2006年12月21日收到, 2009年10月6日收到修改稿.

§2. 非对称Marshall-Olkin Laplace分布

Marshall和Olkin在[4]中展示了在分布函数中引入新参数的一般方法: 设 $\bar{F}(x)$ 是一个随机变量的生存函数, 则

$$\bar{G}(t) = \frac{\alpha \bar{F}(x)}{1 - (1 - \alpha) \bar{F}(x)}, \quad \alpha > 0,$$

也是某个随机变量的生存函数.

受到这一方法的启发, 我们给出在特征函数中引入新参数的一般方法, 就是下面的引理:

引理 2.1 设随机变量 X 的特征函数为 $\Phi(t)$, 则

$$\Psi(t) = \frac{\beta \Phi(t)}{1 - (1 - \beta) \Phi(t)}, \quad \beta > 0, \quad (2.1)$$

也是某个随机变量的特征函数.

证明: 只需构造一个特征函数为 $\Psi(t)$ 的随机变量即可.

当 $\beta = 1$ 时, $\Psi(t) = \Phi(t)$, 结论显然成立.

当 $0 < \beta < 1$ 时, 设 $\{X_n, n \geq 1\}$ 是一个独立同分布的随机变量序列, 其特征函数为 $\Phi(t)$, N 是一个参数为 β 且与随机变量序列 $\{X_n, n \geq 1\}$ 独立的几何随机变量, 记 $Y = \sum_{i=1}^N X_n$, 容易验证随机变量 Y 的特征函数为 $\Psi(t)$.

当 $\beta > 1$ 时, 设 X_1 和 X_2 是两个相互独立的随机变量且满足

$$X_2 = \begin{cases} Y, & 1/\beta, \\ X_1 + Y, & 1 - 1/\beta, \end{cases}$$

这里 Y 是与 X_1 独立的某一个随机变量. 若 X_1 和 X_2 具有相同的特征函数 $\Phi(t)$, 不难验证 Y 的特征函数为 $\Psi(t)$. 引理证毕. \square

特别地, 在引理2.1中, 当 $\Phi(t) = 1/(1 + \sigma^2 t^2 - i\mu t)$ 时,

$$\Psi_X(t) = \Psi(t) = \frac{1}{1 + \frac{1}{\beta}(\sigma^2 t^2 - i\mu t)}. \quad (2.2)$$

定义 2.1 称特征函数为 $\Psi_X(t)$ 的分布为非对称 Marshall-Olkin Laplace 分布, 记为 $\text{AMOL}(\beta, \mu, \sigma)$. 若随机变量 X 服从非对称 Marshall-Olkin Laplace 分布, 则记为 $X \sim \text{AMOL}(\beta, \mu, \sigma)$.

在讨论 $\text{AMOL}(\beta, \mu, \sigma)$ 的性质之前, 为了行文方便, 我们约定如下:

(a) Z_θ ($\theta > 0$) 是一个均值为 θ 的指数随机变量, 其概率密度函数为

$$f_\theta(x) = \frac{1}{\theta} \exp(-x/\theta), \quad x > 0, \theta > 0.$$

(b) I_κ 是具有如下分布的离散型随机变量,

$$I_\kappa = \begin{cases} -\kappa, & \kappa^2/(1+\kappa^2), \\ 1/\kappa, & 1/(1+\kappa^2), \end{cases}$$

这里 $\kappa = 2\sigma\sqrt{\beta}/(\mu + \sqrt{4\sigma^2\beta + \mu^2})$.

下面我们研究非对称Marshall-Olkin Laplace分布的性质.

定理 2.1 1° 若随机变量 $X \sim \text{AMOL}(\beta, \mu, \sigma)$, 指数随机变量 Z_κ 和 $Z_{1/\kappa}$ 相互独立, 则 $X \stackrel{d}{=} (\sigma/\sqrt{\beta})Z_\kappa - (\sigma/\sqrt{\beta})Z_{1/\kappa}$, 其中 $\kappa = 2\sigma\sqrt{\beta}/(\mu + \sqrt{4\sigma^2\beta + \mu^2})$.

2° 若随机变量 $X \sim \text{AMOL}(\beta, \mu, \sigma)$, 指数随机变量 $Z_{1/\beta}$ 与标准正态随机变量 L 相互独立, 则 $X \stackrel{d}{=} \mu Z_{1/\beta} + \sigma\sqrt{2Z_{1/\beta}}L$.

3° 若随机变量 $X \sim \text{AMOL}(\beta, \mu, \sigma)$, 则 $X \stackrel{d}{=} \sigma\sqrt{\beta}I_\kappa Z_{1/\beta}$.

证明: 1° 只需证明 X 和 $(\sigma/\sqrt{\beta})Z_\kappa - (\sigma/\sqrt{\beta})Z_{1/\kappa}$ 具有相同的特征函数. 令 $Z = (\sigma/\sqrt{\beta})Z_\kappa - (\sigma/\sqrt{\beta})Z_{1/\kappa}$, 记 Z 的特征函数为 $G(t)$, 则

$$\begin{aligned} G(t) &= E[\exp(itZ)] = E\left[\exp\left(it\left(\frac{\sigma}{\sqrt{\beta}}Z_\kappa - \frac{\sigma}{\sqrt{\beta}}Z_{1/\kappa}\right)\right)\right] \\ &= E\left[\exp\left(it\frac{\sigma}{\sqrt{\beta}}Z_\kappa\right)\right] \cdot E\left[\exp\left(-it\frac{\sigma}{\sqrt{\beta}}Z_{1/\kappa}\right)\right] \\ &= \left(\frac{1}{it\sigma/(\kappa\sqrt{\beta}) - 1}\right) \cdot \left(-\frac{1}{it\sigma\kappa/\sqrt{\beta} + 1}\right) \\ &= \frac{1}{(1 - it\sigma/(\kappa\sqrt{\beta}))(1 + it\sigma\kappa/\sqrt{\beta})} = \Psi_X(t). \end{aligned}$$

因此1°成立. 类似地可以证明2°和3°, 限于篇幅这里不再赘述. \square

定理2.1中的1°说明, 非对称Marshall-Olkin Laplace随机变量可以表示为两个独立的指数型随机变量 $(\sigma/\sqrt{\beta})Z_\kappa$ 和 $-(\sigma/\sqrt{\beta})Z_{1/\kappa}$ 的卷积. 这为我们确定 $\text{AMOL}(\beta, \mu, \sigma)$ 的概率密度函数和分布函数提供了重要的方法. 事实上, 应用卷积公式通过简单的计算就能得到 $\text{AMOL}(\beta, \mu, \sigma)$ 的概率密度函数和分布函数的精确表达式. 因此, 我们不加证明的给出下面的定理:

定理 2.2 设随机变量 $X \sim \text{AMOL}(\beta, \mu, \sigma)$, 则它的概率密度函数和分布函数分别为

$$f(x) = \frac{\sqrt{\beta}}{\sigma} \cdot \frac{\kappa}{1+\kappa^2} \begin{cases} \exp\left(-\frac{\kappa\sqrt{\beta}}{\sigma}x\right) & \text{若 } x \geq 0, \\ \exp\left(\frac{\sqrt{\beta}}{\kappa\sigma}x\right) & \text{若 } x < 0, \end{cases}$$

和

$$F(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{1+\kappa^2} \exp\left(-\frac{\kappa\sqrt{\beta}}{\sigma}x\right) & \text{若 } x > 0, \\ \frac{\kappa^2}{1+\kappa^2} \exp\left(\frac{\sqrt{\beta}}{\kappa\sigma}x\right) & \text{若 } x \leq 0, \end{cases}$$

其中 $\kappa = 2\sigma\sqrt{\beta}/(\mu + \sqrt{4\sigma^2\beta + \mu^2})$.

基于定理2.2, 我们可以得到AMOL(β, μ, σ)分布的一些数字特征, 这就是下面的

定理 2.3 设随机变量 $X \sim \text{AMOL}(\beta, \mu, \sigma)$, 用 $E|X|^\alpha$ ($\alpha > 0$), EX^n , $E(X - EX)^2$, $E|X - EX|$, γ_0 , γ_1 和 γ_2 分别表示 X 的 α 阶绝对矩, n 阶矩, 方差, 平均偏差, 变差系数, 偏度系数和峰度, 则

$$1^\circ E|X|^\alpha = \Gamma(\alpha + 1) \frac{1 - \kappa^2}{1 + \kappa^2} \quad (\alpha > 0);$$

$$2^\circ EX^n = n! \left(\frac{\sigma}{\kappa\sqrt{\beta}} \right)^n \frac{1 + (-1)^n \kappa^2(n+1)}{1 + \kappa^2};$$

$$3^\circ E(X - EX)^2 = \left(\frac{\mu}{\beta} \right)^2 + \frac{2\sigma^2}{\beta};$$

$$4^\circ E|X - EX| = \frac{2\sigma/\sqrt{\beta}e^{\kappa^2-1}}{\kappa(1 + \kappa^2)} \quad (\mu > 0), \text{ 或 } \frac{2\sigma/\sqrt{\beta}e^{1/\kappa^2-1}}{\kappa(1 + \kappa^2)} \quad (\mu < 0);$$

$$5^\circ \gamma_0 = \frac{\sqrt{\text{Var}(X)}}{|EX|} = \sqrt{2\frac{\sigma^2}{\beta^2}\beta + 1} = \frac{\sqrt{1/\kappa^2 + \kappa^2}}{|1/\kappa - \kappa|};$$

$$6^\circ \gamma_1 = \frac{E(X - EX)^3}{(E(X - EX)^2)^{3/2}} = 2 \frac{1/\kappa^3 - \kappa^3}{(1/\kappa^2 - \kappa^2)^{3/2}};$$

$$7^\circ \gamma_2 = \frac{E(X - EX)^4}{(\text{Var}(X))^2} - 3 = 6 - \frac{12}{(1/\kappa^2 + \kappa^2)^2}.$$

证明: 这里只证 1° , 4° 和 5° , 其它证明类似.

1° 由期望的定义得

$$\begin{aligned} E|X|^\alpha &= \int_{-\infty}^{+\infty} |x|^\alpha f(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^0 (-x)^\alpha f(x) dx + \int_0^{+\infty} x^\alpha f(x) dx \\ &= \frac{\sqrt{\beta}}{\sigma} \cdot \frac{\kappa}{1 + \kappa^2} \left[\int_{-\infty}^0 (-x)^\alpha \exp\left(\frac{\sqrt{\beta}}{\kappa\sigma}x\right) dx + \int_0^{+\infty} x^\alpha \exp\left(-\frac{\kappa\sqrt{\beta}}{\sigma}\right) dx \right] \\ &= \frac{\sqrt{\beta}}{\sigma} \cdot \frac{\kappa}{1 + \kappa^2} \left[- \int_0^{+\infty} y^\alpha \exp\left(-\frac{\sqrt{\beta}}{\kappa\sigma}y\right) dy + \int_0^{+\infty} x^\alpha \exp\left(-\frac{\kappa\sqrt{\beta}}{\sigma}\right) dx \right] \\ &\quad \text{let } y = -x \\ &= \frac{\sqrt{\beta}}{\sigma} \cdot \frac{\kappa}{1 + \kappa^2} \left[- \frac{\kappa\sigma}{\sqrt{\beta}} \int_0^{+\infty} y^\alpha \exp\left(-\frac{\sqrt{\beta}}{\kappa\sigma}y\right) d\left(\frac{\sqrt{\beta}}{\kappa\sigma}y\right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\sigma}{\kappa\sqrt{\beta}} \int_0^{+\infty} x^\alpha \exp\left(-\frac{\kappa\sqrt{\beta}}{\sigma}x\right) d\left(\frac{\kappa\sqrt{\beta}}{\sigma}x\right) \right] \\ &= \frac{\sqrt{\beta}}{\sigma} \cdot \frac{\kappa}{1 + \kappa^2} \left[- \frac{\kappa\sigma}{\sqrt{\beta}} \Gamma(\alpha + 1) + \frac{\sigma}{\kappa\sqrt{\beta}} \Gamma(\alpha + 1) \right] \\ &= \Gamma(\alpha + 1) \cdot \frac{1 - \kappa^2}{1 + \kappa^2}. \end{aligned}$$

4° 若 $\mu > 0$, 则

$$\begin{aligned}
 & E|X - EX| \\
 &= \int_{-\infty}^0 \left(\frac{\mu}{\beta} - x\right) f(x) dx + \int_0^{\mu/\beta} \left(\frac{\mu}{\beta} - x\right) f(x) dx + \int_{\mu/\beta}^{+\infty} \left(x - \frac{\mu}{\beta}\right) f(x) dx \\
 &= \frac{\sqrt{\beta}}{\sigma} \cdot \frac{\kappa}{1 + \kappa^2} \left[\int_{-\infty}^0 \left(\frac{\mu}{\beta} - x\right) \exp\left(\frac{\sqrt{\beta}}{\kappa\sigma}x\right) dx \right. \\
 &\quad \left. + \int_0^{\mu/\beta} \left(\frac{\mu}{\beta} - x\right) \exp\left(-\frac{\kappa\sqrt{\beta}}{\sigma}x\right) dx + \int_{\mu/\beta}^{+\infty} \left(x - \frac{\mu}{\beta}\right) \exp\left(-\frac{\kappa\sqrt{\beta}}{\sigma}x\right) dx \right] \\
 &= \frac{\kappa\sqrt{\beta}}{\sigma(1 + \kappa^2)} \cdot 2\left(\frac{\sigma}{\kappa\sqrt{\beta}}\right)^2 \exp\left(-\frac{\kappa\mu}{\sigma\sqrt{\beta}}\right) + \frac{\mu}{\beta} - \frac{\sigma}{\sqrt{\beta}}\left(\kappa - \frac{1}{\kappa}\right) \\
 &= \frac{\kappa\sqrt{\beta}}{\sigma(1 + \kappa^2)} \cdot 2\left(\frac{\sigma}{\kappa\sqrt{\beta}}\right)^2 \exp(\kappa^2 - 1) + \frac{\mu}{\beta} - \frac{\sigma}{\sqrt{\beta}}\left(\frac{\mu}{\sigma\sqrt{\beta}}\right) \\
 &= \frac{2\sigma/\sqrt{\beta}e^{\kappa^2-1}}{\kappa(1 + \kappa^2)}.
 \end{aligned}$$

类似地, 当 $\mu < 0$ 时, $E|X - EX| = (2\sigma/\sqrt{\beta}e^{1/\kappa^2-1})/[\kappa(1 + \kappa^2)]$ 成立.

5° 注意到

$$EX = \frac{\sigma}{\kappa\sqrt{\beta}}(1 - \kappa^2), \quad EX^2 = 2\left(\frac{\sigma}{\kappa\sqrt{\beta}}\right)^2 \frac{1 + \kappa^6}{1 + \kappa^2}, \quad EX^3 = 6\left(\frac{\sigma}{\kappa\sqrt{\beta}}\right)^3 \frac{1 - \kappa^8}{1 + \kappa^2},$$

因此

$$\begin{aligned}
 & E(X - EX)^3 \\
 &= EX^3 - 3EX^2EX + 2(EX)^3 \\
 &= 6\left(\frac{\sigma}{\kappa\sqrt{\beta}}\right)^3 \frac{1 - \kappa^8}{1 + \kappa^2} - 3 \cdot 2\left(\frac{\sigma}{\kappa\sqrt{\beta}}\right)^2 \frac{1 + \kappa^6}{1 + \kappa^2} \cdot \frac{\sigma}{\kappa\sqrt{\beta}}(1 - \kappa^2) + 2\left(\frac{\sigma}{\kappa\sqrt{\beta}}(1 - \kappa^2)\right)^3 \\
 &= 2\left(\frac{\sigma}{\kappa\sqrt{\beta}}\right)^3 (1 - \kappa^2) \left[\frac{3(1 + \kappa^4)(1 + \kappa^2) - 3(1 + \kappa^6) + (1 - \kappa^2)^2(1 + \kappa^2)}{1 + \kappa^2} \right] \\
 &= 2\left(\frac{\sigma}{\kappa\sqrt{\beta}}\right)^3 (1 - \kappa^2) \left[\frac{(1 + \kappa^2)(1 + \kappa^2 + \kappa^4)}{1 + \kappa^2} \right] \\
 &= 2\left(\frac{\sigma}{\kappa\sqrt{\beta}}\right)^3 \frac{1 - \kappa^6}{\kappa^3},
 \end{aligned}$$

考虑到

$$(\text{Var}(X))^{3/2} = \left[\left(\frac{\mu}{\beta}\right)^2 + \frac{2\sigma^2}{\beta} \right]^{3/2} = \left(\frac{\sigma^2}{\beta}\right)^{3/2} \left(\kappa^2 + \frac{1}{\kappa^2}\right)^{3/2},$$

从而 $\gamma_1 = 2(1/\kappa^3 - \kappa^3) / [(1/\kappa^2 - \kappa^2)^{3/2}]$. \square

至此, 我们得到了非对称Marshall-Olkin Laplace分布几乎所有的数字特征. 显然, 这些数字特征无论对AMOL分布的进一步研究还是它的应用都是有意义的. 为了便于同AL(μ, σ)分布的数字特征([1])比较, 也为了便于引用, 我们列表如下:

$X \sim \text{AMOL}(\beta, \mu, \sigma)$ 的矩和相关的参数

数字特征	公式	表达式
n 阶矩	$\mathbf{E}X^n$	$n! \left(\frac{\sigma}{\kappa\sqrt{\beta}} \right)^n \frac{1 + (-1)^n \kappa^{2(n+1)}}{1 + \kappa^2}$
绝对矩	$\mathbf{E} X ^\alpha \ (\alpha > 0)$	$\Gamma(\alpha + 1) \frac{1 - \kappa^2}{1 + \kappa^2}$
均值	$\mathbf{E}X$	$\frac{\mu}{\beta}$
方差	$\mathbf{E}(X - \mathbf{E}X)^2$	$\left(\frac{\mu}{\beta} \right)^2 + \frac{2\sigma^2}{\beta}$
平均偏差	$\mathbf{E} X - \mathbf{E}X $	$\frac{2\sigma/\sqrt{\beta}e^{\kappa^2-1}}{\kappa(1+\kappa^2)} \quad (\mu > 0)$ $\frac{2\sigma/\sqrt{\beta}e^{1/\kappa^2-1}}{\kappa(1+\kappa^2)} \quad (\mu < 0)$
变差系数	$\frac{\sqrt{\text{Var}(X)}}{ \mathbf{E}X }$	$\sqrt{2\frac{\sigma^2}{\beta^2}\beta + 1} = \frac{\sqrt{1/\kappa^2 + \kappa^2}}{ 1/\kappa - \kappa }$
偏度系数	$\gamma_1 = \frac{\mathbf{E}(X - \mathbf{E}X)^3}{(\mathbf{E}(X - \mathbf{E}X)^2)^{3/2}}$	$2 \frac{1/\kappa^3 - \kappa^3}{(1/\kappa^2 - \kappa^2)^{3/2}}$
峰度	$\gamma_2 = \frac{\mathbf{E}(X - \mathbf{E}X)^4}{(\text{Var}(X))^2} - 3$	$6 - \frac{12}{(1/\kappa^2 + \kappa^2)^2}$

其中 $\kappa = 2\sigma\sqrt{\beta}/(\mu + \sqrt{4\sigma^2\beta + \mu^2})$.

注记 1 $\text{AMOL}(\beta, \mu, \sigma)$ 和 $\text{AL}(\mu, \sigma)$ 有相同的绝对矩, 变差系数, 偏度系数和峰度.

定理 2.4 设 $\{X_n, n \geq 1\}$ 是一个独立同分布的随机变量序列且 $X_i \sim \text{AMOL}(\beta, \mu p, \sigma\sqrt{p})$, N 是一个参数为 p 的几何随机变量, 即 $P\{N = k\} = p(1-p)^{k-1}, k = 1, 2, \dots$, 若 N 与 $\{X_n, n \geq 1\}$ 独立, 记 $X = \sum_{i=1}^N X_i$, 则 $X \sim \text{AMOL}(\beta, \mu, \sigma)$, 即非对称 Marshall-Olkin Laplace 分布是几何无限可分的.

证明: 由特征函数的定义得

$$\begin{aligned} \Phi_X(t) &= \mathbf{E} \left[\exp \left(it \sum_{i=1}^N X_i \right) \right] = \sum_{k=1}^{\infty} [\Phi_{X_i(t)}]^k \cdot p(1-p)^k \\ &= \frac{p / \left(1 + \frac{1}{\beta} (\sigma^2 p t^2 - i \mu p t) \right)}{1 - (1-p) / \left(1 + \frac{1}{\beta} (\sigma^2 p t^2 - i \mu p t) \right)} = \frac{1}{1 + \frac{1}{\beta} (\sigma^2 t^2 - i \mu t)} = \Psi_X(t). \end{aligned}$$

定理证毕. \square

§3. 非对称Marshall-Olkin Laplace过程

最近二十多年来, 由于边际分布为非Gaussian分布的自回归模型在实际中的成功应用, 关于这一类模型的研究得到了广泛的关注. 自从Gaver和Lewis在[5]中完成了关于非Gaussian过程的奠基性工作后, Lawrance和Lewis ([6], [7]), Anderson和Arnold ([8]), Jayakumar和Pillai ([9]), Dewald和Lewis ([10]), Seetha和Jose ([11], [12], [13])相继研究了以指数分布, Linnik分布, Mittag-Leffler分布, Laplace分布, 一般的Laplace分布, geometric α -Laplace分布和Pakes geometric Linnik分布作为边际分布自回归模型, 得到了相应的自回归过程. 下面研究以非对称Marshall-Olkin Laplace分布为边际分布的自回归模型以及的非对称Marshall-Olkin Laplace过程.

考虑具有如下结构的一阶自回归模型AR(1),

$$X_n = \begin{cases} \varepsilon_n, & p, \\ X_{n-1} + \varepsilon_n, & 1 - p, \end{cases} \quad (3.1)$$

其中 p ($0 < p < 1$)为概率, $\{\varepsilon_n\}$ 是一独立同分布的随机变量序列而且独立于 $\{X_1, X_2, \dots, X_{n-1}\}$.

定理 3.1 对于一阶自回归模型(3.1), 过程 $\{X_n, n \geq 0\}$ 平稳且 $X_n \sim \text{AMOL}(\beta, \mu, \sigma)$ 的充分必要条件是 $\varepsilon_n \sim \text{AMOL}(\beta/p, \mu, \sigma)$ 且 $X_0 \sim \text{AMOL}(\beta, \mu, \sigma)$.

证明: 显然 ε_n ($n \geq 0$)具有相同的特征函数, 记 X_n 和 ε_n 的特征函数分别是 $\Phi_{X_n}(t)$ 和 $\Phi_\varepsilon(t)$, 由(3.1)式得

$$\Phi_{X_n}(t) = p \Phi_\varepsilon(t) + (1 - p) \Phi_{X_{n-1}}(t) \Phi_\varepsilon(t). \quad (3.2)$$

先证明必要性, 假设 $\{X_n, n \geq 0\}$ 是平稳的, 由(3.2)式, 得

$$\Phi_X(t) = p \Phi_\varepsilon(t) + (1 - p) \Phi_X(t) \Phi_\varepsilon(t). \quad (3.3)$$

于是,

$$\Phi_\varepsilon(t) = \frac{\Phi_X(t)}{p + (1 - p) \Phi_X(t)}. \quad (3.4)$$

又由于 $X_n \sim \text{AMOL}(\beta, \mu, \sigma)$, 因此

$$\Phi_X(t) = \frac{1}{1 + \frac{1}{\beta}(\sigma^2 t^2 - i\mu t)}.$$

从而

$$\Phi_\varepsilon(t) = \frac{1}{1 + \frac{p}{\beta}(\sigma^2 t^2 - i\mu t)}.$$

即 $\varepsilon_n \sim \text{AMOL}(\beta/p, \mu, \sigma)$.

再用数学归纳法证明充分性, 若 $\{\varepsilon_n\}$ 是独立同分布的随机序列且 $\varepsilon_n \sim \text{AMOL}(\beta/p, \mu, \sigma)$, $X_0 \sim \text{AMOL}(\beta, \mu, \sigma)$. 由(3.2)式得

$$\begin{aligned}\Phi_{X_1}(t) &= p \frac{1}{1 + \frac{p}{\beta}(\sigma^2 t^2 - i\mu t)} + (1-p) \frac{1}{1 + \frac{p}{\beta}(\sigma^2 t^2 - i\mu t)} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{\beta}(\sigma^2 t^2 - i\mu t)} \\ &= \frac{1}{1 + \frac{1}{\beta}(\sigma^2 t^2 - i\mu t)}.\end{aligned}$$

假设 $X_{n-1} \sim \text{AMOL}(\beta, \mu, \sigma)$, 类似地可以证明 $X_n \sim \text{AMOL}(\beta, \mu, \sigma)$. 证毕. \square

注意到当 $\beta = 1$ 时, $\text{AMOL}(\beta, \mu, \sigma)$ 退化成 $\text{AL}(\mu, \sigma)$, 因此直接从定理3.1得到如下推论

推论 3.1 考虑一阶自回归模型(3.1), 过程 $\{X_n, n \geq 0\}$ 平稳且 $X_n \sim \text{AL}(\mu, \sigma)$ 的充分必要条件是 $\varepsilon_n \sim \text{AMOL}(1/p, \mu, \sigma)$ 且 $X_0 \sim \text{AL}(\mu, \sigma)$.

自回归模型(3.1)可写成 $X_n = I_n X_{n-1} + \varepsilon_n$, 其中 $P(I_n = 0) = 1 - P(I_n = 1) = p$, $0 < p < 1$, 则 (X_n, X_{n-1}) 的联合特征函数为

$$\begin{aligned}\Phi_{X_{n-1}, X_n}(t_1, t_2) &= E[\exp(it_1 X_{n-1} + it_2 X_n)] \\ &= E[\exp(it_1 X_{n-1} + it_2 (I_n X_{n-1} + \varepsilon_n))] \\ &= E[\exp(i(t_1 + I_n t_2) X_{n-1} + it_2 \varepsilon_n)] \\ &= E[\exp(i(t_1 + I_n t_2) X_{n-1})] \cdot E[\exp(it_2 \varepsilon_n)] \\ &= \Phi_{\varepsilon_n}(t_2) (p \Phi_{X_{n-1}}(t_1) + (1-p) \Phi_{X_{n-1}}(t_1 + t_2)) \\ &= \frac{1}{1 + \frac{1}{\beta}(\sigma^2 t_2^2 - i\mu t_2)} \left[\frac{p}{1 + \frac{1}{\beta}(\sigma^2 t_1^2 - i\mu t_1)} + \frac{1-p}{1 + \frac{1}{\beta}(\sigma^2 (t_1 + t_2)^2 - i\mu (t_1 + t_2))} \right].\end{aligned}$$

显然 $\Phi_{X_{n-1}, X_n}(t_1, t_2) \neq \Phi_{X_{n-1}, X_n}(t_2, t_1)$, 因此该过程是时间不可逆的.

由 $X_n = I_n X_{n-1} + \varepsilon_n$ 可知, X_n 和 X_{n-k} 的协方差为

$$\text{Cov}(X_n, X_{n-k}) = (1-p) \text{Cov}(X_{n-1}, X_{n-k}) = (1-p)^k \text{Cov}(X_{n-k}, X_{n-k}).$$

因此自回归过程(3.1)的自相关函数为 $\rho(k) = (1-p)^k$, 注意到 $\rho(k)$ 总是正的, 故过程的变量之间总是正相关的.

最后, 我们考虑以Marshall-Olkin Laplace分布为边际分布的高阶自回归模型. Lawrence于1982年在[14]中定义了如下结构的 k 阶自回归模型

$$X_n = \begin{cases} \varepsilon_n, & p_0, \\ X_{n-1} + \varepsilon_n, & p_1, \\ X_{n-2} + \varepsilon_n, & p_2, \\ \dots & \dots \\ X_{n-k} + \varepsilon_n, & p_k, \end{cases} \quad (3.5)$$

其中 p_i 为概率, $\sum_{i=0}^k p_i = 1$, $0 < p_i < 1$, $i = 0, 1, 2, \dots, k$, $\{\varepsilon_n\}$ 是一列独立同分布的随机变量且和 $\{X_1, X_2, \dots, X_{n-1}\}$ 相互独立. 由(3.5)式得

$$\Phi_{X_n}(t) = p_0 \Phi_{\varepsilon_n}(t) + p_1 \Phi_{X_{n-1}}(t) \Phi_{\varepsilon_n}(t) + p_2 \Phi_{X_{n-2}}(t) \Phi_{\varepsilon_n}(t) + \dots + p_k \Phi_{X_{n-k}}(t) \Phi_{\varepsilon_n}(t).$$

若过程 $\{X_n, n \geq 1\}$ 是平稳的, 则有

$$\Phi_{\varepsilon}(t) = \frac{\Phi_X(t)}{p_0 + (1 - p_0) \Phi_X(t)}.$$

可见定理3.1中的结论对高阶的非对称Marshall-Olkin Laplace自回归过程也成立.

致谢 衷心感谢李效虎教授的关心和指导!

参 考 文 献

- [1] Kozubowski, T.J. and Podgorski, K., A class of asymmetric distributions, *Actuarial Res. Clear. House*, **1**(1999), 113–134.
- [2] Kozubowski, T.J. and Rachev, S.T., Univariate geometric stable laws, *J. Comput. Anal. Appl.*, **1**(1999), 177–217.
- [3] Kozubowski, T.J. and Podgorski, K., Asymmetric Laplace distributions, *Math. Sci.*, **25**(2000), 37–46.
- [4] Marshall, A.W. and Olkin, I., A new method for adding a parameter to a family of distributions with applications to the exponential and Weibull families, *Biometrika*, **84**(1997), 641–652.
- [5] Gaver, D.P. and Lewis P.A.W., First order autoregressive gamma sequence and point processes, *Adv. Appl. Prob.*, **12**(1980), 727–745.
- [6] Lawrance, A.J. and Lewis, P.A.W., A new autoregressive time series model in exponential variable (NEAR(1)), *Adv. Appl. Prob.*, **13**(1981), 826–845.
- [7] Lawrance, A.J. and Lewis, P.A.W., Modeling and residual analysis of nonlinear autoregressive time series in exponential variables, *J. R. Statist. Soc.*, **B47**(1985), 165–202.
- [8] Anderson, D.N. and Arnold, B.C., Linnik distribution and processes, *J. Appl. Prob.*, **30**(1993), 330–340.
- [9] Jayakumar, K. and Pillai, R.N., The first order autoregressive Mittag-Leffler process, *J. Appl. Prob.*, **30**(1993), 462–466.
- [10] Dewald, L. and Lewis, P.A.W., New Laplace second order autoregressive time series model–NLAR(2), *IEEE Trans. Inform. Theory*, **31**(1985), 645–651.
- [11] Seetha Lekshmi, V., Josy, J. and Jose, K.K., Generalized Laplace and geometric α -Laplacian distributions with application in time series modeling, *Statis. Method*, **5**(2)(2003), 140–155.
- [12] Seetha Lekshmi, V. and Jose, K.K., An autoregressive process with geometric α Laplace marginals, *Statis. Paper*, **45**(2004a), 337–350.
- [13] Seetha Lekshmi, V. and Jose, K.K., Autoregressive processes with Pakes and geometric Pakes generalized Linnik marginals, *Statis. Prob. Lett.*, **76**(2006), 318–326.

- [14] Lawrance, A.J. and Lewis, P.A.W., A mixed time series exponential model, *Management Science*, **28(9)**(1982), 1045–1053.

Asymmetric Marshall-Olkin Laplace Distribution and Its Application in Autoregressive Model

YAN RONGFANG

(College of Mathematics and Information Science, Northwest Normal University, Lanzhou, 730070)

ZHANG JUAN

(Department of Mathematics, Dingxi Teachers college, Dingxi, 743000)

In this paper, a new class of distributions, namely asymmetric Marshall-Olkin Laplace (AMOL) distribution, is introduced, some properties and numerical characteristics of AMOL are obtained, and a necessary and sufficient of autoregressive model with AMOL as marginal distribution is derived.

Keywords: Asymmetric Laplace distribution, autoregressive model, Laplace distribution, asymmetric Marshall-Olkin Laplace distribution.

AMS Subject Classification: 60E07.