应用概率统计　第二十六卷
第三期　2010年6月

Chinese Journal of Applied Probability
and Statistics Vol.26 No.3 Jun. 2010

平衡设计多向分类多元重复测量模型的Wilks检验 *

张　新　育

(郑州大学系统科学与数学系, 郑州, 450001)

摘　要

对平衡设计多向分类多元重复测量模型, 利用极大似然比方法, 推导了对各单个固定效应分别进行检验的Wilks型检验规则. 并推导了对多个固定效应进行同时检验的检验规则. 推导了非中心分布的参数与原始参数和样本容量的关系.

关键词: 多元重复测量模型, 多向分类, 平衡设计, 极大似然比检验.

学科分类号: O212.

§1. 引　　言

重复测量模型在医疗卫生, 生命科学, 流行病学和生物医学等研究领域有广泛的应用. 文献[1–4]研究了两个固定因素模型(其中一个因素为时间因素). 本文将研究一种很一般的模型, 即平衡设计多向分类多元重复测量模型. 这一模型可以设计任意多个因素和它们的组合效应. 检验的是这些组合效应的显著性. 也研究了若干个组合效应显著性的同时检验. 这类问题的出现场合很广泛. 例如: 为了研究n_1种减肥药和n_2种辅助疗法的疗效, 在肥胖人群总体中进行随机抽样. 在每种药和每种辅助疗法的组合下均设计n_4位受试者. 在开始和各疗程结束共n_3个时刻测试受试者体征参数向量$Y_{j_1j_2j_3j_4}$, $j_i=1,2,\cdots,n_i$, $i=1,2,3,4$. 在受试期间受试者不接受其它影响体征因素的作用, 保持治疗前的生活和行为习惯. 这批多维数据可以考虑用平衡设计多向分类多元重复测量模型来描述. 检验的是各固定效应的显著性.

本文将在§2中给出一般模型的统计假设和参数的可逆线性变换; 在§3中对模型固定效应进行可逆线性变换并对样本进行正交变换; 在§4中推导分段新样本的二次型矩阵及其分布; 在§5中推导了极大似然比检验规则并分析了检验功效. 本文模型也应满足所谓复合对称性, 可用[6] $\mathrm{P}_{310-324}$方法进行检验, 本文对此不做讨论.

§2. 模型的矩阵表示和统计假设

设试验设计因素为A_j, 水平为$A_{j1},\cdots,A_{jn_j}$, $j=1,2,\cdots,s$. 其中A_s为时间因素. 在每一个$A_1,\cdots,A_{s-1}$因素的水平组合$(A_{1j_1},\cdots,A_{(s-1)j_{s-1}})$上均设计$n_{s+1}$个来自同一总体的

*国家自然科学基金项目(10671183)资助.

本文2008年10月29日收到, 2009年4月30日收到修改稿.

独立的受试对象. 在每一个观测时间点A_{sj_s} $(j_s=1,\cdots,n_s)$上对每一受试对象独立观测一个r维目标向量$Y_{j_1j_2\cdots j_{s+1}}$, 则可用如下一般s因素(第$s+1$因素为随机因素)平衡设计r元重复测量模型来刻画, 即

$$\begin{aligned} Y &= \sum_{m=0}^{s}\sum_{\triangle(m)}(G_{\delta 1}\otimes G_{\delta 2}\otimes\cdots G_{\delta s}\otimes 1_{n_{s+1}})\alpha(\delta_1,\cdots,\delta_s) \\ &\quad +(I_{n_1}\otimes\cdots\otimes I_{n_{s-1}}\otimes 1_{n_s}\otimes I_{n_{s+1}})\beta+\varepsilon, \end{aligned} \tag{2.1}$$

其中$\triangle(m)=\{(\delta_1,\cdots,\delta_s)|\sum\limits_{j=1}^{s}\delta_j=m,\delta_j=0 \text{ or } 1, j=1,2,\cdots,s\}$, 记$\delta=(\delta_1,\cdots,\delta_s)$,

$$\delta_j=\begin{cases}1, & G_{\delta j}=I_{n_j},\\ 0, & G_{\delta j}=1_{n_j},\end{cases} \tag{2.2}$$

$\delta_j=1$是指A_j为$\alpha(\delta)$的因子, $\delta_j=0$是指A_j不是$\alpha(\delta)$的因子. Y为$n\times r$矩阵, $n=\prod\limits_{j=1}^{s+1}n_j$, $\alpha(\delta)$是$(\prod\limits_{j=1}^{s}n_j^{\delta j})\times r$阵, 是固定效应. 观测样本总体均值为$\alpha(0,0,\cdots,0)$. β是$(n/n_s)\times r$阵, 是随机效应. ε是$n\times r$阵, 是随机误差. 1_{n_j}为元素均为1的n_j维列向量, I_{n_j}为n_j阶单位阵. β, ε相互独立, 且

$$\beta\sim N_{(n/n_s)\times r}(O_{(n/n_s)\times r},(I_{n_1}\otimes\cdots\otimes I_{n_{s-1}}\otimes 1\otimes I_{n_{s+1}})\otimes\Sigma_\beta), \tag{2.3}$$
$$\varepsilon\sim N_{n\times r}(O_{n\times r}, I_n\otimes\Sigma_\varepsilon), \tag{2.4}$$

其中Σ_β, Σ_ε为r阶正定阵.

对任一$\delta\in\triangle(m)$, $m=1,2,\cdots,s$. 设$K(\delta)$为$(\delta_1,\cdots,\delta_s)$中取1的元素序号集, 对任一$k\in K(\delta)$, 设

$$H_{\delta j}=\begin{cases}1'_{n_j}, & \delta_j=1,\ j=k;\\ I_{n_j}, & \delta_j=1,\ j\neq k;\\ 1, & \delta_j=0.\end{cases} \tag{2.5}$$

(2.1)中$\alpha(\delta)$固定效应所受约束为

$$(H_{\delta 1}\otimes H_{\delta 2}\otimes\cdots H_{\delta s})\alpha(\delta)=0,\qquad k\in K(\delta). \tag{2.6}$$

(2.6)中共有$\sum\limits_{i=1}^{s}\delta_i=m$个式子. 设

$$L_{\delta j}=\begin{cases}Q^*_{n_j}, & \delta_j=1,\ j\in K(\delta);\\ 1, & \delta_j=0,\end{cases} \tag{2.7}$$

其中$Q^*_{n_j}$为Q_{n_j}的第2至n_j行构成的$(n_j-1)\times n_j$阵, Q_{n_j}为第一行为$1'_{n_j}/\sqrt{n_j}$的n_j阶正交阵. 矩阵方程组(2.6)的通解可表示为

$$\alpha(\delta)=(L'_{\delta 1}\otimes L'_{\delta 2}\otimes\cdots L'_{\delta s})\alpha^*(\delta), \tag{2.8}$$

其中$\alpha^*(\delta)$为$\big(\prod\limits_{j=1}^{s}(n_j-1)^{\delta_j}\big)\times r$自由阵. 将(2.8)两边均左乘$(L_{\delta 1}\otimes L_{\delta 2}\otimes\cdots L_{\delta s})$, 注意到

$$L_{\delta j}L'_{\delta j}=\begin{cases} I_{n_j-1}, & \delta_j=1,\ j\in K(\delta);\\ 1, & \delta_j=0,\end{cases}$$

知

$$\alpha^*(\delta)=(L_{\delta 1}\otimes L_{\delta 2}\otimes\cdots L_{\delta s})\alpha(\delta). \tag{2.9}$$

由(2.8), (2.9)知, $\alpha(\delta)$到$\alpha^*(\delta)$为可逆线性变换.

对模型(2.1)分别检验如下假设

$$H_0(\delta):(L_{\delta 1}\otimes L_{\delta 2}\otimes\cdots\otimes L_{\delta s})\alpha=0\leftrightarrow H_1(\delta):(L_{\delta 1}\otimes L_{\delta 2}\otimes\cdots\otimes L_{\delta s})\alpha\neq 0, \tag{2.10}$$

其中0为$\big(\prod\limits_{j=1}^{s}(n_j-1)^{\delta_j}\big)\times r$零阵, $\delta=(\delta_1,\cdots,\delta_s)\in\triangle(m)$, $m=1,2,\cdots,s$. 将(2.9)代入(2.10)得等价假设

$$H_0(\delta):\alpha^*(\delta)=0\leftrightarrow H_1(\delta):\alpha^*(\delta)\neq 0. \tag{2.11}$$

§3. 模型参数的变换与样本的变换

将(2.8)式代入(2.1)式得参数变换, 同时取样本的正交变换$Z=(Q_{n_1}\otimes Q_{n_2}\otimes\cdots Q_{n_{s+1}})Y$, 得如下结论.

定理 3.1 $Z\sim N_{n\times r}(E(Z),\Sigma)$, 其中

$$E(Z)=\sqrt{n_{s+1}}\sum_{m=0}^{s}\sum_{\triangle(m)}((Q_{n_1}G_{\delta 1}L'_{\delta 1})\otimes\cdots\otimes(Q_{n_s}G_{\delta s}L'_{\delta s})\otimes e_1(n_{s+1}))\alpha^*(\delta),$$

$$\Sigma=n_s(I_{n_1}\otimes\cdots\otimes I_{n_{s-1}}\otimes(e_1(n_s)e'_1(n_s))\otimes I_{n_{s+1}})\otimes\Sigma_\beta+I_n\otimes\Sigma_\varepsilon,$$

其中

$$Q_{n_j}G_{\delta j}L'_{\delta j}=\begin{cases}\begin{bmatrix}O_{1\times(n_j-1)}\\ I_{n_j-1}\end{bmatrix}, & \delta_j=1,\\ \sqrt{n_j}e_1(n_j), & \delta_j=0.\end{cases}$$

证明: Z的分布及$E(Z)$的表达式显然成立. 由(2.2), (2.7)关于$Q_{ij},G_{\delta j},L_{\delta j}$的定义知, 当$\delta_j=1,0$时, 分别有

$$\begin{aligned} Q_{n_j}G_{\delta j}L'_{\delta j} &= Q_{n_j}I_{nj}Q^{*\prime}_{n_j} = \begin{bmatrix} O_{1\times(n_j-1)} \\ I_{n_j-1} \end{bmatrix}, \\ Q_{n_j}G_{\delta j}L'_{\delta j} &= Q_{n_j}1_{n_j}1 = \sqrt{n_j}e_1(n_j). \end{aligned}$$

由(2.1), (2.3), (2.4)知

$$\begin{aligned} \Sigma &= n_s((Q_{n_1}\otimes\cdots\otimes Q_{n_{s-1}}\otimes e_1(n_s)\otimes Q_{n_{s+1}})(I_{n_1}\otimes\cdots\otimes I_{n_{s-1}}\otimes 1\otimes I_{n_{s+1}}) \\ &\quad \cdot(Q'_{n_1}\otimes\cdots\otimes Q'_{n_{s-1}}\otimes e'_1(n_s)\otimes Q'_{n_{s+1}}))\otimes\Sigma_\beta+(I_{n_1}\otimes\cdots\otimes I_{n_{s+1}})\otimes\Sigma_\varepsilon \\ &= n_s(I_{n_1}\otimes\cdots\otimes I_{n_{s-1}}\otimes(e_1(n_s)e'_1(n_s))\otimes I_{n_{s+1}})\otimes\Sigma_\beta+I_n\otimes\Sigma_\varepsilon. \qquad\Box \end{aligned}$$

推论 3.1 样本Z的各行相互独立, 且Z中$(I_{n_1}\otimes\cdots\otimes I_{n_{s-1}}\otimes(e_1(n_s)e'_1(n_s))\otimes(I_{n_{s+1}}))Z$的非零行的协方差阵均为$n_s\Sigma_\beta+\Sigma_\varepsilon$, 共$b_0=n/n_s$行. Z的其余行的协方差阵均为Σ_ε, 共$a_0=n-b_0$行, $b_0=n_1\cdots n_{s-1}n_{s+1}$, $a_0=n_1\cdots n_{s-1}(n_s-1)n_{s+1}$.

§4. 分段样本的分布及其二次型的分布

4.1 Z样本的分段样本的分布

在$E(Z)$中对应$((Q_{n1}G_{\delta1}L'_{\delta1})\otimes\cdots\otimes(Q_{ns}G_{\delta s}L'_{\delta s})\otimes e_1(n_{s+1}))\alpha^*(\delta_1,\cdots,\delta_s)$, $\delta_s=0,1$的非零(即线性无关)行向量的Z的行按顺序排在一起, 分别记作$Z(\alpha^*(\delta_1,\cdots,\delta_{s-1},0))$和$Z(\alpha^*(\delta_1,\cdots,\delta_{s-1},1))$. Z中以$n_s\Sigma_\beta+\Sigma_\varepsilon$为协方差阵的行去掉各$Z(\alpha^*(\delta_1,\cdots,\delta_{s-1},0))$的行排在一起, 记作$Z(\beta)$, Z中以Σ_ε为协方差阵的行去掉各$Z(\alpha^*(\delta_1,\cdots,\delta_{s-1},1))$的行排在一起, 记作$Z(\varepsilon)$.

定理 4.1 对$Z(\alpha(\delta_1,\cdots,\delta_s))$, $Z(\beta)$, $Z(\varepsilon)$有

$$\begin{aligned} Z(\alpha^*(\delta)) &= \Big(\prod_{j=1}^s n_j^{1-\delta_j}\Big)^{-1/2}((Q_{n1}G_{i1}L'_{i1})\otimes\cdots\otimes(Q_{ns}G_{is}L'_{is})\otimes e_1(n_{s+1}))'Z \\ &\sim \begin{cases} N\Big(\Big(\prod_{j=1}^s n_j^{1-\delta_j}\Big)^{1/2}\sqrt{n_{s+1}}\alpha^*(\delta_1,\cdots,\delta_{s-1},1), I_{\prod_{j=1}^s (n_j-1)^{\delta_j}}\otimes\Sigma_\varepsilon\Big), \\ \qquad\qquad\qquad \delta_s=1, \\ N\Big(\Big(\prod_{j=1}^s n_j^{1-\delta_j}\Big)^{1/2}\sqrt{n_{s+1}}\alpha^*(\delta_1,\cdots,\delta_{s-1},0), I_{\prod_{j=1}^s (n_j-1)^{\delta_j}}\otimes(n_s\Sigma_\beta+\Sigma_\varepsilon)\Big), \\ \qquad\qquad\qquad \delta_s=0, \end{cases} \end{aligned}$$

$$Z(\beta)\sim N(0_{b\times r},I_b\otimes(n_s\Sigma_\beta+\Sigma_\varepsilon)),\qquad Z(\varepsilon)\sim N(0_{a\times r},I_a\otimes\Sigma_\varepsilon).$$

且各$Z(\alpha^*(\delta))$, $Z(\beta)$, $Z(\varepsilon)$相互独立. 其中

$$a = n_1 \cdots n_{s-1}(n_s-1)(n_{s+1}-1), \qquad b = n_1 \cdots n_{s-1}(n_{s+1}-1),$$

即$a=(n_s-1)b$.

证明: $Z(\alpha^*(\delta))$显然服从矩阵正态分布. 由定理3.1知,

$$\begin{aligned}
E(Z(\alpha^*(\delta))) &= \Big(\prod_{j=1}^{s} n_j^{1-\delta_j}\Big)^{-1/2}((Q_{n1}G_{\delta 1}L'_{\delta 1})\otimes\cdots\otimes(Q_{ns}G_{\delta s}L'_{\delta s})\otimes e_1(n_{s+1}))'E(Z)\\
&= \sqrt{n_{s+1}}\Big(\prod_{j=1}^{s} n_j^{1-\delta_j}\Big)^{-1/2}(((Q_{n1}G_{\delta 1}L_{\delta 1})'(Q_{n1}G_{\delta 1}L_{\delta 1}))\\
&\quad \otimes((Q_{ns}G_{\delta s}L_{\delta s})'(Q_{ns}G_{\delta s}L_{\delta s}))\otimes(e'_1(n_{s+1})e_1(n_{s+1})))\alpha^*(\delta)\\
&= \sqrt{n_{s+1}}\Big(\prod_{j=1}^{s} n_j^{1-\delta_j}\Big)^{1/2}\alpha^*(\delta_1,\cdots,\delta_s).
\end{aligned}$$

$Z(\alpha^*(\delta))$的协方差阵为

$$\begin{aligned}
&\Big(\prod_{j=1}^{s} n_j^{1-\delta_j}\Big)^{-1}[(Q_{n1}G_{\delta 1}L'_{\delta 1})\otimes\cdots\otimes(Q_{ns}G_{\delta s}L'_{\delta s})\otimes e_1(n_{s+1})\otimes I_r]'\\
&[n_s(I_{n_1}\otimes\cdots\otimes I_{n_{s-1}}\otimes(e_1(n_s)e'_1(n_s))\otimes I_{n_{s+1}})\otimes\Sigma_\beta + I_{n_1}\otimes I_{n_2}\cdots\otimes I_{n_s+1}\otimes\Sigma_\varepsilon]\\
&[(Q_{n1}G_{\delta 1}L'_{\delta 1})\otimes\cdots\otimes(Q_{ns}G_{\delta s}L'_{\delta s})\otimes e_1(n_{s+1})\otimes I_r]\\
=&\begin{cases} I_{\prod_{j=1}^{s}(n_j-1)^{\delta_j}}\otimes\Sigma_\varepsilon, & \delta_s=1,\\ I_{\prod_{j=1}^{s}(n_j-1)^{\delta_j}}\otimes(n_s\Sigma_\beta+\Sigma_\varepsilon), & \delta_s=0.\end{cases}
\end{aligned}$$

由定理3.1知, 各$Z(\alpha^*(\delta))$, $Z(\beta)$, $Z(\varepsilon)$分布正确且相互独立. 由推论3.1知, 其中

$$\begin{aligned}
a &= a_0 - \sum_{m=0}^{s}\sum_{\triangle(m)}\prod_{j=1}^{s}(n_j-1)^{\delta_j}(\delta_s=1)\\
&= n_1\cdots n_{s-1}(n_s-1)n_{s+1} - n_1\cdots n_{s-1}(n_s-1)\\
&= n_1\cdots n_{s-1}(n_s-1)(n_{s+1}-1),\\
b &= b_0 - \sum_{m=0}^{s}\sum_{\triangle(m)}\prod_{j=1}^{s}(n_j-1)^{\delta_j}(\delta_s=0)\\
&= n_1\cdots n_{s-1}n_{s+1} - n_1\cdots n_{s-1}\\
&= n_1\cdots n_{s-1}(n_{s+1}-1). \qquad \square
\end{aligned}$$

4.2 Z样本的分段二次型及其分布

定理 4.2 定理4.1中的记号下

(1) $Z'(\alpha^*(\delta))Z(\alpha^*(\delta)) = Z'(U_{\delta 1}\otimes\cdots\otimes U_{\delta(s+1)})Z = Y'(V_{\delta 1}\otimes\cdots\otimes V_{\delta(s+1)})Y$. 其中

$$U_{\delta j} = \begin{cases} I_{n_j} - e_1(n_j)e_1'(n_j), & \delta_j = 1; \\ e_1(n_j)e_1'(n_j), & \delta_j = 0 \ \text{ or } \ j = s+1. \end{cases}$$

$$V_{\delta j} = \begin{cases} I_{n_j} - \dfrac{1}{n_j}1_{n_j}1_{n_j}', & \delta_j = 1; \\ \dfrac{1}{n_j}1_{n_j}1_{n_j}', & \delta_j = 0 \ \text{ or } \ j = s+1. \end{cases}$$

$j = 1, 2, \cdots, s+1$.

(2)
$$\begin{aligned} Z'(\beta)Z(\beta) &= Z'[I_{n_1}\otimes\cdots\otimes I_{n_{s-1}}\otimes(e_1(n_s)e_1'(n_s))\otimes I_{n_{s+1}}]Z \\ &\quad - \sum_{m=0}^{s}\sum_{\triangle(m)} Z'(\alpha^*(\delta_1,\cdots,\delta_{s-1},0))Z(\alpha^*(\delta_1,\cdots,\delta_{s-1},0)) \\ &= Y'[I_{n_1}\otimes\cdots\otimes I_{n_{s-1}}\otimes\Big(\frac{1}{n_s}L_{n_s}L_{n_s}'\Big)\otimes I_{n_{s+1}}]Y \\ &\quad - \sum_{m=0}^{s}\sum_{\triangle(m)} Y'(V_{\delta_1}\otimes\cdots\otimes V_\delta(s+1))Y. \end{aligned}$$

(3) $Z'(\varepsilon)Z(\varepsilon) = Z'Z - \sum\limits_{m=0}^{s}\sum\limits_{\triangle(m)} Z'(\alpha^*(\delta_1,\cdots,\delta_s))Z(\alpha^*(\delta_1,\cdots,\delta_s)) - Z'(\beta)Z(\beta)$.

证 明: (1) $Z'(\alpha^*(\delta_1,\cdots,\delta_s))\,Z(\alpha^*(\delta_1,\cdots,\delta_s)) = \Big(\prod\limits_{j=1}^{s} n_j^{1-\delta_j}\Big)^{-1} Z'\,[(Q_{n1}G_{\delta 1}L_{\delta 1}')$ $(L_{\delta 1}G_{\delta 1}'Q_{n1}')\otimes\cdots\otimes(Q_{ns}G_{\delta s}L_{\delta s}')(L_{\delta s}G_{\delta s}'Q_{ns}')\otimes e_1(n_{s+1})e_1'(n_{s+1})]Z$, 由定理3.1知,

$$(Q_{nj}G_{\delta j}L_{\delta j}')(L_{\delta j}G_{\delta j}'Q_{nj}') = \begin{cases} I_{n_j} - e_1(n_j)e_1'(n_j), & \delta_j = 1; \\ n_j e_1(n_j)e_1'(n_j), & \delta_j = 0, \end{cases}$$

所以,

$$\begin{aligned} Z'(\alpha(\delta_1,\cdots,\delta_s))Z(\alpha(\delta_1,\cdots,\delta_s)) &= Z'(U_{\delta 1}\otimes\cdots\otimes U_{\delta(s+1)})Z \\ &= Y'[(Q_{n_1}'U_{\delta_1}Q_{n1})\otimes\cdots\otimes(Q_{n_{s+1}}'U_{\delta_{(s+1)}}Q_{n_{s+1}})]Y \\ &= Y'(V_{\delta 1}\otimes\cdots\otimes V_{\delta(s+1)})Y. \end{aligned}$$

$U_{\delta j}$, $V_{\delta j}$含义同定理中所述.

同样方法可证(2)式, (3)式显然. □

定理 4.3 在定理4.1, 4.2记号含义之下, 有

(1) $Z'(\alpha^*(\delta_1,\cdots,\delta_s)\,Z(\alpha^*(\delta_1,\cdots,\delta_s)) \sim W\big(r, \prod\limits_{j=1}^{s}(n_j-1)^{\delta_j}, \Sigma(\delta), \big(n_{s+1}\prod\limits_{j=1}^{s}n_j^{1-\delta_j}\big)$ $\alpha^{*\prime}(\delta_1,\cdots,\delta_s)\alpha^*(\delta_1,\cdots,\delta_s)\big)$ (非中心Wishart分布). 其中$\delta_s = 1$时, $\Sigma(\delta) = \Sigma_\varepsilon$; $\delta_s = 0$时, $\Sigma(\delta) = n_s\Sigma_\beta + \Sigma_\varepsilon$.

(2) $Z'(\beta)Z(\beta)\sim W(r,b,n_s\Sigma_\beta+\Sigma_\varepsilon)$.

(3) $Z'(\varepsilon)Z(\varepsilon)\sim W(r,a,\Sigma_\varepsilon)$. 无论固定效应如何变化, (2)(3)一定为中心Wishart分布.

(4) (1)(2)(3)中所述Z样本的二次型阵无论固定效应如何变化均独立.

由定理4.1知定理4.3成立.

§5. 极大似然比检验规则的推导与功效分析

5.1 单个效应的检验($\delta_s=1$情况, 即含有时间因子)

当$\delta_s=1$时, 对$H_0(\delta):\alpha^*(\delta)=0\leftrightarrow H_1(\delta):\alpha^*(\delta)\neq 0$, 此处0为与$\alpha^*(\delta_1,\cdots,\delta_{s-1},1)$同形零阵, 下同, 若将$n_s\Sigma_\beta+\Sigma_\varepsilon$和$\Sigma_\varepsilon$看作两个独立变化的正定阵, 则极大似然比为

$$LR=\frac{\sup\limits_{H_1\cup H_0} f(Z)}{\sup\limits_{H_0} f(Z)}\propto [T(H_0(\delta))]^{-a_0/2}, \tag{5.1}$$

$$T(H_0(\delta))=\frac{|Z'(\varepsilon)Z(\varepsilon)|}{|Z'(\varepsilon)Z(\varepsilon)+Z'(\alpha^*(\delta))Z(\alpha^*(\delta))|}, \tag{5.2}$$

LR为$T(H_0(\delta_1,\cdots,\delta_s))$的单调减函数.

定理 5.1 当$\delta_s=1$时, 若将$n_s\Sigma_\beta+\Sigma_\varepsilon$和$\Sigma_\varepsilon$看作两个独立变化的正定阵, 则

(i) 利用等效样本Z检验$H_0(\delta)$的极大似然比为(5.1).

(ii) (5.2)式中, 当$H_1(\delta)$成立时, $T(H_0(\delta))\sim\Lambda\big(r,a,\prod\limits_{j=1}^{s}(n_j-1)^{\delta_j},\big(n_{s+1}\prod\limits_{j=1}^{s}n_j^{1-\delta_j}\big)\Sigma_\varepsilon^{-1}\alpha^{*\prime}(\delta)\alpha^*(\delta)\big)$ (非中心Wilks分布), 当$H_0(\delta)$成立时, $T(H_0(\delta))\sim\Lambda\big(r,a,\prod\limits_{j=1}^{s}(n_j-1)^{\delta_j}\big)$ (中心Wilks分布).

(iii) $H_0(\delta)$的检验水平为p的拒绝域为

$$\Big\{T(H_0(\delta))\leq\Lambda_p\Big(r,a,\prod_{j=1}^{s}(n_j-1)^{\delta_j}\Big)\Big\}, \tag{5.3}$$

$\Lambda_p\big(r,a,\prod\limits_{j=1}^{s}(n_j-1)^{\delta_j}\big)$为Wilks分布的下侧$p$分位数, 可由[5] $P_{413-444}$查得.

证明: (i)已证, 由定理4.3可知(ii)成立, 由(i), (ii)知(iii)成立. □

5.2 单个效应的检验($\delta_s=0$情况)

当$\delta_s=0$时, 即对不含时间因子的固定效应的检验$H_0(\delta):\alpha^*(\delta)=0\leftrightarrow H_1(\delta):\alpha^*(\delta)\neq 0$,

若将$n_s\Sigma_\beta+\Sigma_\varepsilon$和$\Sigma_\varepsilon$看作两个独立变化的正定阵, 则极大似然比为

$$LR=\frac{\sup\limits_{H_1\cup H_0} f(Z)}{\sup\limits_{H_0} f(Z)}\propto[T(H_0(\delta))]^{-b_0/2}, \tag{5.4}$$

$$T(H_0(\delta))=\frac{|Z'(\beta)Z(\beta)|}{|Z'(\beta)Z(\beta)+Z'(\alpha^*(\delta))Z(\alpha^*(\delta))|}, \tag{5.5}$$

LR为$T(H_0(\delta_1,\cdots,\delta_s))$的单调减函数.

定理 5.2 当$\delta_s=0$时,

(i) $T(H_0(\delta))\sim\Lambda\big(r,b,\prod\limits_{j=1}^{s}(n_j-1)^{\delta_j},n_{s+1}\prod\limits_{j=1}^{s}n_j^{1-\delta_j}(n_s\Sigma_\beta+\Sigma_\varepsilon)^{-1}\alpha^{*\prime}(\delta)\alpha^*(\delta)\big)$ (非中心Wilks分布); 当$H_0(\delta)$成立时, $T(H_0(\delta))\sim\Lambda\big(r,b,\prod\limits_{j=1}^{s}(n_j-1)^{\delta_j}\big)$.

(ii) $H_0(\delta)$的检验水平为p的拒绝域为

$$\Big\{T(H_0(\delta))\le\Lambda_p\Big(r,b,\prod_{j=1}^{s}(n_j-1)^{\delta_j}\Big)\Big\}. \tag{5.6}$$

此定理的证明与定理5.1同.

5.3 多个$H_0(\delta)$同时成立的检验(均为$\delta_s=1$情况, 即均含有时间因子)

定理 5.3 对$\bigcap\limits_{\triangle^*}H_0(\delta)\leftrightarrow\bigcup\limits_{\triangle^*}H_1(\delta)$, $\triangle^*$为$\sum\limits_{m=1}^{s}\triangle(m)$的子集, 且其中$\delta$的$\delta_s$均为1, 若将$n_s\Sigma_\beta+\Sigma_\varepsilon$和$\Sigma_\varepsilon$看作两个独立变化的正定阵, 则有如下结论成立:

(i) 检验的极大似然比为

$$LR\propto\Big[T\Big(\bigcap_{\triangle^*}H_0(\delta)\Big)\Big]^{-a_0/2}, \tag{5.7}$$

其中

$$T\Big(\bigcap_{\triangle^*}H_0(\delta)\Big)=\frac{|Z'(\varepsilon)Z(\varepsilon)|}{\Big|Z'(\varepsilon)Z(\varepsilon)+\sum\limits_{\triangle^*}Z'(\alpha^*(\delta))Z(\alpha^*(\delta))\Big|}. \tag{5.8}$$

(ii) $T\big(\bigcap\limits_{\triangle^*}H_0(\delta)\big)\sim\Lambda\big(r,a,\sum\limits_{\triangle^*}\prod\limits_{j=1}^{s}(n_j-1)^{\delta_j},\Sigma_\varepsilon^{-1}\sum\limits_{\triangle^*}\big(n_{s+1}\prod\limits_{j=1}^{s}n_j^{1-\delta_j}\big)\alpha^{*\prime}(\delta)\alpha^*(\delta)\big)$, 当$\bigcap\limits_{\triangle^*}H_0(\delta)$成立时, $T\big(\bigcap\limits_{\triangle^*}H_0(\delta)\big)\sim\Lambda\big(r,a,\sum\limits_{\triangle^*}\prod\limits_{j=1}^{s}(n_j-1)^{\delta_j}\big)$. a同定理4.1.

(iii) $\bigcap\limits_{\triangle^*}H_0(\delta)$的检验水平为$p$的拒绝域为

$$\Big\{T\big(\bigcap_{\triangle^*}H_0(\delta)\big)\le\Lambda_p\Big(r,a,\sum_{\triangle^*}\prod_{j=1}^{s}(n_j-1)^{\delta_j}\Big)\Big\}. \tag{5.9}$$

与定理5.1类似, 由定理4.3可知(i), (ii)成立, 由(i), (ii)可知(iii)成立.

5.4 多个$H_0(\delta)$同时成立的检验(均为$\delta_s=0$情况)

对多个均不含时间因子的固定效应显著性的同时检验有如下结果.

定理 5.4 对$\bigcap\limits_{\triangle^*} H_0(\delta) \leftrightarrow \bigcup\limits_{\triangle^*} H_1(\delta)$, $\triangle^*$为$\sum\limits_{m=1}^{s}\triangle(m)$的子集, 且其中$\delta$的$\delta_s$均为0, 若将$n_s\Sigma_\beta+\Sigma_\varepsilon$和$\Sigma_\varepsilon$看作两个独立变化的正定阵, 则有如下结论成立:

(i) 检验的极大似然比为

$$LR \propto \Big[T\Big(\bigcap_{\triangle^*} H_0(\delta)\Big)\Big]^{-b_0/2}, \tag{5.10}$$

其中

$$T\Big(\bigcap_{\triangle^*} H_0(\delta)\Big) = \frac{|Z'(\beta)Z(\beta)|}{\Big|Z'(\beta)Z(\beta)+\sum\limits_{\triangle^*} Z'(\alpha^*(\delta))Z(\alpha^*(\delta))\Big|}. \tag{5.11}$$

(ii) $T(\bigcap\limits_{\triangle^*} H_0(\delta)) \sim \Lambda\big(r,b,\sum\limits_{\triangle^*}\prod\limits_{j=1}^{s}(n_j-1)^{\delta_j},(n_s\Sigma_\beta+\Sigma_\varepsilon)^{-1}\sum\limits_{\triangle^*}\big(n_{s+1}\prod\limits_{j=1}^{s}n_j^{1-\delta_j}\big)\alpha^{*\prime}(\delta)$ $\alpha^*(\delta)\big)$; 当$\bigcap\limits_{\triangle^*} H_0(\delta)$成立时, $T(\bigcap\limits_{\triangle^*} H_0(\delta)) \sim \Lambda\big(r,b,\sum\limits_{\triangle^*}\prod\limits_{j=1}^{s}(n_j-1)^{\delta_j}\big)$.

(iii) $\bigcap\limits_{\triangle^*} H_0(\delta)$的检验水平为$p$的拒绝域为

$$\Big\{T\Big(\bigcap_{\triangle^*} H_0(\delta)\Big) \le \Lambda_p\Big(r,b,\sum_{\triangle^*}\prod_{j=1}^{s}(n_j-1)^{\delta_j}\Big)\Big\}. \tag{5.12}$$

与定理5.2类似可证.

5.5 多个$H_0(\delta)$同时成立的检验($\delta_s=1$, $\delta_s=0$同时出现)

此情况待检假设中既有含时间因子的固定效应也有不含时间因子的固定效应.

定理 5.5 对$\bigcap\limits_{\triangle^*} H_0(\delta) \leftrightarrow \bigcup\limits_{\triangle^*} H_1(\delta)$, $\triangle^*=\triangle_1+\triangle_2$, $\triangle_1,\triangle_2\subset\sum\limits_{m=1}^{s}\triangle(m)$, 且$\triangle_1$中元素$\delta$的$\delta_s=1$, $\triangle_2$中元素δ的$\delta_s=0$, 若将$n_s\Sigma_\beta+\Sigma_\varepsilon$和$\Sigma_\varepsilon$看作两个独立变化的正定阵, 则有如下结论成立:

(i) 检验的极大似然比为

$$LR \propto (T)^{-n_{s+1}/(n_{s+1}-1)}, \tag{5.13}$$

$$T = T\Big(\bigcap_{\triangle_1} H_0(\delta)\Big)^{-a/2}\Big(T\Big(\bigcap_{\triangle_2} H_0(\delta)\Big)\Big)^{-b/2}, \tag{5.14}$$

$$T\Big(\bigcap_{\triangle_1} H_0(\delta)\Big) = \frac{|Z'(\varepsilon)Z(\varepsilon)|}{\Big|Z'(\varepsilon)Z(\varepsilon)+\sum\limits_{\triangle_1} Z'(\alpha^*(\delta))Z(\alpha^*(\delta))\Big|}, \tag{5.15}$$

$$T\Big(\bigcap_{\triangle_2} H_0(\delta)\Big) = \frac{|Z'(\beta)Z(\beta)|}{\Big|Z'(\beta)Z(\beta)+\sum\limits_{\triangle_2} Z'(\alpha^*(\delta))Z(\alpha^*(\delta))\Big|}. \tag{5.16}$$

(ii) $$T\big(\bigcap_{\triangle_1} H_0(\delta)\big) \sim \Lambda\big(r, a, a_1, \sum_{\triangle_1} n_{s+1} \prod_{j=1}^{s} n_j^{1-\delta_j} \Sigma_\varepsilon^{-1} \alpha^{*\prime}(\delta)\alpha^*(\delta)\big);$$
$$T\big(\bigcap_{\triangle_2} H_0(\delta)\big) \sim \Lambda\big(r, b, b_1, \sum_{\triangle_2} \big(n_{s+1} \prod_{j=1}^{s} n_j^{1-\delta_j} (n_s\Sigma_\beta + \Sigma_\varepsilon)^{-1}\big)\alpha^{*\prime}(\delta)\alpha^*(\delta)\big),$$

且两者相互独立. 其中$a_1 = \sum_{\triangle_1} \prod_{j=1}^{s} (n_j-1)^{\delta_j}$, $b_1 = \sum_{\triangle_2} \prod_{j=1}^{s} (n_j-1)^{\delta_j}$. 当$\bigcap_{\triangle^*} H_0(\delta)$成立时, $T\big(\bigcap_{\triangle_1} H_0(\delta)\big) \sim \Lambda(r, a, a_1)$, $T\big(\bigcap_{\triangle_2} H_0(\delta)\big) \sim \Lambda(r, b, b_1)$.

(iii) 若取
$$\rho = 1 + \frac{a_1(a_1-r-1) + b_1(b_1-r-1)(n_s-1)}{2b(a_1+b_1)(n_s-1)},$$
则对任意$x \in R$有
$$\mathsf{P}\{2\rho \ln T \geq x\} = \mathsf{P}\{\chi^2((a_1+b_1)r) \geq x\} + O(b^{-2}). \tag{5.17}$$

(iv) $\bigcap_{\triangle^*} H_0(\delta)$的检验水平为$p$的近似拒绝域为
$$\{2\rho \ln T \geq \chi_p^2((a_1+b_1)r)\}. \tag{5.18}$$

证明: (i) 若将$n_s\Sigma_\beta + \Sigma_\varepsilon$和$\Sigma_\varepsilon$看作两个独立变化的正定阵, 由定理4.1知$\bigcap_{\triangle^*} H_0(\delta)$的极大似然比为
$$LR \propto T\Big(\bigcap_{\triangle_1} H_0(\delta)\Big)^{-a_0/2} T\Big(\bigcap_{\triangle_2} H_0(\delta)\Big)^{-b_0/2}, \tag{5.19}$$
注意到
$$a_0 = \frac{n_{s+1}}{n_{s+1}-1} a, \qquad b_0 = \frac{n_{s+1}}{n_{s+1}-1} b.$$
故(5.13)-(5.16)成立.

(ii) 由定理5.2, 5.3和4.1知, (ii)成立.

(iii) $2\rho \ln T = \big[-2a\rho \ln T\big(\bigcap_{\triangle_1} H_0(\delta)\big)\big] + \big[-2b\rho \ln T\big(\bigcap_{\triangle_2} H_0(\delta)\big)\big]$, 设此式中从左到右三项的特征函数依次为$\phi(t), \phi_1(t), \phi_2(t)$, 其对数依次为$\Phi(t), \Phi_1(t), \Phi_2(t)$, 由$T\big(\bigcap_{\triangle_1} H_0(\delta)\big)$与$T\big(\bigcap_{\triangle_2} H_0(\delta)\big)$独立可知
$$\Phi(t) = \Phi_1(t) + \Phi_2(t), \tag{5.20}$$
由[6] P_{84}知$\Phi_1(t) = g_1(t) - g_1(0)$, $\Phi_2(t) = g_2(t) - g_2(0)$,
$$g_1(t) = -\frac{a_1 r}{2} \ln \frac{a\rho(1-2it)}{2} + a^{-1}\omega_{11}(1-2it)^{-1} + O(a^{-2}),$$
$$g_2(t) = -\frac{b_1 r}{2} \ln \frac{b\rho(1-2it)}{2} + b^{-1}\omega_{21}(1-2it)^{-1} + O(b^{-2}),$$

$$\omega_{11} = \frac{a_1 r}{4}[-a_1 + r + 1 - 2a(1-\rho)],$$
$$\omega_{21} = \frac{b_1 r}{4}[-b_1 + r + 1 - 2b(1-\rho)],$$

ρ待定. 代入(5.20)并注意到$a = (n_s - 1)b$, $O(a^{-2}) + O(b^{-2})$仍为$O(b^{-2})$,

$$\Phi(t) = -\frac{(a_1+b_1)r}{2}\ln(1-2it) + (a^{-1}\omega_{11} + b^{-1}\omega_{21})(1-2it)^{-1} + O(b^{-2}).$$

为提高精度, 令$a^{-1}\omega_{11} + b^{-1}\omega_{21} = 0$, 并注意到$a = (n_s - 1)b$, 可解得$\rho$值同(iii)中所示, 且有当$a, b \to \infty$时, $\rho \to 1$,

$$a(1-\rho) = \frac{a_1(a_1 - r - 1) + b_1(b_1 - r - 1)(n_s - 1)}{2(a_1 + b_1)},$$
$$b(1-\rho) = \frac{a_1(a_1 - r - 1) + b_1(b_1 - r - 1)(n_s - 1)}{2(a_1 + b_1)(n_s - 1)},$$

即$a(1-\rho)$, $b(1-\rho)$是常数(与a, b无关). 由[6] P_{84}关于ω_{1j}, ω_{2j}的定义可知$\Phi(t)$的余项为$O(b^{-2})$, 即

$$\Phi(t) = -\frac{(a_1+b_1)r}{2}\ln(1-2it) + O(b^{-2}),$$
$$\phi(t) = (1-2it)^{-(a_1+b_1)r/2}(1 + O(b^{-2})).$$

由此可知当ρ取(iii)中所述的值时, 有

$$\mathsf{P}\{2\rho\ln T \geq x\} = \mathsf{P}\{\chi^2((a_1+b_1)r) \geq x\} + O(b^{-2}), \qquad x \in R.$$

(iv) 由(iii)知(iv)成立. □

5.6 关于检验功效的说明

从定理5.1-5.4知5.1-5.4中检验统计量的分布在原假设不成立时均为非中心Wilks分布. 这类检验规则是一种经典的结果. 其检验功效取决于这一经典分布的非中心参数和自由度. 这些已由定理5.1-5.4给出, 与原始固定效应的关系如下.

定理 5.6 $\alpha^{*\prime}(\delta)\alpha^*(\delta) = \alpha'(\delta)[(L'_{\delta 1}L_{\delta 1}) \otimes \cdots \otimes (L'_{\delta s}L_{\delta s})]\alpha(\delta)$, 其中

$$L'_{\delta j}L_{\delta j} = \begin{cases} I_{n_j} - \dfrac{1}{n_j} I_{n_j} I'_{n_j}, & \delta_j = 1; \\ 1, & \delta_j = 0. \end{cases}$$

证明: 由(2.9)(2.7)两式知定理5.6成立. □

4.5节中的检验统计量与[4]中P_{547} (3.5)式类似, 其中的$-2\rho\ln\lambda$相当于本文的$2\rho\ln T$. 式中的$n, n(p-1)$相当于本文的b, a, 其中非中心参数Ω_2相当于$\sum\limits_{\triangle_1} n_{s+1}\prod\limits_{j=1}^{s} n_j^{1-\delta_j}\Sigma_\varepsilon^{-1}\alpha^{*\prime}(\delta)$

$\alpha^*(\delta)$, Ω_1相当于$\sum\limits_{\triangle_2}\big(n_{s+1}\prod\limits_{j=1}^{s}n_j^{1-\delta_j}(n_s\Sigma_\beta+\Sigma_\varepsilon)^{-1}\big)\alpha^{*\prime}(\delta)\alpha^*(\delta)$. 从[4]中$\mathrm{P}_{551-553}$的功效分析可知这一检验有较好的检验功效, 本文推导了关于固定效应的所有可能的显著性检验. 模型(2.1)是全部效应均出现的情况, 对于只出现部分效应的模型, 设固定效应足码集为Δ', 则只须将本文中的$\Delta(m)$改为$\Delta(m)\cap\Delta'$即可将计算公式和检验规则推广到这种更一般的模型, 限于篇幅, 不再详述.

参 考 文 献

[1] Al-Mouel, A.-H.S. and Wang, J.L., One-way multivariate repeated measurements analysis of variance model, *Appl. Math. J. Chinese Univ. Ser. B*, **19(4)**(2004), 435–448.

[2] 候紫燕, 廖靖宇, 重复测量试验模型参数似然比检验及其功效分析, 应用概率统计, **23(1)**(2007), 68–76.

[3] 邓文丽, 重复测量中两组均值是否相等的假设检验, 应用概率统计, **19(2)**(2003), 198–202.

[4] 候紫燕, 原新风, 一类多元重复测量模型参数的似然比检验及其功效分析, 系统科学与数学, **27(4)**(2007), 544–554.

[5] 张尧庭, 方开泰, 多元统计分析引论, 科学出版社, 1983.

[6] 王静龙, 多元统计分析, 科学出版社, 2008.

Wilks Test Rule of Multivariate Repeated Survey Model in Equilibrium Design and Multiple-Way Classification

Zhang Xinyu

(*Department of Mathematics, Zhengzhou University, Zhengzhou, 450001*)

By use of maximum likelihood ratio means, we present in this paper a Wilks test rule of each fixed effects in the equilibrium design and multiple-way classification model with repeated survey; then deduce a means to test each fixed effects simultaneously. At last, we deduce the function relation between non-central parameter and original parameter to reflected efficiency of this test rule.

Keywords: Multiple repeated survey model, multidimensional allocation, equilibrium design, maximum likelihood ratio test.

AMS Subject Classification: 62H10, 62H15.