应用概率统计 第二十六卷
第五期 2010年10月

Chinese Journal of Applied Probability
and Statistics Vol.26 No.5 Oct. 2010

局部次指数分布的一类卷积封闭性的等价条件及应用 *

于长俊 王岳宝

(苏州大学数学科学学院, 苏州, 215006)

摘 要

给出了支撑在$[0,\infty)$的局部次指数分布的一类卷积封闭性的若干等价条件, 并在适当的条件下推广到了全空间. 在此基础上, 得到了对称化分布的局部渐近性的结果. 上述结果可以蕴涵Embrechts和Goldie (1980)[1]及Geluk (2004)[2]非局部的相应结果, 其中部分证明比[2]简单.

关键词: 局部次指数分布, 卷积封闭性, 对称化.

学科分类号: O211.

§1. 引言和主要结论

周知, 次指数分布是分布理论的主要研究对象之一, 它在风险理论, 排队系统, 分支过程等领域有重要而广泛的应用, 因而引起人们的高度重视, 这方面的系统介绍可以参见Embrechts等(1997)[3]等. Asmussen等(2003)[4]又引入了局部次指数分布族的概念, 并系统讨论了它们的性质, 给出了它们的一系列应用. Wang等(2005)[5], Wang等(2007)[6]等对次指数分布族和局部次指数分布族进行了深入探讨, 给出了它们的卷积和卷积根的封闭性的一系列等价条件. 然而, 在这方面仍然存在一些有趣的问题有待讨论. 本文将给出局部次指数分布族的一类卷积封闭性的新的等价条件, 在此基础上, 得到了对称化分布的局部渐近性结果. 它们可以蕴涵[1]及[2]非局部的相应结果. 为了说明本文的动机和结果, 我们先引入以下的概念, 记号和约定.

在本文中, 无特殊申明, 所有极限关系均为$x\to\infty$. 设$a(x)$, $b(x)$为定义在实数上的非负函数. 若$\lim a(x)/b(x)=1$, 则记$a(x)\sim b(x)$; 若$\limsup a(x)/b(x)<\infty$, 则记$a(x)=O(b(x))$; 若$a(x)=O(b(x))$且$b(x)=O(a(x))$, 则记$a(x)\approx b(x)$; 若$\lim a(x)/b(x)=0$, 则记$a(x)=o(b(x))$. 设F,G分别是随机变量(r.v.) X,Y的分布, 它们的支撑为A, $A=(-\infty,\infty)$或$[0,\infty)$. 对于任意$0<T\le\infty$, 令$\Delta=(0,T]$, $x+\Delta=\{x+y:y\in\Delta\}$. 若$T=\infty$, 则$\Delta=(0,\infty)$. 以$F^+,F^-,F_a,F_s$依次表示r.v.s $X^+,-X,|X|$与X_1-X_2的分布, 其中X_1,X_2与X独立同分布. $F*G$表示F与G的卷积, 特别地, F^{*n}表示F的n重卷积, $n\ge1$. [4]定义分布$F\in\mathcal{L}_\Delta$, 若对充分大的x, $F(x+\Delta)>0$且$F(x+t+\Delta)\sim F(x+\Delta)$关于$t\in[0,1]$一致; 定义分布$F\in\mathcal{S}_\Delta$, 若$F\in\mathcal{L}_\Delta$且$F^{*2}(x+\Delta)\sim 2F(x+\Delta)$. 其中$\mathcal{L}_\Delta$与$\mathcal{S}_\Delta$即局部长尾分布族与

*国家自然科学基金项目(10671139)资助.

本文2006年11月3日收到, 2008年8月15日收到修改稿.

局部次指数分布族. 特别地, 若$T=\infty$, 即通常所说的长尾分布族与次指数分布族, 分别记作$\mathcal{L}$与$\mathcal{S}$. 在不至于引起混淆的情况下, 我们也用$X\in\mathcal{L}_\Delta$表示r.v. X的分布属于$\mathcal{L}_\Delta$族, $X\in\mathcal{S}_\Delta$表示r.v. X的分布属于$\mathcal{S}_\Delta$族. 最后记

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_\Delta(F) &= \{h:[0,\infty)\mapsto[0,\infty), h(x)\uparrow\infty, x^{-1}h(x)\to 0 \text{ 且} \\ &\quad F(x+y+\Delta)\sim F(x+\Delta) \text{ 关于 } |y|\le h(x) \text{ 一致}\}.\end{aligned}$$

在次指数族方面, Leslie (1989)[7]指出, 两个次指数分布的卷积未必是次指数的, 那么两个次指数分布的卷积是次指数分布的条件是什么呢? [1]曾证明了如下结果:

定理 A 设$F,G\in\mathcal{S}$, $H=F*G$, $A=[0,\infty)$, 则$\limsup\overline{H^{*2}}(x)/\overline{H}(x)\le 4$, 且以下命题等价: (a) $H\in\mathcal{S}$; (b) $\overline{H}(x)\sim\overline{F}(x)+\overline{G}(x)$; (c) 对某个(任意)$p\in(0,1)$, $q=1-p$, $pF+qG\in\mathcal{S}$.

人们自然要问, 上述结果对局部次指数分布是否成立? 在本文中, 我们将给出上述问题一个正面的回答, 即给出上述结果一个局部版本, 并证明了当$A=(-\infty,\infty)$时, 在

$$\lim_{x\to\infty}\sup_{y\ge x}\frac{F(y+\Delta)}{F(x+\Delta)}<\infty \tag{1.1}$$

的条件下, 结论仍然成立. 我们指出, 常见的局部次指数分布, 如Weibull分布, Pareto分布, 对数正态分布都满足条件(1.1). 以下是本文的主要结果:

定理 1.1 设$F,G\in\mathcal{L}_\Delta$, $H=F*G$, $A=[0,\infty)$或者$A=(-\infty,\infty)$且F,G均满足(1.1),

(i) 对于任意$h\in\mathcal{H}_\Delta(F)\cap\mathcal{H}_\Delta(G)\cap\mathcal{H}_\Delta(H)$, 以下论述等价: (a) $H(x+\Delta)\sim F(x+\Delta)+G(x+\Delta)$; (b) $\displaystyle\int_{h(x)}^{x-h(x)}F(x-y+\Delta)G(\mathrm{d}y)=o(H(x+\Delta))$.

(ii) 对于任意$p\in(0,1)$, $q=1-p$, 以下论述等价: (c) $H\in\mathcal{S}_\Delta$; (d) $pF+qG\in\mathcal{S}_\Delta$.

(iii) (c)可以推出(a).

定理 1.2 设$F,G\in\mathcal{S}_\Delta$, $H=F*G$, $A=[0,\infty)$, 或者$A=(-\infty,\infty)$且F,G均满足(1.1), 则(a), (b), (c), (d)相互等价且

$$\limsup\frac{H^{*2}(x+\Delta)}{H(x+\Delta)}\le 4.$$

我们将在第二节证明上述定理, 在第三节给出定理1.1的一个应用, 得到局部次指数分布的对称化分布的局部渐进性, 它是[2]中相应结果的局部版本.

§2. 定理的证明

以下将沿用第一节的概念与记号. 证明依赖于以下引理.

引理 2.1　$F \in \mathcal{L}_\Delta \Leftrightarrow \mathcal{H}_\Delta(F) \neq \emptyset$.

证明:　我们只证充分性, 必要性是显然的. 由$\mathcal{L}_\Delta$的定义易知, 对于任意的自然数n, $F(x+t+\Delta) \sim F(x+\Delta)$关于$|t| \le n$一致. 因此, 存在严格单调递增至无穷的正整数列$f(n)$, 满足当$x \ge f(n)$时, 对于任意$|t| \le n$, $|F(x+t+\Delta)/F(x+\Delta) - 1| < 1/n$. 当$0 \le x < f(1)$时, 令$h_1(x) = 0$; 当$f(n) \le x < f(n+1)$时, 令$h_1(x) = n$. 易知$F(x+t+\Delta) \sim F(x+\Delta)$关于$|t| \le h_1(x)$一致. 再令$h(x) = \min(h_1(x), \ln(x+1))$, 容易验证$h \in \mathcal{H}_\Delta(F)$. □

引理 2.2　若$F \in \mathcal{L}_\Delta$, $G \in \mathcal{L}_\Delta$, 则$F * G \in \mathcal{L}_\Delta$且

$$\liminf \frac{F * G(x+\Delta)}{F(x+\Delta) + G(x+\Delta)} \ge 1.$$

证明:　$A = [0, \infty)$时的证明见[4]. 以下给出$A = (-\infty, \infty)$时的证明. 设r.v. X与r.v. Y的分布分别为F, G. 任取$h \in \mathcal{H}_\Delta(F) \cap \mathcal{H}_\Delta(G)$,

$$\begin{aligned}
& F * G(x+\Delta) \\
= & \int_{-\infty}^{h(x)} F(x-y+\Delta) G(\mathrm{d}y) + \int_{-\infty}^{h(x)} G(x-y+\Delta) F(\mathrm{d}y) \\
& + \int_{h(x)}^{x-h(x)} F(x-y+\Delta) G(\mathrm{d}y) + \mathsf{P}(X > h(x), Y > x-h(x), X+Y \in x+\Delta) \\
\equiv & \sum_{k=1}^{4} I_k(x).
\end{aligned}$$

类似地, 有

$$\begin{aligned}
& F * G(x+t+\Delta) \\
= & \int_{-\infty}^{h(x)} F(x+t-y+\Delta) G(\mathrm{d}y) + \int_{-\infty}^{h(x)} G(x+t-y+\Delta) F(\mathrm{d}y) \\
& + \int_{h(x)}^{x-h(x)} F(x+t-y+\Delta) G(\mathrm{d}y) + \mathsf{P}(X > h(x), Y > x-h(x), X+Y \in x+t+\Delta) \\
\equiv & \sum_{k=1}^{4} J_k(x).
\end{aligned}$$

注意到

$$\begin{aligned}
I_1(x) &\ge \int_{-h(x)}^{h(x)} F(x-y+\Delta) G(\mathrm{d}y) \sim F(x+\Delta), \\
I_2(x) &\ge \int_{-h(x)}^{h(x)} G(x-y+\Delta) G(\mathrm{d}y) \sim G(x+\Delta),
\end{aligned}$$

故

$$\liminf \frac{F * G(x+\Delta)}{F(x+\Delta) + G(x+\Delta)} \ge 1.$$

又注意到$I_k(x) \sim J_k(x)$, 关于$t \in [0,1]$一致, $k=1,2,3$, 且$I_4(x)=o(G(x+\Delta))$, $J_4(x)=o(G(x+\Delta))$. 故$F*G(x+t+\Delta) \sim F*G(x+\Delta)$关于$t \in [0,1]$一致, 即$F*G \in \mathcal{L}_\Delta$. $\square$

引理 2.3 设r.v. X与r.v. Y相互独立, 则$\mathsf{P}(X^+ \vee Y \in x+\Delta) = \mathsf{P}(X \vee Y \in x+\Delta)$, $x \geq 0$. 进而若$F, G \in \mathcal{L}_\Delta$, $A=[0,\infty)$或$A=(-\infty,\infty)$且F, G均满足(1.1), 则$\mathsf{P}(X^+ + Y \in x+\Delta) \sim \mathsf{P}(X+Y \in x+\Delta)$.

证明: 引理的第一部分是显然的, 我们只证第二部分. 注意到

$$
\begin{aligned}
& \mathsf{P}(X^+ + Y \in x+\Delta) \\
= \ & \mathsf{P}(X \leq 0, Y \in x+\Delta) + \mathsf{P}(X>0, X+Y \in x+\Delta) \\
= \ & F(0)G(x+\Delta) + \int_{-\infty}^{\infty} G(x-y+\Delta)F(\mathrm{d}y) - \int_{-\infty}^{0} G(x-y+\Delta)F(\mathrm{d}y) \\
= \ & \mathsf{P}(X+Y \in x+\Delta) + \int_{-\infty}^{0} \{G(x+\Delta) - G(x-y+\Delta)\}F(\mathrm{d}y) \\
\equiv \ & J_1(x) + J_2(x).
\end{aligned}
$$

注意到当G满足(1.1)时, $J_2(x)=o(G(x+\Delta))$, 故结论成立. $\square$

注记 在引理2.3的条件下易得:

$$
\begin{aligned}
\mathsf{P}(X^+ + Y \in x+\Delta) & \sim \mathsf{P}(X+Y^+ \in x+\Delta) \sim \mathsf{P}(X^+ + Y^+ \in x+\Delta) \\
& \sim \mathsf{P}(X+Y \in x+\Delta).
\end{aligned}
$$

引理 2.4 若$A=(-\infty,\infty)$且F满足(1.1), 则$F \in \mathcal{S}_\Delta$等价于$F^+ \in \mathcal{S}_\Delta$. 若$F, G \in \mathcal{L}_\Delta$, $F(x+\Delta) \approx G(x+\Delta)$, $A=[0,\infty)$或者$A=(-\infty,\infty)$且F, G均满足(1.1), 则$F \in \mathcal{S}_\Delta$等价于$G \in \mathcal{S}_\Delta$.

证明: 由引理2.3下的注知第一部分成立. 第二部分, 当$A=[0,\infty)$时见[4]; 当$A=(-\infty,\infty)$时由第一部分及当$A=[0,\infty)$时的结论立得. $\square$

引理 2.5 若$F \in \mathcal{L}_\Delta$, $A=[0,\infty)$或$A=(-\infty,\infty)$且F满足(1.1), 则以下论述等价:

(a) $F \in \mathcal{S}_\Delta$;

(b) 存在$h \in \mathcal{H}_\Delta(F)$, 满足

$$
\mathsf{P}(X_1+X_2 \in x+\Delta, X_1>h(x), X_2>h(x)) = o(F(x+\Delta)), \tag{2.1}
$$

其中, X_1和X_2是两个相互独立且有共同的分布F的r.v.;

(c) 对于任意$h(x) \to \infty$, (2.1)均成立.

证明: $A=[0,\infty)$时的证明见[4]; $A=(-\infty,\infty)$且F满足(1.1)时, 由引理2.3, 2.4及$A=[0,\infty)$时的结论立得. $\square$

引理 2.6　若$F, G \in \mathcal{L}_\Delta$, $A = (-\infty, \infty)$, $p \in (0,1)$, $q = 1-p$, 则$pF + qG \in \mathcal{L}_\Delta$.

证明:　显然, 略.　□

定理1.1的证明:　由引理2.3的注记, 引理2.4及引理2.5知, 只需证$A = [0, \infty)$的部分. 为了行文方便, 我们先证明(i)与(iii), 最后证明(ii).

(i) 设r.v. $X_i \sim F$, $Y_i \sim G$, $i = 1, 2$且相互独立, $F, G \in \mathcal{L}_\Delta$. 由引理2.2,

$$H \in \mathcal{L}_\Delta \qquad 且 \qquad \liminf \frac{F * G(x+\Delta)}{F(x+\Delta) + G(x+\Delta)} \geq 1.$$

由引理2.1知, 存在$h \in \mathcal{H}_\Delta(F) \cap \mathcal{H}_\Delta(G) \cap \mathcal{H}_\Delta(H)$. 令$B = \{X_1 + Y_1 \in x + \Delta\}$, 则

$$\begin{aligned} H(x+\Delta) &= \mathsf{P}(B, X_1 \leq h(x)) + \mathsf{P}(B, Y_1 \leq h(x)) + \mathsf{P}(B, X_1 > h(x), Y_1 > h(x)) \\ &\sim G(x+\Delta) + F(x+\Delta) + \int_{h(x)}^{x-h(x)} F(x-y+\Delta) G(\mathrm{d}y) \\ &\equiv I_1(x) + I_2(x) + I_3(x). \end{aligned} \tag{2.2}$$

故(a)等价于(b)是显然的.

(iii) 由于

$$\begin{aligned} I_3(x) &\leq (1+o(1)) \int_{h(x)}^{x-h(x)} H(x-y+\Delta) G(\mathrm{d}y) \\ &= (1+o(1)) \mathsf{P}(X_1 + Y_1 + Y_2 \in x+\Delta, h(x) \leq Y_2 \leq x - h(x)) \\ &\leq (1+o(1)) \mathsf{P}(X_1 + Y_1 + Y_2 \in x+\Delta, h(x) \leq X_1 + Y_1 \leq x - h(x) + T) \\ &= (1+o(1)) \int_{h(x)}^{x-h(x)+T} G(x-y+\Delta) H(\mathrm{d}y) \\ &\leq (1+o(1)) \int_{h(x)}^{x-h(x)+T} H(x-y+\Delta) H(\mathrm{d}y), \end{aligned}$$

注意到$H \in \mathcal{S}_\Delta$, 由引理2.5知, $I_3(x) = o(H(x+\Delta))$, 结合(2.2)立得(a)成立.

(ii) 令$K = pF + qG$, 由引理2.6知$K \in \mathcal{L}_\Delta$. (d) $\Longrightarrow$ (c): 由引理2.5知$K \in \mathcal{S}_\Delta$等价于

$$\int_{h(x)}^{x-h(x)} K(x-y+\Delta) K(\mathrm{d}y) = o(K(x+\Delta)).$$

注意到

$$\begin{aligned} &\int_{h(x)}^{x-h(x)} K(x-y+\Delta) K(\mathrm{d}y) \\ = \ & q^2 \int_{h(x)}^{x-h(x)} G(x-y+\Delta) G(\mathrm{d}y) + pq \int_{h(x)}^{x-h(x)} F(x-y+\Delta) G(\mathrm{d}y) \\ &+ pq \int_{h(x)}^{x-h(x)} G(x-y+\Delta) F(\mathrm{d}y) + p^2 \int_{h(x)}^{x-h(x)} F(x-y+\Delta) F(\mathrm{d}y), \end{aligned}$$

即

$$\int_{h(x)}^{x-h(x)} F(x-y+\Delta)G(\mathrm{d}y) = o(K(x+\Delta)).$$

结合(2.2)及$K(x+\Delta) = pF(x+\Delta)+qG(x+\Delta)$得$H(x+\Delta) = O(K(x+\Delta))$. 又$K(x+\Delta) = O(H(x+\Delta))$是显然的, 故$H(x+\Delta) \approx K(x+\Delta)$. 由引理2.4, 立得$H \in \mathcal{S}_\Delta$. (c) $\Longrightarrow$ (d): 由(c) $\Longrightarrow$ (a)及$K(x+\Delta) = pF(x+\Delta)+qG(x+\Delta)$知$H(x+\Delta) \approx K(x+\Delta)$, 再由引理2.4立得结论. □

定理1.2的证明: 由引理2.3的注记, 引理2.4及引理2.5知, 只需证$A = [0,\infty)$的部分, 且根据定理1.1, 只需证明(a) $\Longrightarrow$ (c)及

$$\limsup \frac{H^{*2}(x+\Delta)}{H(x+\Delta)} \le 4.$$

以下假设$F, G \in \mathcal{S}_\Delta$, $h(x)$如前文所述. 由引理2.5知,

$$\int_{h(x)}^{x-h(x)} F(x-y+\Delta)F(\mathrm{d}y) = o(F(x+\Delta)) = o(H(x+\Delta)),$$
$$\int_{h(x)}^{x-h(x)} G(x-y+\Delta)G(\mathrm{d}y) = o(G(x+\Delta)) = o(H(x+\Delta)).$$

又由(a)与(b)等价知

$$\int_{h(x)}^{x-h(x)} F(x-y+\Delta)G(\mathrm{d}y) = o(H(x+\Delta)).$$

因此

$$\int_{h(x)}^{x-h(x)} H(x-y+\Delta)H(\mathrm{d}y) \sim \int_{h(x)}^{x-h(x)} F(x-y+\Delta)H(\mathrm{d}y) + \int_{h(x)}^{x-h(x)} G(x-y+\Delta)H(\mathrm{d}y).$$

不妨将右式的两项依次记作$J_1(x), J_2(x)$. 注意到

$$\begin{aligned} J_1(x) &\le \int_{h(x)}^{x-h(x)+T} H(x-y+\Delta)F(\mathrm{d}y) \\ &= \int_{h(x)}^{x-h(x)} H(x-y+\Delta)F(\mathrm{d}y) + o(F(x+\Delta)) \\ &\sim \int_{h(x)}^{x-h(x)} F(x-y+\Delta)F(\mathrm{d}y) + \int_{h(x)}^{x-h(x)} G(x-y+\Delta)F(\mathrm{d}y) + o(H(x+\Delta)) \\ &= o(H(x+\Delta)). \end{aligned}$$

类似可证$J_2(x) = o(H(x+\Delta))$. 由引理2.5立得结论.

最后证明

$$\limsup \frac{H^{*2}(x+\Delta)}{H(x+\Delta)} \le 4.$$

由于

$$\begin{aligned}
H^{*2}(x+\Delta) &= \mathsf{P}(X_1+X_2+Y_1+Y_2\in x+\Delta)\\
&\sim F^{*2}(x+\Delta)+G^{*2}(x+\Delta)+\int_{h(x)}^{x-h(x)}F^{*2}(x-y+\Delta)G^{*2}(\mathrm{d}y)\\
&\sim 2F(x+\Delta)+2G(x+\Delta)+2\int_{h(x)}^{x-h(x)}F(x-y+\Delta)G^{*2}(\mathrm{d}y)\\
&\sim 2F(x+\Delta)+2G(x+\Delta)+2(1+o(1))\int_{h(x)}^{x-h(x)}G^{*2}(x-y+\Delta)F(\mathrm{d}y)\\
&\sim 2F(x+\Delta)+2G(x+\Delta)+4(1+o(1))\int_{h(x)}^{x-h(x)}G(x-y+\Delta)F(\mathrm{d}y),
\end{aligned}$$

故

$$H^{*2}(x+\Delta)+2F(x+\Delta)+2G(x+\Delta)\le 4(1+o(1))H(x+\Delta).$$

由此立得结论. □

§3. 对称化随机变量的局部渐近性

[2]给出一个非局部对称化随机变量的渐近性结果.

定理 B 设X_1,X_2是i.i.d. r.v.s, 具有无界支撑,

(i) 若支撑一侧有界, $F_a\in\mathcal{L}$, 则

$$\mathsf{P}(|X_1-X_2|>x)\sim 2\mathsf{P}(|X_1|>x);\tag{3.1}$$

(ii) 假设分布的支撑为$(-\infty,\infty)$, $F,F^-\in\mathcal{L}$, 则以下命题等价: (a) $F_a\in\mathcal{S}$, (b) $F_s\in\mathcal{S}$. 且两者均可推出(3.1).

本文在定理1.1的基础上,用更简单的方法给出定理B的局部版本.

定理 3.1 设X_1,X_2是i.i.d. r.v., 具有无界支撑,

(i) 若支撑一侧有界, $F_a\in\mathcal{L}_\Delta$且满足(1.1), 则$F_s(x+\Delta)\sim F_a(x+\Delta)$, $x\to\infty$.

(ii) 假设分布的支撑为$(-\infty,\infty)$, $F,F^-\in\mathcal{L}_\Delta$, 且均满足(1.1), 则以下论述等价:

(a) $F_a\in\mathcal{S}_\Delta$, (b) $F_s\in\mathcal{S}_\Delta$. 且两者均可推出$F_s(x+\Delta)\sim F_a(x+\Delta)$.

特别地, 当$T=\infty$时, 我们就可以由定理3.1立刻得到定理B.

定理3.1的证明: (i) 设支撑的左端点是$-M$. 此时, 当$x>M$时, $F_a(x+\Delta)=F(x+\Delta)$, 故$F\in L_\Delta$, 因此,

$$F_s(x+\Delta)=\int_{-M}^{\infty}F(x+y+\Delta)F(\mathrm{d}y)\sim\int_{-M}^{h(x)}F(x+y+\Delta)F(\mathrm{d}y)+o(F(x+\Delta))\sim F(x+\Delta).$$

若支撑的右端点是M, 则$-X$的支撑有左端点$-M$, 故仍有上式成立.

(ii) (a) $\Longrightarrow$ (b), 由引理2.6知对于任意$p>0$, $q=1-p$, $K=pF+qF^{-}\in\mathcal{L}_{\Delta}$. 由$F_a\in\mathcal{S}_{\Delta}$, $F_a(x+\Delta)=F(x+\Delta)+F^{-}(x+\Delta)$, $x>0$, 及引理2.4立得$K\in\mathcal{S}_{\Delta}$. 注意到$F_s=F*F^{-}$, 由定理1.1立得$F_s\in\mathcal{S}_{\Delta}$且$F_s(x+\Delta)\sim F(x+\Delta)+F^{-}(x+\Delta)=F_a(x+\Delta)$, $x\to\infty$.

(b) $\Longrightarrow$ (a), 注意到$F_s=F*F^{-}\in\mathcal{S}_{\Delta}$, 及$F\in\mathcal{L}_{\Delta}$, $F^{-}\in\mathcal{L}_{\Delta}$, 由定理1.1知$F_s(x+\Delta)\sim F(x+\Delta)+F^{-}(x+\Delta)=F_a(x+\Delta)$. 由引理2.4立得$F_a\in\mathcal{S}_{\Delta}$. $\square$

致谢 衷心感谢审稿人提出的宝贵意见.

参 考 文 献

[1] Embrechts, P. and Goldie, C., On closure and factorization properties of subexponebtial and related distributions. *J. Austral. Math. Soc.*, **29**(1980), 243–256.

[2] Geluk, J.L., Asymptotics in the symmetrization inequality, *Stat. Prob. Lett.*, **69**(2004), 63–68.

[3] Embrechts, P., Klüppelberg, C. and Mikosch, T., *Modelling Extremal Events*, Berlin, Springer, 1997.

[4] Asmussen, S., Foss, S. and Korshunov, D., Asymptotics for sums of random variables with local subexponential behaviour, *J. Theoret. Prob.*, **16**(2003), 489–518.

[5] Yuebao, W., Dongya, C. and Kaiyong, W., The closure of a local subexponential distribution with applications to the compound Poisson process, *J. Appl. Prob.*, **42**(2005), 1194–1203.

[6] Yuebao, W., Yang, Y., Kaiyong, W. and Dongya, C., Some new equivalent conditions on asymptotics and local asymptotics for random sums and their applications, *Insurance Mathematics and Economics*, **40**(2007), 256–266.

[7] Leslie, J.R., On the non-closure under convolution of the subexponential distributions, *J. Appl. Prob.*, **26**(1989), 58–66.

Equivalent Conditions for a Type of Convolution Closure of Local Subexponential Distributions and Applications

Yu Changjun   Wang Yuebao

(*Department of Mathematics, Soochow University, Suzhou, 215006*)

This paper obtains some equivelent conditions for a type of convolution closure of local subexponential distributions on $[0,\infty)$, which are also valid for distributions on $(-\infty,\infty)$ under certain conditions. On the basis of these results, the local asymptotics for the distribution of symmetrization are given. The results above include the corresponding, non-local results of Embrechts and Goldie (1980)[1] and Geluk (2004)[2]. Some of our proofs are more simple than those of Geluk (2004)[2].

Keywords: Local subexponential ditribution, convolution closure, symmetrization.

AMS Subject Classification: 60E05, 60F15.