应用概率统计 第二十七卷
第一期 2011年2月

Chinese Journal of Applied Probability
and Statistics Vol.27 No.1 Feb. 2011

Cayley树图上奇偶马氏链场的强极限定理 *

潘 恒[1,2] 杨卫国[1]

([1]江苏大学理学院, 镇江, 212013; [2]苏州蓝缨学校, 苏州, 215104)

摘 要

本文利用构造鞅的方法, 研究了Cayley树图上奇偶马氏链场的强极限定理, 给出了Cayley树图上奇偶马氏链场关于状态和状态序偶出现频率的强大数定律, 推广了一个已知结果.

关键词: 奇偶马氏链场, 强极限定理, 强大数定律.

学科分类号: O211.4.

§1. 引 言

一个树图$G=\{T,E\}$是一个没有回路的连通树图, 对于任意两个顶点$\alpha\neq\beta\in T$, 设$\overline{\alpha\beta}$是连接α与β的唯一路径, 路径$\overline{\alpha\beta}$中含有的边数记为$d(\alpha,\beta)$, 称为α到β的距离, 本文主要讨论有限Cayley树图$T_{C,2}$ (即二枝树). 在Cayley树图$T_{C,2}$中, 根顶点(记作o)仅有两个相邻顶点, 而其他顶点均有三个相邻顶点. 如果一个顶点到根顶点的距离为n, 则称此顶点为n层上的顶点. 设L_n^m为含有从n层上到m层上所有顶点的子图, $L_n=L_n^n$表示n层上所有顶点的子图, $T^{(n)}=L_0^n$表示含有从0层上到n层上所有顶点的子图, 我们用(n,j)表示树图n层上的第j个顶点, 易知(n,j)有$(n+1,2j-1),(n+1,2j)$及$(n-1,[j/2])$三个相邻顶点, 其中$[c]$表示不小于c的最小整数. 为了统一起见, 把根顶点o记为$(0,1)$. 为了方便起见把$T_{C,2}$简记为T.

设$|B|$表示树图T的子图B的所有顶点数, 易知$|T^{(2n)}|=2^{n+1}-1$.

取$\Omega=\{0,1\}^T$, $\mathcal{F}$是Ω的所有有限维柱集产生的σ代数. 设$X=\{X_t,t\in T\}\in\Omega$是定义在可测空间$(\Omega,\mathcal{F})$上的随机过程, $\forall\,\omega=\{\omega(t),t\in T\}\in\Omega$, 定义$X_t(\omega)=\omega(t)$, $t\in T$.

设B为T的子集, 记$X^B=\{X_t,t\in B\}$. 设μ是可测空间$(\Omega,\mathcal{F})$上概率测度, 称μ为树图T上的随机场.

定义 1.1 [1][2] 设μ是可测空间$(\Omega,\mathcal{F})$上的概率测度. 如果

$$\mu(\omega(j)|\omega(k),k\in T-\{j\})=\mu(\omega(j)|\omega(k),k\in N(j)),\tag{1.1}$$

其中$N(j)$是顶点j的所有相邻顶点集, 则称μ为树图T上的Markov随机场.

---

*国家自然科学基金(11071104)资助.

本文2009年2月16日收到, 2010年5月11日收到修改稿.

定义 1.2[1][3] 设$P=(p(i,j))$, $i,j=0,1$为一严格正的随机矩阵, 其唯一的平稳分布为$\pi=(\pi(0),\pi(1))$, $(\pi P=\pi)$. 定义$(\Omega,\mathcal{F})$上的概率测度μ_P如下: 设A是T的一个有限连通子集, 定义A上的一个简单序$A=\{x_1,x_2,\cdots,x_k\}$有以下性质: 对于每一个$x_j\in A(j>1)$, 有唯一的一个$x_i\in\{x_1,x_2,\cdots,x_{j-1}\}$是其相邻顶点, 记为$i=i(j)$, 定义$\mu_P$在$A$上的柱集的概率为

$$\mu_P(\omega(t)=\epsilon(t),t\in A)=\pi(\epsilon(x_1))\prod_{j=2}^{k}p(\epsilon(x_{i(j)}),\epsilon(x_j)),\tag{1.2}$$

其中$\epsilon(t)$取0或1.

像这样定义在$(\Omega,\mathcal{F})$上的概率测度μ_P称为树图T上由随机矩阵P确定的马氏链场.

易知A满足以上性质的序不唯一, 但(1.2)式与A的序选择无关, 并且容易验证马氏链场是一特殊的Markov随机场.

若A为不连通有限点集上的柱集, 那么它的概率为

$$P_F=\int_B\int_B\cdots\int_B \mathrm{d}F(t_1,x_1;t_2,x_2;\cdots;t_n,x_n),\qquad \text{其中 } B\in\Omega^n.$$

定义 1.3[1][3] 设Q^e与Q^o为两个2×2严格正的随机矩阵, π^e与π^o为定义在$\{0,1\}$上的两个概率分布, 满足

$$\pi^e(i)Q^e(i,j)=\pi^o(j)Q^o(j,i),\qquad i,j\in\{0,1\}.\tag{1.3}$$

将T分解为$T=T_e\cup T_o$, 其中T_e表示所有偶数层上顶点的全体; T_o表示所有奇数层上顶点的全体. 在$(\Omega,\mathcal{F})$定义概率测度如定义1.2, 其中π^e用于T_e中的顶点, π^o用于T_o中顶点, Q^e用于从T_e转移到T_o, Q^o用于从T_o转移到T_e. 像这样定义在$(\Omega,\mathcal{F})$上的概率测度μ_{Q^e,Q^o}称为树图T上由随机矩阵Q^e与Q^o确定的奇偶马氏链场. 并且

$$\mu_{Q^e,Q^o}(x^{T(2m)})=p(x_0)\prod_{h=1}^{m}\prod_{\sigma\in L_{2h-2}}\prod_{\tau\in S(\sigma)}Q^e(x_\tau|x_\sigma)\cdot\prod_{h=1}^{m}\prod_{\sigma\in L_{2h-1}}\prod_{\tau\in S(\sigma)}Q^o(x_\tau|x_\sigma),$$

$$\mu_{Q^e,Q^o}(x^{T(2m+1)})=p(x_0)\prod_{h=1}^{m+1}\prod_{\sigma\in L_{2h-2}}\prod_{\tau\in S(\sigma)}Q^e(x_\tau|x_\sigma)\cdot\prod_{h=1}^{m}\prod_{\sigma\in L_{2h-1}}\prod_{\tau\in S(\sigma)}Q^o(x_\tau|x_\sigma).$$

容易证明奇偶马氏链场也是一特殊的Markov随机场, 并且由(1.2)式定义的μ_{Q^e,Q^o}也与A的序选择无关.

树图模型近年来已引起物理学, 概率论及信息论界的广泛兴趣. Berger与叶中行研究了齐次树图上某些平稳随机场的熵率[2], 叶中行与Berger研究了齐次树图上PPG不变随机场遍历性及渐近均分割性[4], 杨卫国与刘文研究了Bethe树图与Cayley树图上奇偶马氏链场的强大数定律[5]. 刘文, 王丽英和杨卫国研究了二进树上奇偶马氏链场的若干强极限定理与Shannom-McMillan定理的一种逼近[6], 杨卫国与叶中行研究了Cayley树图上奇偶马氏链场的渐近均分割性[7]. 在本文中利用构造鞅的新方法重新给出了文献[6]中定理1的证明, 使

此结论能在更简单的环境下实现. 并在此基础上得到一个新的Cayley树上奇偶马氏链场的奇数层和偶数层分别服从的强大数定律, 该定律可以推广到一般齐次树上, 且该定律推广了文献[7]中的定理1.

§2. 主要结果

引理 2.1 设T是Cayley树$T_{C,2}$, μ_{Q^e,Q^o}, $\{X_t, t\in T\}$如前定义, $\{g_n(x,y), n\ge 0\}$是定义在$\{0,1\}^2$上的函数. 令$L_0=\{o\}$, $\mathcal{F}_n=\sigma(X^{T_n})$,

$$F_n(\omega)=\sum_{m=0}^{n-1}\sum_{i=1}^{2^m}\sum_{j=2i-1}^{2i} g_m(X_{m,i},X_{m+1,j}), \tag{2.1}$$

$$t_n(\lambda,\omega)=\frac{e^{\lambda F_n(\omega)}}{\prod_{m=0}^{n-1}\prod_{i=1}^{2^m}\prod_{j=2i-1}^{2i}\mathsf{E}[e^{\lambda g_m(X_{m,i},X_{m+1,j})}|X_{m,i}]}, \tag{2.2}$$

此处$\lambda\ne 0$, 则$\{t_n(\lambda,\omega),\mathcal{F}_n, n\ge 1\}$是在测度$\mu_{Q^e,Q^o}$下的非负鞅.

证明: 此引理与文献[8]中证明方法类似, 故从略. □

引理 2.2 设μ_{Q^e,Q^o}和$\{g_n(x,y), n\ge 0\}$如前定义, 令$\alpha>0$, $\{a_n, n\ge 1\}$为一列非负随机变量序列. 令

$$G_n(\omega)=\sum_{m=0}^{n-1}\sum_{i=1}^{2^m}\sum_{j=2i-1}^{2i}\mathsf{E}[g_m(X_{m,i},X_{m+1,j})|X_{m,i}], \tag{2.3}$$

$$D(\alpha)=\Big\{\lim_{n\to\infty}a_n=\infty,\ \lim_{n\to\infty}\sup\frac{1}{a_n}\times\sum_{m=0}^{n-1}\sum_{i=1}^{2^m}\sum_{j=2i-1}^{2i}\mathsf{E}[g_m^2(X_{m,i},X_{m+1,j})\times e^{\alpha|g_m(X_{m,i},X_{m+1,j})|}|X_{m,i}]<\infty\Big\}, \tag{2.4}$$

则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{F_n(\omega)-G_n(\omega)}{a_n}=0,\qquad \mu_{Q^e,Q^o}-\text{a.e.}\ \omega\in D(\alpha). \tag{2.5}$$

证明: 此引理的证明与文献[8]中类似, 故从略. □

引理 2.3 设μ_{Q^e,Q^o}如前定义, $\{g_n(x,y), n\ge 0\}$是定义在$\{0,1\}^2$上的有界函数, 即存在常数$K>0$, 使得$|g_n(x,y)|\le K, F_n(\omega), G_n(\omega)$如前定义, 令$\{a_n, n\ge 1\}$为一列非负随机变量序列. 令

$$D_0=\Big\{\lim_{n\to\infty}a_n=\infty,\ \lim_{n\to\infty}\sup\frac{1}{a_n}\times\sum_{m=0}^{n-1}\sum_{i=1}^{2^m}\sum_{j=2i-1}^{2i}\mathsf{E}[g_m(X_{m,i},X_{m+1,j})|X_{m,i}]<+\infty\Big\}, \tag{2.6}$$

则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_n}[F_n(\omega)-G_n(\omega)]=0,\qquad \mu_{Q^e,Q^o}-\text{a.e.}. \tag{2.7}$$

证明: 此引理的证明也同文献[8]类似, 故从略. □

引理 2.4[7] 设两个随机矩阵Q^e与Q^o及两个概率分布π^e与π^o由定义1.3给出, 并且满足(1.3)式, 设$R_1=Q^eQ^o$, $R_2=Q^oQ^e$, $R_1^{(m)}(i,j)$, $R_2^{(m)}(i,j)$是分别由随机矩阵R_1, R_2确定的m步转移概率, 则

$$\lim_{m\to\infty} R_1^{(m)}(i,j)=\pi^e(j), \qquad \lim_{m\to\infty} R_2^{(m)}(i,j)=\pi^o(j). \tag{2.8}$$

定理 2.1 设μ_{Q^e,Q^o}是由随机矩阵Q^e与Q^o确定的树图T上奇偶马氏链场. $\{X_t,t\in T\}$如前定义, 设$T_n^e=T_e\cap T^{(n)}$, $T_n^o=T_o\cap T^{(n)}$, 即T_n^e, T_n^o分别表示树图T前n层的偶数层的所有顶点集及前n层的奇数层的所有顶点集. 显见$|T_n^e|=[2^{2[(n+1)/2]}-1]/3$, $|T_n^o|=[2(2^{2[n/2]}-1)]/3$. 设$S_n^e(k)$表示$X^{T_n^e}=\{X_t,t\in T_n^e\}$中$k$的个数, $S_n^o(k)$表示$X^{T_n^o}=\{X_t,t\in T_n^o\}$中$k$的个数. 令

$$I^e(m)=\begin{cases}1, & m\text{ 为偶数;}\\ 0, & m\text{ 为奇数,}\end{cases}\qquad I^o(m)=\begin{cases}1, & m\text{ 为奇数;}\\ 0, & m\text{ 为偶数,}\end{cases}\qquad m\geq 0,$$

$$\delta_k(x)=\begin{cases}1, & x=k;\\ 0, & x\neq k,\end{cases}\qquad k,x\in\{0,1\},$$

则

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{|T_n^e|}S_n^e(k)-\frac{1}{|T_{n-1}^o|}\sum_{l=0}^{1}S_{n-1}^o(l)Q^o(k|l)\right\}=0, \qquad \mu_{Q^e,Q^o}-\text{a.e.}, \tag{2.9}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{|T_n^o|}S_n^o(k)-\frac{1}{|T_{n-1}^e|}\sum_{l=0}^{1}S_{n-1}^e(l)Q^e(k|l)\right\}=0, \qquad \mu_{Q^e,Q^o}-\text{a.e.}. \tag{2.10}$$

证明: 在引理2.3中取$g_n(x,y)=I^o(n)\delta_k(y)$, 显然$g_n(x,y)$为有界函数, 且$|g_n(x,y)|\leq 1$. 取$a_n$为$|T_n^e|$, 则

$$\begin{aligned}
F_n(\omega) &= \sum_{m=0}^{n-1}\sum_{i=1}^{2^m}\sum_{j=2i-1}^{2i} g_m(X_{m,i},X_{m+1,j})\\
&= \sum_{m=0}^{n-1}\sum_{i=1}^{2^m}\sum_{j=2i-1}^{2i} I^o(m)\delta_k(X_{m+1,j})=S_n^e(k),\\
G_n(\omega) &= \sum_{m=0}^{n-1}\sum_{i=1}^{2^m}\sum_{j=2i-1}^{2i} \mathsf{E}[g_m(X_{m,i},X_{m+1,j})|X_{m,i}]\\
&= \sum_{m=0}^{n-1}\sum_{i=1}^{2^m}\sum_{j=2i-1}^{2i} \mathsf{E}[I^o(m)\delta_k(X_{m+1,j})|X_{m,i}]\\
&= 2\sum_{m=0}^{n-1}\sum_{i=1}^{2^m} I^o(m)Q^o(k|X_{m,i})\\
&= 2\sum_{m=0}^{n-1}\sum_{i=1}^{2^m}\sum_{l=0}^{1} I^o(m)\delta_l(X_{m,i})Q^o(k|l)\\
&= 2\sum_{l=0}^{1} S_{n-1}^o(l)Q^o(k|l),
\end{aligned}$$

并且 $\lim\limits_{n\to\infty}|T^o_{n-1}|/|T^e_n|=1/2$, 又

$$\lim_{n\to\infty}\sup\frac{1}{|T^e_n|}\times\sum_{m=0}^{n-1}\sum_{i=1}^{2^m}\sum_{j=2i-1}^{2i}\mathsf{E}[|I^o(m)\delta_k(X_{m+1,j})||X_{m,i}]\le\lim_{n\to\infty}\frac{1}{|T^e_n|}\times|T^{(n)}|=\frac{3}{2}<+\infty,$$

故满足(2.6)式, 由引理2.3可得(2.9)式成立. 同理可证(2.10). □

定理 2.2 设$R_1,R_2,S^o_n(i),S^e_n(i),T^o_n$及$T^e_n$如前定义, $\pi^e=(\pi^e(0),\pi^e(1))$与$\pi^o=(\pi^o(0),\pi^o(1))$分别是$R_1,R_2$的平稳分布, 则有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S^o_n(j)}{|T^o_n|}=\pi^o(j),\qquad\mu_{Q^e,Q^o}-\text{a.e.},\tag{2.11}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S^e_n(j)}{|T^e_n|}=\pi^e(j),\qquad\mu_{Q^e,Q^o}-\text{a.e.}.\tag{2.12}$$

证明: 对(2.9)式两边同时乘以$Q^e(j|k)$并且使得k从0到1求和, 后有

$$\lim_{n\to\infty}\Big\{\Big[\sum_{k=0}^{1}\frac{S^e_n(k)}{|T^e_n|}Q^e(j|k)-\frac{S^o_{n+1}(j)}{|T^o_{n+1}|}\Big]+\Big[\frac{S^o_{n+1}(j)}{|T^o_{n+1}|}-\frac{1}{|T^o_{n-1}|}\sum_{k=0}^{1}\sum_{l=0}^{1}S^o_{n-1}(l)Q^o(k|l)Q^e(j|k)\Big]\Big\}=0.$$

再次运用(2.10)式后有

$$\lim_{n\to\infty}\Big\{\frac{S^o_{n+1}(j)}{|T^o_{n+1}|}-\frac{1}{|T^o_{n-1}|}\sum_{l=0}^{1}S^o_{n-1}(l)R_1(j|l)\Big\}=0,\qquad\mu_{Q^e,Q^o}-\text{a.e.}.$$

由归纳法可证

$$\lim_{n\to\infty}\Big\{\frac{S^o_{n+2N-1}(j)}{|T^o_{n+2N-1}|}-\frac{1}{|T^o_{n-1}|}\sum_{l=0}^{1}S^o_{n-1}(l)R^N_1(j|l)\Big\}=0,\qquad\mu_{Q^e,Q^o}-\text{a.e.}.$$

在上式中, 由于

$$\frac{1}{|T^o_{n-1}|}\sum_{l=0}^{1}S^o_{n-1}(l)=\frac{1}{|T^o_{n-1}|}|T^o_{n-1}|=1,$$

又由(2.8)式可知 $\lim\limits_{N\to\infty}R^N_1(j|l)=\pi^o(j)$, 故当$n=2m$时, 有 $\lim\limits_{m\to\infty}S^o_{2m}(j)/|T^o_{2m}|=\pi^o(j)$, 当$n=2m+1$时, 有 $\lim\limits_{m\to\infty}S^o_{2m+1}(j)/|T^o_{2m+1}|=\pi^o(j)$. 由此可知(2.11)式成立. 同理可证(2.12)式. □

推论 2.1[7] 设$\mu_{Q^e,Q^o},S^e_n(k),S^o_n(k)$及$\pi^e(k),\pi^o(k)$如前定义, 则有

$$\lim_{m\to\infty}\frac{S^o_{2m}(k)}{|T^{(2m)}|}=\frac{1}{3}\pi^o(k),\qquad\mu_{Q^e,Q^o}-\text{a.e.},\tag{2.13}$$

$$\lim_{m\to\infty}\frac{S^o_{2m+1}(k)}{|T_{2m+1}|}=\frac{2}{3}\pi^o(k),\qquad\mu_{Q^e,Q^o}-\text{a.e.},\tag{2.14}$$

$$\lim_{m\to\infty}\frac{S^e_{2m}(k)}{|T_{2m}|}=\frac{2}{3}\pi^e(k),\qquad\mu_{Q^e,Q^o}-\text{a.e.},\tag{2.15}$$

$$\lim_{m\to\infty}\frac{S^e_{2m+1}(k)}{|T_{2m+1}|}=\frac{1}{3}\pi^e(k),\qquad\mu_{Q^e,Q^o}-\text{a.e.}.\tag{2.16}$$

证明: 由(2.11)可知:

$$\lim_{m\to\infty}\frac{S^o_{2m}(k)}{|T^o_{2m}|}=\pi^o(k),\qquad \mu_{Q^e,Q^o}-\text{a.e.},$$

而

$$\lim_{m\to\infty}\frac{|T^o_{2m}|}{|T^{(2m)}|}=\lim_{m\to\infty}\frac{2(1-2^{2m})}{1-2^2}\cdot\frac{1-2}{1-2^{2m+1}}=\frac{1}{3},$$

故(2.13)式成立. 又由于

$$\lim_{m\to\infty}\frac{|T^o_{2m+1}|}{|T^{(2m+1)}|}=\lim_{m\to\infty}\frac{2(1-2^{2(m+1)})}{1-2^2}\cdot\frac{1-2}{1-2^{2m+2}}=\frac{2}{3},$$

由此可知(2.14)式得证. 同理可证(2.15), (2.16)式. □

定理 2.3 设μ_{Q^e,Q^o}如定义1.3, $S^e_n(k,l)$, $S^o_n(k,l)$分别表示随机序偶集

$$\{(X_{m,i},X_{m+1,j}),\ 0\le m\le n-1,\ m\text{ 为偶数},\ 1\le i\le 2^m,\ 2i-1\le j\le 2i,\ n\ge 2\},$$
$$\{(X_{m,i},X_{m+1,j}),\ 0\le m\le n-1,\ m\text{ 为奇数},\ 1\le i\le 2^m,\ 2i-1\le j\le 2i,\ n\ge 2\}$$

中数偶(k,l)的个数, 则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{|T^o_n|}\{S^e_n(k,l)-2S^e_{n-1}(k)Q^e(l|k)\}=0, \tag{2.17}$$
$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{|T^e_n|}\{S^o_n(k,l)-2S^o_{n-1}(k)Q^o(l|k)\}=0. \tag{2.18}$$

证明: 在引理2.3中取$g_n(x,y)=I^e(n)\delta_k(x)\delta_l(y)$, 显见$g_n(x,y)$为有界函数, 且$|g_n(x,y)|\le 1$, 取$a_n$为$|T^o_n|$, 则有

$$\begin{aligned}
F_n(\omega)&=\sum_{m=0}^{n-1}\sum_{i=1}^{2^m}\sum_{j=2i-1}^{2i}g_m(X_{m,i},X_{m+1,j})\\
&=\sum_{m=0}^{n-1}\sum_{i=1}^{2^m}\sum_{j=2i-1}^{2i}I^e(m)\delta_k(X_{m,i})\delta_l(X_{m+1,j})\\
&=S^e_n(k,l),\\
G_n(\omega)&=\sum_{m=0}^{n-1}\sum_{i=1}^{2^m}\sum_{j=2i-1}^{2i}\mathsf{E}[g_m(X_{m,i},X_{m+1,j})|X_{m,i}]\\
&=\sum_{m=0}^{n-1}\sum_{i=1}^{2^m}\sum_{j=2i-1}^{2i}\mathsf{E}[I^e(m)\delta_k(X_{m,i})\delta_l(X_{m+1,j})|X_{m,i}]\\
&=2\sum_{m=0}^{n-1}\sum_{i=1}^{2^m}I^e(m)\delta_k(X_{m,i})Q^e(l|k)\\
&=2S^e_{n-1}(k)Q^e(l|k),
\end{aligned}$$

又

$$
\begin{aligned}
& \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} \times \sum_{m=0}^{n-1} \sum_{i=1}^{2^m} \sum_{j=2i-1}^{2i} \mathsf{E}[|g_m(X_{m,i}, X_{m+1,j})||X_{m,i}] \\
= & \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{|T_n^o|} \times \sum_{m=0}^{n-1} \sum_{i=1}^{2^m} \sum_{j=2i-1}^{2i} \mathsf{E}[|I^e(m)\delta_k(X_{m,i})\delta_l(X_{m+1,j})||X_{m,i}] \\
\le & \lim_{n\to\infty} \frac{1}{|T_n^o|} \times |T^{(n)}| \\
= & \ 3 < +\infty,
\end{aligned}
$$

故满足(2.6)式, 由引理2.3可得(2.17)式成立, 同理可证(2.18)式. □

定理 2.4　设$R_1, R_2, S_n^e(k,l), S_n^o(k,l)$及$\mu_{Q^e,Q^o}$如前定义, 则有

$$
\lim_{n\to\infty} \frac{S_n^e(k,l)}{|T_n^o|} = \pi^e(k)Q^e(l|k), \qquad \mu_{Q^e,Q^o} - \text{a.e.}, \tag{2.19}
$$

$$
\lim_{n\to\infty} \frac{S_n^o(k,l)}{|T_n^e|} = \pi^o(k)Q^o(l|k), \qquad \mu_{Q^e,Q^o} - \text{a.e.}. \tag{2.20}
$$

证明:　由(2.17)式有

$$
\lim_{m\to\infty} \frac{S_n^e(k,l)}{|T_n^o|} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{|T_n^o|} S_{n-1}^e(k) Q^e(l|k) = \lim_{n\to\infty} \frac{S_{n-1}^e(k)}{|T_{n-1}^e|} Q^e(l|k), \tag{2.21}
$$

又由(2.12)式可知

$$
\lim_{n\to\infty} \frac{S_{n-1}^e(k)}{|T_{n-1}^e|} = \pi^e(k),
$$

结合(2.21)式可知(2.19)式成立, 同理可证(2.20)式. □

推论 2.2[7]　设μ_{Q^e,Q^o}, $S_n^e(k,l)$及$S_n^o(k,l)$如前定义, 则

$$
\lim_{m\to\infty} \frac{S_{2m}^e(k,l)}{|T^{(2m)}|} = \frac{1}{3}\pi^e(k)Q^e(l|k), \qquad \mu_{Q^e,Q^o} - \text{a.e.}, \tag{2.22}
$$

$$
\lim_{m\to\infty} \frac{S_{2m+1}^e(k,l)}{|T^{(2m+1)}|} = \frac{2}{3}\pi^e(k)Q^e(l|k), \qquad \mu_{Q^e,Q^o} - \text{a.e.}, \tag{2.23}
$$

$$
\lim_{m\to\infty} \frac{S_{2m}^o(k,l)}{|T^{(2m)}|} = \frac{2}{3}\pi^o(k)Q^o(l|k), \qquad \mu_{Q^e,Q^o} - \text{a.e.}, \tag{2.24}
$$

$$
\lim_{m\to\infty} \frac{S_{2m+1}^o(k,l)}{|T^{(2m+1)}|} = \frac{1}{3}\pi^o(k)Q^o(l|k), \qquad \mu_{Q^e,Q^o} - \text{a.e.}. \tag{2.25}
$$

证明:　由(2.19)式可知:

$$
\lim_{m\to\infty} \frac{S_{2m}^e(k,l)}{|T_{2m}^o|} = \pi^e(k)Q^e(l|k), \qquad \mu_{Q^e,Q^o} - \text{a.e.},
$$

又

$$\lim_{m\to\infty}\frac{|T_{2m}^o|}{|T^{(2m)}|}=\lim_{m\to\infty}\frac{2(1-2^{2m})}{1-2^2}\cdot\frac{1-2}{1-2^{2m+1}}=\frac{1}{3},$$

故(2.22)式得证, 同理可得(2.23), (2.24), (2.25)式成立. □

参 考 文 献

[1] Spitzer, F., Markov random fields on an infinite tree, *Ann. Probab.*, **3**(1975), 387–398.

[2] Berger, T. and Ye, Z., Entropic aspects of random fields on trees, *IEEE Trans. Inform. Theory*, **36**(1990), 1006–1018.

[3] Ye, Z. and Berger, T., *Information Measures for Discrete Random Variables*, Science Press, Beijing, 1998.

[4] Ye, Z. and Berger, T., Asymptotic equipartition property for random fields on trees, *Chinese Journal of Applied Probability and Statistics*, **9**(1992), 296–309.

[5] Yang, W.G. and Liu, W., Strong law of large numbers and Shannon-McMillan theorem for Markov chain fields on trees, *IEEE Trans. Inform. Theory*, **48**(2002), 318–321.

[6] 刘文, 王丽英, 杨卫国, 二进树上奇偶马氏链场的若干强极限定理与Shannon-McMillan定理的一种逼近, 应用概率统计, **18**(2002), 278–285.

[7] 杨卫国, 叶中行, Cayley树图上奇偶马氏链场的渐近均分割性, 应用概率统计, **22**(2006), 36–42.

[8] Yang, W.G. and Ye, Z., The asymptotic equipartition property for nonhomogeneous markov chains indexed by a homogeneous tree, *IEEE Trans. Inform. Theory*, **53**(2007), 3275–3280.

Strong Limit Theorems for Even-Odd Markov Chain Fields on a Cayley Tree

Pan Heng[1,2]　　Yang Weiguo[1]

([1] *Faculty of Science, Jiangsu University, Zhenjiang, 212013*)

([2] *Suzhou Blue Tassel School, Suzhou, 215104*)

In this paper, we first study strong limit theorems for even-odd Markov chain fields on a Cayley tree by using the method of constructing martingale. Then, we give strong laws of large numbers on the frequencies of states for even-odd Markov chain fields on a Cayley tree, which we extend a known result.

Keywords: Even-odd Markov chain fields, strong limit theorems, strong laws of large numbers.

AMS Subject Classification: 60F15, 60J10.