B值随机元阵列加权 and 的完全收敛性 *

张丽娜 闫广州 李春兰

(河北农业大学理学院, 保定, 071001)

摘 要

在随机元阵列随机有界的条件下, 得到了行间独立B值随机元阵列加权 and 的完全收敛性成立的充分条件, 延伸了文献[9]的主要结果和文献[6]的部分结果.

关键词: 完全收敛性, 加权 and, B值随机元, 正则变化函数.

学科分类号: O211.4.

§1. 引 言

1947年, Hsu和Robbins提出了实值随机变量完全收敛性的概念, 时至今日, i.i.d.随机变量序列的完全收敛性问题已解决的相当完美, 如Baum和Katz(1965), 白志东和苏淳(1985)的研究工作等. 近年来, 一些学者致力于B值独立随机元的完全收敛性的研究, 得到了若干有价值的结果. 如杨小云(1993)研究了独立B值随机元完全收敛性; 梁汉营等(1998)通过引入慢变化函数对其进行研究; 王定成和苏淳(2004)讨论了B值独立同分布随机元部分和的矩完全收敛成立的充要条件; Hu等(1999)提出了B值随机元阵列加权 and 的完全收敛性成立的一般条件, 但其证明比较烦琐, 后来Sung(2006)对该结果进行了延伸, 并对其证明方法进行了改进.

本文首先假定了一个适当的函数类, 然后利用类似于[8]中定理E的证明思路, 并结合随机优化方法, 讨论了行间独立的B值随机元阵列的完全收敛性问题, 延伸了[9]的主要结果和[6]的部分结果.

设 $(B, \|\cdot\|)$ 是实可分的Banach空间, $\{V_{nk}, k \geq 1, n \geq 1\}$ 是定义在同一个概率空间上的行间独立的B值随机元阵列, $S_n = \sum_{k=1}^n a_{nk} V_{nk}$.

定义 1.1 称B值随机元阵列 $\{V_{nk}, k \geq 1, n \geq 1\}$ 随机有界于实值随机变量 X , 如果存在常数 $0 < D < \infty$, 使得对任意的 $x > 0, n \geq 1$ 和 $k \geq 1$, 有

$$P(\|V_{nk}\| > x) \leq DP(|DX| > x).$$

不失一般性, 在本文中我们取 $D = 1$.

*河北省自然科学基金项目(E2008000357, F2010001044)和河北农业大学非生命学科基金项目资助.
本文2008年1月17日收到, 2010年9月27日收到修改稿.

定义 1.2 设 $p < -1$, 称定义于 $[0, \infty)$ 上正的不减函数 $h(x)$ 属于函数类 H_p , 如果对所有的 $\lambda > 0$,

$$\limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{h(\lambda x)}{h(x)} < \infty,$$

且

$$\limsup_{y \rightarrow \infty} \int_y^\infty x^p h(x) dx / [y^{p+1} h(y)] < \infty.$$

由[11]中的命题1.5.8和1.5.10以及定理1.5.11可知, 所有局部有界且单调不降的正的慢变化函数均属于 H_p . 设 $h(x)$ 是指数为 ρ 的正则变化函数, 即

$$\limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{h(\lambda x)}{h(x)} = \lambda^\rho.$$

若 $h(x) > 0$, 且 $h(x)$ 是单调不降的局部有界函数, 则对 $\rho > 0, p < -(\rho + 1)$, 有 $h(x) \in H_p$.

易知, $x > 0$ 时, $\log^\mu(1+x)$ ($\mu > 0$) 为正的慢变化函数且单调不降, 于是 $\log^\mu(1+x) \in H_p$; x^μ 和 $x^\mu \log^\nu(1+x)$ 在 $\mu > 0, \nu < -(\mu + 1)$ 时为正则变化函数且属于 H_p , 其中 $p < -(\mu + 1)$, $\log x$ 表示 $\max(1, \ln x)$.

在本文中, $C > 0$ 在不同的地方表示不同的常数.

§2. 主要结果

在介绍主要结果之前, 首先介绍两个引理.

引理 2.1 设 $\{V_{nk}, k \geq 1, n \geq 1\}$ 是行间独立的B值随机元阵列, 且随机有界于实值随机变量 X , $\{a_{nk}, k \geq 1, n \geq 1\}$ 是实数阵列. 设 $p < -1, h(x) \in H_p$. 若对某个 $r > 0$,

$$\sup_{k \geq 1} |a_{nk}| = O(n^{-r}), \quad (2.1)$$

且对 $0 < \theta < 2$, 存在 $\alpha > 0$ 使得 $\theta + \alpha/r < 2$, 有

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}|^\theta = O(n^\alpha), \quad (2.2)$$

则

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} h(n) \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}(\|a_{nk} V_{nk}\| > 1) \leq C E|X|^{\theta + \alpha/r} h(|X|^{1/r}).$$

证明: 利用文献[9]中的引理2, 我们有

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}(\|a_{nk} V_{nk}\| > 1) \leq C n^\alpha \sum_{k=n}^{\infty} k^{r\theta} \mathbf{P}(k < |X|^{1/r} \leq k+1).$$

由于 $h(x)$ 是正的单调不降函数, 所以

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1}h(n) \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}(\|a_{nk}V_{nk}\| > 1) \\ \leq & C \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1+\alpha}h(n) \sum_{k=n}^{\infty} k^{r\theta} \mathbf{P}(k < |X|^{1/r} \leq k+1) \\ \leq & C \sum_{k=1}^{\infty} k^{r\theta} \mathbf{P}(k < |X|^{1/r} \leq k+1) \sum_{n=1}^k n^{-1+\alpha}h(n) \\ \leq & C \sum_{k=1}^{\infty} k^{r\theta+\alpha}h(k) \mathbf{P}(k < |X|^{1/r} \leq k+1) \leq CE|X|^{\theta+\alpha/r}h(|X|^{1/r}). \quad \square \end{aligned}$$

引理 2.2 设 $\{V_{nk}, k \geq 1, n \geq 1\}$ 是行间独立的B值随机元阵列, 且随机有界于实值随机变量 X , $\{a_{nk}, k \geq 1, n \geq 1\}$ 是实数阵列. 设 $p < -1$, $h(x) \in H_p$. 令 $U_{nk} = V_{nk}I(\|a_{nk}V_{nk}\| \leq 1)$, $U_{nk}^{(1)} = U_{nk}I(\|U_{nk}\| > n^r)$, $U_{nk}^{(2)} = U_{nk}I(\|U_{nk}\| \leq n^r)$. 如果(2.1)和(2.2)成立, 那么在 $0 < \theta < 2$ 的情况下, 有

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1}h(n) \sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}|^{\theta} \mathbf{E}\|U_{nk}^{(1)}\|^{\theta} \leq CE|X|^{\theta+\alpha/r}h(|X|^{1/r}), \quad (2.3)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1}h(n) \sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}|^2 \mathbf{E}\|U_{nk}^{(2)}\|^2 \leq C \max\{\mathbf{E}|X|^{2+\alpha/r}h(|X|^{1/r}), \mathbf{E}|X|^{\theta+\alpha/r}h(|X|^{1/r})\}. \quad (2.4)$$

证明: 首先证明(2.3). 因为 $\|U_{nk}\| \leq \|V_{nk}\|$, 所以对任意固定的 $n \geq 1$, $r > 0$, 有 $I(\|U_{nk}\| > n^r) \leq I(\|V_{nk}\| > n^r)$. 由于 $\{V_{nk}, n \geq 1, k \geq 1\}$ 随机有界于变量 X , 所以

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\|U_{nk}^{(1)}\|^{\theta} & \leq \mathbf{E}[\|V_{nk}\|^{\theta} I(\|V_{nk}\| > n^r)] \leq \mathbf{E}|X|^{\theta} I(|X| > n^r) + n^{r\theta} \mathbf{P}(|X| > n^r) \\ & \leq CE|X|^{\theta} I(|X| > n^r). \end{aligned} \quad (2.5)$$

利用(2.5)和 $h(x) \in H_p$, 我们得到

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1}h(n) \sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}|^{\theta} \mathbf{E}\|U_{nk}^{(1)}\|^{\theta} \\ \leq & C \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1}h(n) \sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}|^{\theta} \mathbf{E}|X|^{\theta} I(|X| > n^r) \\ \leq & C \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1+\alpha}h(n) \sum_{k=n}^{\infty} \mathbf{E}|X|^{\theta} I(k^r < |X| \leq (k+1)^r) \\ \leq & C \sum_{k=1}^{\infty} k^{\alpha}h(k) \mathbf{E}|X|^{\theta} I(k^r < |X| \leq (k+1)^r) \leq CE|X|^{\theta+\alpha/r}h(|X|^{1/r}). \end{aligned}$$

其次, 我们证明(2.4). 事实上, 由 $\|U_{nk}\| \leq \|V_{nk}\|$ 易知

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\|U_{nk}^{(2)}\|^2 & \leq \mathbf{E}\|U_{nk}\|^2 = \mathbf{E}\|U_{nk}\|^2 I(\|V_{nk}\| \leq 1) + \mathbf{E}\|U_{nk}\|^2 I(\|V_{nk}\| > 1) \\ & \leq 1 + \mathbf{E}\|V_{nk}\|^2 = 1 + \mathbf{E}\|V_{nk}\|^2 I(\|V_{nk}\| > n^r) + \mathbf{E}\|V_{nk}\|^2 I(\|V_{nk}\| \leq n^r). \end{aligned}$$

于是按上述分解情况, $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1}h(n) \sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}|^2 \mathbf{E}\|U_{nk}^{(2)}\|^2$ 可以放大为三个部分, 分别记为 I_1, I_2, I_3 , 即

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1}h(n) \sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}|^2 \mathbf{E}\|U_{nk}^{(2)}\|^2 \leq I_1 + I_2 + I_3,$$

其中

$$\begin{aligned} I_1 &= \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1}h(n) \sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}|^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1}h(n) \left(\sup_{k \geq 1} |a_{nk}| \right)^{2-\theta} \sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}|^{\theta} \\ &\leq C \sum_{n=1}^{\infty} h(n) n^{-1-r(2-\theta-\alpha/r)} < \infty. \end{aligned}$$

由(2.3)的推导过程可知, (2.3)对 $\theta = 2$ 同样成立, 即

$$I_2 = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1}h(n) \sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}|^2 \mathbf{E}\|V_{nk}\|^2 I(\|V_{nk}\| > n^r) \leq C \mathbf{E}|X|^{2+\alpha/r} h(|X|^{1/r}).$$

利用 $\{V_{nk}\}$ 的随机有界性以及条件(2.1)和(2.2),

$$\begin{aligned} I_3 &= \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1}h(n) \sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}|^2 \mathbf{E}\|V_{nk}\|^2 I(\|V_{nk}\| \leq n^r) \\ &\leq C \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1}h(n) \left(\sup_{k \geq 1} |a_{nk}| \right)^{2-\theta} \sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}|^{\theta} [n^{2r} \mathbf{P}(|X| > n^r) + \mathbf{E}|X|^2 I(|X| \leq n^r)] \\ &\leq C \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1+r\theta+\alpha} h(n) \mathbf{P}(|X| > n^r) + C \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1-r(2-\theta)+\alpha} h(n) \mathbf{E}|X|^2 I(|X| \leq n^r) \\ &= I_4 + I_5. \end{aligned}$$

易知

$$I_4 \leq C \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1+\alpha} h(n) \mathbf{E}|X|^{\theta} I(|X| > n^r) \leq C \mathbf{E}|X|^{\theta+\alpha/r} h(|X|^{1/r}).$$

利用 H_p 的定义, 对 $p < -1$ 和充分大的 k 有 $\sum_{n=k}^{\infty} n^p h(n) \leq C k^{p+1} h(k)$. 于是在已知条件下,

$$\begin{aligned} I_5 &= C \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1-r(2-\theta)+\alpha} h(n) \mathbf{E}|X|^2 I(|X| \leq n^r) \\ &\leq C \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{E}|X|^2 I[(k-1)^r < |X| \leq k^r] \sum_{n=k}^{\infty} n^{-1-r(2-\theta)+\alpha} h(n) \\ &\leq C \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{E}|X|^2 I[(k-1)^r < |X| \leq k^r] \sum_{n=k-1}^{\infty} n^{-1-r(2-\theta)+\alpha} h(n) \\ &\leq C \sum_{k=1}^{\infty} (k-1)^{-r(2-\theta)+\alpha} h(k-1) \mathbf{E}|X|^2 I[(k-1)^r < |X| \leq k^r] \\ &\leq C \mathbf{E}|X|^{\theta+\alpha/r} h(|X|^{1/r}). \end{aligned}$$

因此联立上述表达式可得,

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} h(n) \sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}|^2 \mathbf{E} \|U_{nk}^{(2)}\|^2 \\ & \leq I_1 + I_2 + I_3 \leq I_1 + I_2 + I_4 + I_5 \\ & \leq C \max\{\mathbf{E}|X|^{2+\alpha/r} h(|X|^{1/r}), \mathbf{E}|X|^{\theta+\alpha/r} h(|X|^{1/r})\}. \quad \square \end{aligned}$$

定理 2.1 在引理2.2的条件下, 如果 $\mathbf{E}|X|^{2+\alpha/r} h(|X|^{1/r}) < \infty$, 且 $S_n \rightarrow 0$ 以概率. 那么对任意 $\varepsilon > 0$, 有

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} h(n) \mathbf{P}(\|S_n\| > \varepsilon) < \infty. \quad (2.6)$$

证明: 由于 $S_n \rightarrow 0$ 以概率, 因此可以假定 $\{V_{nk}, k \geq 1, n \geq 1\}$ 是对称的. 于是对任意 $\varepsilon > 0$,

$$\mathbf{P}(\|S_n\| > \varepsilon) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}(\|a_{nk} V_{nk}\| > 1) + \mathbf{P}\left[\left\|\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} V_{nk} I(\|a_{nk} V_{nk}\| \leq 1)\right\| > \varepsilon\right].$$

若 $1 \leq s < t$, $\mathbf{E}|X|^t < \infty$, 则 $\mathbf{E}|X|^s < \infty$, 所以在已知条件下有 $\mathbf{E}|X|^{\theta+\alpha/r} h(|X|^{1/r}) < \infty$. 因此利用引理2.1得

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} h(n) \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}(\|a_{nk} V_{nk}\| > 1) \leq C \mathbf{E}|X|^{\theta+\alpha/r} h(|X|^{1/r}) < \infty. \quad (2.7)$$

于是要想得到(2.6), 只需证明对任意的 $\varepsilon > 0$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} h(n) \mathbf{P}\left[\left\|\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} V_{nk} I(\|a_{nk} V_{nk}\| \leq 1)\right\| > \varepsilon\right] < \infty.$$

也即只需证明对 $q = 1, 2$ 和任意 $\varepsilon > 0$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} h(n) \mathbf{P}\left(\left\|\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} U_{nk}^{(q)}\right\| > \varepsilon\right) < \infty. \quad (2.8)$$

利用 $S_n \rightarrow 0$ 以概率, 以及引理2.2得

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} h(n) \mathbf{P}\left(\left\|\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} U_{nk}^{(1)}\right\| > \varepsilon\right) \\ & \leq C \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} h(n) \mathbf{E}\left\|\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} U_{nk}^{(1)}\right\|^{\theta} \leq C \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} h(n) \sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}|^{\theta} \mathbf{E}\|U_{nk}^{(1)}\|^{\theta} \\ & \leq C \mathbf{E}|X|^{\theta+\alpha/r} h(|X|^{1/r}) < \infty. \end{aligned}$$

并且

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} h(n) \mathbf{P}\left(\left\|\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} U_{nk}^{(2)}\right\| > \varepsilon\right) \\ & \leq C \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} h(n) \mathbf{E}\left\|\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} U_{nk}^{(2)}\right\|^2 \leq C \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} h(n) \sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}|^2 \mathbf{E}\|U_{nk}^{(2)}\|^2 \\ & \leq C \max\{\mathbf{E}|X|^{2+\alpha/r} h(|X|^{1/r}), \mathbf{E}|X|^{\theta+\alpha/r} h(|X|^{1/r})\} < \infty. \end{aligned}$$

联立以上表达式, 容易得到(2.8), 从而得到(2.6). 定理证毕. $\square$

推论 2.1 设 $\{V_{nk}, k \geq 1, n \geq 1\}$ 和 $\{a_{nk}, k \geq 1, n \geq 1\}$ 如引理2.2所述. 设 $h(x) > 0$ 是指数为 ρ 的局部有界的正则变化函数且单调不降, 其中 $\rho \geq 0, x \in [0, \infty)$. 如果下列条件成立:

- (1) 对 $r > 0, \sup_{k \geq 1} |a_{nk}| = O(n^{-r});$
 (2) 对 $0 < \theta < 2,$ 存在 $\alpha > 0$ 使得 $2r - \theta r - \alpha > \rho,$ 有

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}|^{\theta} = O(n^{\alpha}), \quad \text{且 } E|X|^{2+\alpha/r} h(|X|^{1/r}) < \infty;$$

- (3) $S_n \rightarrow 0$ 以概率.

那么对任意 $\varepsilon > 0,$ 有 $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} h(n) P(\|S_n\| > \varepsilon) < \infty.$

证明: 由文献[11]中的定理1.5.11知, 指数为 ρ 的正则变化函数满足

$$\limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{h(\lambda x)}{h(x)} = \lambda^{\rho}.$$

若 $h(x) > 0,$ 且 $h(x)$ 是单调不降的局部有界函数, 则对 $\rho > 0, p < -(\rho + 1),$ 有 $h(x) \in H_p.$

几乎重复定理2.1的证明过程, 即可得到该推论的结果, 故以下证明略. $\square$

注记 1 在推论2.1中取 $\rho = 0,$ 则 $h(x)$ 为慢变函数, 特别的, 令 $h(x) = \log(1 + x),$ 则可得文献[9]中的主要结果.

注记 2 设 $h(x)$ 为慢变函数, 取 $r > 1/2,$ 使得 $\sup_{k \geq 1} |a_{nk}| = O(n^{-r}).$ 对 $0 < \theta < 2,$ 存在 $\alpha > 0$ 使得 $\theta + \alpha/r = t \leq 1/r,$ 有 $\sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}|^{\theta} = O(n^{\alpha}).$ 若 $E|X|^t h(|X|^t) < \infty,$ 且 $S_n \rightarrow 0$ 以概率. 那么对任意 $\varepsilon > 0,$ 有

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} h(n) P(\|S_n\| > \varepsilon) < \infty.$$

注记 3 在注记2中令 $a_{nk} = n^{-1/t}, 0 < t < 2,$ 取 $\theta = t, \alpha = 0.$ 如果 $E|X|^t h(|X|^t) < \infty,$ 且 $n^{-1/t} \sum_{k=1}^n V_{nk} \rightarrow 0$ 以概率, 那么对任意 $\varepsilon > 0,$ 有

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} h(n) P\left(\left\| \sum_{k=1}^n V_{nk} \right\| > \varepsilon n^{1/t}\right) < \infty.$$

这正是文献[6]中定理2.1 $r = 1$ 的情况.

注记 4 文中定理2.1对[8]中的矩条件 $E|X|^{\theta+\alpha/r} \log^{\rho}(x) < \infty$ 进行了延伸, 函数范围扩大了, 但不足的是 θ 的范围在原来的基础上增加了 $\theta = 2.$

致谢 非常感谢审稿专家提出的宝贵意见和建议, 以及编辑先生的辛勤工作.

参 考 文 献

- [1] Hsu, P.L. and Robbins, H., Complete convergence and the law of large numbers, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, **33(2)**(1947), 25–31.
- [2] Baum, L.E. and Katz, M., Convergence rate in the law of large numbers, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **120(1)**(1965), 108–123.
- [3] 白志东, 苏淳, 关于独立和的完全收敛性, *中国科学, A辑*, **(5)**(1985), 399–412.
- [4] 杨小云, 一类独立B值随机元的完全收敛性, *数学学报*, **36(6)**(1993), 817–825.
- [5] 王定成, 苏淳, B值独立同分布随机元序列的矩完全收敛性, *应用数学学报*, **27(3)**(2004), 440–448.
- [6] 梁汉营, 薛占熬, 牛司丽, B值随机元阵列的完全收敛性及大数定律, *数学物理学报*, **18(1)**(1998), 89–96.
- [7] Hu, T.-C., Rosalsky, A., Szyndal, D. and Volodin, A.I., On Complete convergence for arrays of rowwise independent random elements in Banach spaces, *Stoch. Anal. Appl.*, **17(6)**(1999), 963–992.
- [8] Chen, P., Sung, S.H. and Volodin, A.I., Rate of complete convergence for arrays of Banach space valued random elements, *S. Adv. Math.*, **16(3)**(2006), 1–14.
- [9] Sung, S.H. and Volodin, A.I., On the rate of complete convergence for weighted sums of arrays of random elements, *J. Korean Math.*, **43(4)**(2006), 815–828.
- [10] Ahmed, S.E., Giuliano Antonini R. and Volodin, A.I., On the rate of complete convergence for weighted sums of arrays of Banach space valued random elements with application to moving average processes, *Statist. Probab. Lett.*, **58(2)**(2002), 185–194.
- [11] Bingham, N.H., Goldie, C.M. and Teugels, J.L., *Regularly Varying*, Cambridge University Press, Cambridge, 1987.

Complete Convergence for Weighted Sums of Arrays of B-Valued Random Elements

ZHANG LINA YAN GUANGZHOU LI CHUNLAN

(College of Science, Agricultural University of Hebei, Baoding, 071001)

We obtain some sufficient conditions of complete convergence for Weighted Sums of Arrays of B-Valued Random Elements which are stochastically dominated by a random variable. Some results in [9] and [6] are extended.

Keywords: Complete convergence, weighted sums, B-valued random elements, regular varying functions.

AMS Subject Classification: 60B12, 60F15.