应用概率统计 第二十七卷
第三期 2011年6月

Chinese Journal of Applied Probability
and Statistics Vol.27 No.3 Jun. 2011

内部信息下的平方套期保值策略 *

杨建奇 肖庆宪

(上海理工大学管理学院, 上海, 200093)

摘 要

建立了内部信息市场模型, 提出并解决了内部信息投资者的平方最优套期保值问题. 首先利用初始滤波扩张方法给出了内部信息市场中风险资产的价格动态. 其次利用Itô公式和Galtchouk-Kunita-Watanabe分解给出了最优策略的显式表示.

关键词: 内部信息, 套期保值, 跳扩散模型, 滤波扩张.

学科分类号: O211.6, F830.9.

§1. 引 言

利用随机分析理论来定量研究金融风险管理问题已成为数理金融的一种重要方法. 国内外对套期保值策略的研究多局限于投资者具有对称信息的假设. 然而现代社会错综复杂,信息不对称现象随处可见. 如上市公司的高级管理人员能够预先知道公司的季度或年度的财务经营情况, 因而能够估计公司股票价格的波动幅度; 上市公司的董事会成员能预先知道公司的增、派股信息; 证券公司的工作人员可能知道大投资者的总体投资意向; 各种政策规划和制定部门的人员可能预先知道各种宏观的经济规划和投资政策, 如税收、利率调整的消息等等. 这些内部信息无疑将会对投资策略的制定产生巨大的影响. 在数理金融研究范畴内, 对这种内部信息的研究通常有两种数学工具可供应用. 一种关键数学工具是由法国概率学校(French School of Probability)发展的滤波扩张技术(the enlargement of filtrations techniques), 另一种是所谓的变差的随机积分理论(Stochastic calculus of variations 或称Malliavin calculus). 利用数学方法来定量研究内部信息问题始于文献[1], 在这篇开创性的论文中他们首次在风险管理问题中利用了初始滤波扩张技术. 文献[2]首次使用布朗运动的滤波扩张(enlarge filtration)技术和概率测度变换方法研究了从内部信息者角度观察的金融市场的刻画问题, 给出了可容许策略和最优策略的标准, 并且给出了判定一个市场投资者是普通投资者人还是内部信息者的统计检验方法. 文献[3]在连续扩散模型下, 考虑了终期财富效用最大为目标的效用最优问题, 利用相对熵表示了两类信息者的最大效用. 文献[4]分析了一个一般信息者和内部信息者共存的金融市场, 分析了金融市场的完备性和风险中性测度(等价鞅测度), 给出了许多有套利的情形和内部信息市场的鞅表示定理. 文献[5]考虑了初始信息的效用无差别价值, 文献[6]比较了内部信息者

*上海市重点学科建设项目(S30501)、上海市哲学社会科学规划项目(2009BJB001)资助.
本文2009年12月20日收到, 2010年8月16日收到修改稿.

与一般信息者的平方套期保值策略之间的差异. 文献[7]针对特殊附加信息(它由不可交易资产价格带来的)下的均方套期保值问题进行了研究, 给出了最优策略的的显示表示. 文献[8]讨论了内部信息者的亏损风险最小套期保值问题. 本文将在投资者初始时刻获得一个内部信息的假设下, 利用滤波扩张方法来讨论了平方最优套期保值策略问题.

§2. 内部信息市场模型

在带流概率空间$\{\Omega, F, \mathcal{F}_t, \mathsf{P}\}$上考率一个金融市场. 我们用Brownian运动和Poisson过程来刻画影响金融市场的随机因素, 更为具体的的, 设$\mathcal{F}_t$是由Brownian运动M_t和Poisson过程N_t生成的自然σ-域流, 它表示一般信息者到t时刻所获得的全部市场信息, 称$\{\Omega, F, \mathcal{F}_t, \mathsf{P}\}$为*一般信息者市场*. 基于该市场信息下的投资策略通常称为完全信息下的投资策略.

假设一个内部信息人士在初始时刻获得了一个一般的投资者到T时刻才知道市场信息. 我们用一个随机变量$L\in\mathcal{F}_T$来刻画该内部信息. 由于投资者的市场行为都是基于他所掌握的市场信息, 因此内部信息人士的投资策略信息集就不再是$\mathcal{F}_t$而应当是$\mathcal{Y}_t$: $\mathcal{Y}_t=\bigcap\limits_{s>t}(\mathcal{F}_t\vee\sigma(L))$. 像这种用$\{\Omega, F, \mathcal{Y}_t, \mathsf{P}\}$来刻画的市场称为*内部信息者市场*. 市场投资者基于这种市场信息集来决定的投资策略称为内部附加信息下的投资策略.

注记 1 内部信息$L\in\mathcal{F}_T$表明我们考虑的内部信息L是一般投资者到终期时刻T才能知道的信息. 内部信息者投资信息集$\mathcal{Y}_t=\bigcap\limits_{s>t}(\mathcal{F}_t\vee\sigma(L))$表明了内部信息者在投资刚开始时刻就已经知道了一般投资者到终期时刻T才能知道的信息, 这也说明了内部信息L名副其实. 从金融的观点讲这些内部信息可以是终期时刻资产价格的波动范围, 或者是股票的终期价格或者是影响股票价格某些具体因素(如公司的经营业绩, 上市公司财务季度报表的公开程度, 具体拟定的某些业务(如市场拓展计划)等)等等. 用数学语言来描述, 这些内部信息可能是影响资产价格的Brownian运动在T时刻的范围或跳过程N在T时刻发生地跳的大小范围或T时刻的某些价格干扰过程(噪声过程)等等.

假定市场上只存在三种资产. 一种是无风险资产(不失一般性, 设无风险资产价格恒为1), 另外两种是风险资产(如股票), 其(折现)价格过程S^1, S^2满足如下的随机微分方程

$$\begin{cases}\mathrm{d}S_t^1=S_{t-}^1(k_t^1\mathrm{d}t+\sigma_t^1\mathrm{d}W_t+\mu_t^1\mathrm{d}M_t),\\ \mathrm{d}S_t^2=S_{t-}^2(k_t^2\mathrm{d}t+\sigma_t^2\mathrm{d}W_t+\mu_t^2\mathrm{d}M_t),\end{cases}\tag{2.1}$$

其中W_t是标准Brownian运动, M_t是强度为λ_t的Poisson过程N_t的补偿过程.

如通常利用滤波扩张方法解决初始扩大信息问题一样, 本文需要如下的假设:

假设 H 对于所有的$A\in(0,T)$存在一个$F_A\otimes B(R)$可测函数$q(A,\cdot)$, 使得对于任意一个上的有界Borel可测函数有

$$\mathsf{E}^{\mathsf{P}}(f(L)|\mathcal{F}_A)=\int_R f(x)q(A,\omega,x)\mathsf{P}_L(\mathrm{d}x),$$

其中$q(A,\omega,x)>0$, $\mathsf{P}\otimes\mathsf{P}_L$ a.s., P_L是L的概率分布.

§3. 内部信息下的平方最优套期保值问题

平方最优套期保值是套期保值的一个重要标准. 它以未定权益H与为此而构建的套期保值策略终期财富差的平方的期望作为风险标准. 也就是说在这种风险标准下, 最佳套期保值策略应当是使得这个期望最小的投资策略. 换句话说, 解决这类问题就是求解一个优化问题

$$\min_{\varphi\in A}\mathsf{E}\Big[H-x-\int_0^T\varphi_t\mathrm{d}S_t\Big]^2,$$

其中A表示自融资策略集合, x是预先给定的初始投资成本.

本文考虑内部附加信息者的平方套期保值问题. 假设投资者在初始时刻获取内部信息$\sigma(L)$后, 利用给定的初始成本$V_0=x<\widetilde{V}_0$ ($\widetilde{V}_0$是上套期保值未定权益H所需的最小初始成本). 具体的, 就是在价格模型下(2.1)下寻找一个$\mathcal{Y}_t$自融资策略使得对冲未定权益H的平方风险最小. 即寻找自融资策略$\widehat{\vartheta}=(\widehat{\vartheta}_t^1,\widehat{\vartheta}_t^2)\in\mathcal{Y}_t$, 使得

$$\mathsf{E}\Big[H-x-\int_0^T\widehat{\vartheta}_t^1\mathrm{d}S_t^1-\int_0^T\widehat{\vartheta}_t^2\mathrm{d}S_t^2\Big]^2=\min\mathsf{E}\Big[H-x-\int_0^T\varphi_t^1\mathrm{d}S_t^1-\int_0^T\varphi_t^2\mathrm{d}S_t^2\Big]^2. \quad (3.1)$$

由于投资者获取的有效信息的变化, 投资者对风险资产的动态变化的把握程度也会有一定的变化, 具体表现在由于投资这获取的信息增多了, 投资者将能更好的把握资产价格的将来动态. 用数学语言来说, 在这部分投资者的眼光中, 风险资产的价格不再是$\mathcal{F}_t$-动态变化, 而应当是$\mathcal{Y}_t$-动态变化. 他的投资策略的构建也将基于信息$\mathcal{Y}_t$和资产价格在$\mathcal{Y}_t$下的动态来进行. 下面我们采用鞅方法来解决这一问题, 首先解决风险资产价格在$\mathcal{Y}_t$下的动态变化问题. 为此我们首先证明一个引理.

引理 3.1 在假设条件(H)下存在一个可测的密度$\mathrm{d}\mathsf{Q}_t/\mathrm{d}x:(w,t,x)\to p(w,t,x)$是一个鞅, 而且对于所有$x\in R$, 有

(i) $p(w,t,x)=p(w,0,x)+\int_0^t\alpha(w,s,x)\mathrm{d}W_s+\int_0^t\beta(w,s,x)\mathrm{d}M_s$, 且对于所有$x\in R$, $\alpha(w,s,x)$和$\beta(w,s,x)$是F-可料的.

(ii) 如果D_t是一个$(\mathcal{F}_t,\mathsf{P})$局部鞅, 且其鞅表示形式为$D_t=D_0+\int_0^t u_s\mathrm{d}W_s+\int_0^t v_s\mathrm{d}M_s$, 那么

$$\overline{D}_t=D_t-\int_0^t\frac{\alpha(w,s,L)+\lambda_s\beta(w,s,L)}{p(w,s,L)}\mathrm{d}s$$

是一个$(\mathcal{Y}_t,\mathsf{P})$局部鞅.

证明: 仅需注意到$\mathrm{d}\langle M\rangle_s=\lambda_s$, 利用文献[9]的命题12即可得证. □

由此引理直接可以得到如下推论

推论 3.1 在引理条件下,

$$\overline{W}_t=W_t-\int_0^t\frac{\alpha(w,s,L)}{p(w,s,L)}\mathrm{d}s$$

是$(\mathcal{Y}_t,\mathsf{P})$ Brownian运动, 同时

$$\overline{M}_t=M_t-\int_0^t\frac{\lambda_s\beta((w,s,L))}{p(w,s,L)}\,\mathrm{d}s$$

是具有$(\mathcal{Y}_t,\mathsf{P})$可料强度$\overline{\lambda}_t=\lambda_t(1+\beta(w,t,L)/p(w,t,L))$的补偿Poisson过程.

定理 3.1 原风险价格过程可以写成$(\Omega,F,\mathcal{Y}_t,\mathsf{P})$上的动态形式

$$\begin{aligned}\mathrm{d}S_t^1&=S_{t-}^1\Big[\Big((\sigma_t^1+\mu_t^1)\frac{a(w,t,L)}{p(w,t,L)}+k_t^1\Big)\mathrm{d}t+\sigma_t^1\mathrm{d}\overline{W}_t+\mu_t^1\mathrm{d}\overline{M}_t\Big],\\ \mathrm{d}S_t^2&=S_{t-}^2\Big[\Big((\sigma_t^2+\mu_t^2)\frac{a(w,t,L)}{p(w,t,L)}+k_t^2\Big)\mathrm{d}t+\sigma_t^2\mathrm{d}\overline{W}_t+\mu_t^2\mathrm{d}\overline{M}_t\Big].\end{aligned}\tag{3.2}$$

证明: 由推论3.1知

$$\overline{W}_t=W_t-\int_0^t\frac{\alpha(w,s,L)}{p(w,s,L)}\,\mathrm{d}s$$

是$(\mathcal{Y}_t,\mathsf{P})$ Brownian运动,

$$\overline{M}_t=M_t-\int_0^t\frac{\lambda_s\beta((w,s,L))}{p(w,s,L)}\,\mathrm{d}s$$

是具有$(\mathcal{Y}_t,\mathsf{P})$可料强度$\overline{\lambda}_t=\lambda_t(1+\beta(w,t,L)/p(w,t,L))$的补偿Poisson过程. 因此由(2.1)可得资产价格过程可以写成$(\Omega,F,\mathcal{Y}_t,\mathsf{P})$上的动态形式为(3.2). □

为表述简单化, 本文后续部分将采用记号$l_t^i=(\sigma_t^i+\mu_t^i)(a(w,t,L)/p(w,t,L))+k_t^i$, $i=1,2$. 接下来证明一个简单但又极其重要的结论, 它是本文求解最优策略的基础.

定理 3.2 在价格模型假设(2.1)下, 内部信息市场$(\Omega,F,\mathcal{Y}_t,\mathsf{P})$存在唯一的等价鞅测度$\mathsf{Q}$, 且$S_t^1,S_t^2$在$\mathsf{Q}$下的动态为

$$\mathrm{d}S_t^1=S_{t-}^1[\sigma_t^1\mathrm{d}W_t^*+\mu_t^1\mathrm{d}M_t^*],\qquad \mathrm{d}S_t^2=S_{t-}^2[\sigma_t^2\mathrm{d}W_t^*+\mu_t^2\mathrm{d}M_t^*],\tag{3.3}$$

其中

$$W^*=\overline{W}_t-\int_0^t\frac{l_t^1u_t^2-l_t^2u_t^1}{u_t^1\sigma_t^2-u_t^2\sigma_t^1}\,\mathrm{d}s$$

是一个$(\mathsf{Q},\mathcal{Y}_t)$-标准Brownian运动, M^*是一个强度为$\lambda_t^*=1-(l_t^1\sigma_t^2-l_t^2\sigma_t^1)/[\overline{\lambda}_t(\mu_t^2\sigma_t^1-\mu_t^2\sigma_t^1)]$的$(\mathsf{Q},\mathcal{Y}_t)$补偿Poisson过程.

证明: 令

$$\varphi_t=\frac{l_t^1u_t^2-l_t^2u_t^1}{u_t^1\sigma_t^2-u_t^2\sigma_t^1},\qquad \nu_t=\frac{l_t^1\sigma_t^2-l_t^2\sigma_t^1}{\lambda_t^*(u_t^1\sigma_t^2-u_t^2\sigma_t^1)}.\tag{3.4}$$

$$Z_T\triangleq\frac{\mathrm{d}\mathsf{Q}}{\mathrm{d}\mathsf{P}}=(1+\nu_t)^{N_T}\exp\Big(-\int_0^T\lambda_t^*\nu_t\mathrm{d}t\Big)\exp\Big(\int_0^T\varphi_t\mathrm{d}\overline{W}_t-\frac{1}{2}\int_0^T\varphi_t^2\mathrm{d}t\Big),\tag{3.5}$$

由Girsanov定理知Q为等价鞅测度, 且在Q下S_t^1,S_t^2的动态为(3.3).

又因为风险资产的数目与随机因素的个数一样, 价格模型(2.1)下一般信息市场$\{\Omega, F, \mathcal{F}_t, \mathsf{P}\}$是一个完备市场, 因而存在唯一的等价鞅测度. 设$\mathsf{Q}$为$(\Omega, F, \mathcal{Y}_t, \mathsf{P})$的等价鞅测度, 则有$\mathsf{E}^{\mathsf{Q}}(S_t^i|\mathcal{Y}_s) = S_s^i$. 由条件期望的平滑性知

$$\mathsf{E}^{\mathsf{Q}}(S_t^i|\mathcal{F}_s) = \mathsf{E}^{\mathsf{Q}}(\mathsf{E}^{\mathsf{Q}}(S_t^i|\mathcal{Y}_s)|\mathcal{F}_s) = \mathsf{E}^{\mathsf{Q}}(S_s^i|\mathcal{F}_s) = S_s^i. \tag{3.6}$$

(3.6)式表明$(\Omega, F, \mathcal{Y}_t, \mathsf{P})$的等价鞅测度$\mathsf{Q}$也一定是一般信息市场$(\Omega, F, \mathcal{F}_t, \mathsf{P})$的等价鞅测度. 所以, 由一般信息市场$(\Omega, F, \mathcal{F}_t, \mathsf{P})$的等价鞅测度的唯一性可知$\mathsf{Q}$的唯一性, 定理得证. □

注记 2 根据资产定价第一基本定理知, 等价鞅测度唯一等价于市场完备. 因此该定理3.2从数学上严格证明了一个很直观的金融事实: 如果拥有少量信息的投资者能够利用现有风险资产复制某未定权益, 那么拥有较多信息的投资者也一定能够复制该未定权益.

注记 3 注意到定理的证明等价鞅测度唯一时, 并没有利用到跳扩散这一具体模型假设, 因此可以断定在更为一般的半鞅模型下如下结论也是成立的: 只要一般信息市场是完备的, 那么内部信息市场也一定是完备的.

注记 4 设

$$Z_t = \mathsf{E}^{\mathsf{P}}\Big[\frac{\mathrm{d}\mathsf{Q}}{\mathrm{d}\mathsf{P}}\Big|\mathcal{Y}_t\Big],$$

则Z_t是一个$(\mathsf{P}, \mathcal{Y}_t)$鞅, 且由(3.5)知

$$\begin{aligned} Z_t &= \mathsf{E}^{\mathsf{P}}\Big[\frac{\mathrm{d}\mathsf{Q}}{\mathrm{d}\mathsf{P}}\Big|\mathcal{Y}_t\Big] = \mathsf{E}^{\mathsf{P}}\Big[\varepsilon\Big(\int_0^{\cdot}\varphi_s\mathrm{d}\overline{W}_s + \int_0^{\cdot}\nu_t\mathrm{d}\overline{M}_t\Big)_T\Big|\mathcal{Y}_t\Big] \\ &= (1+\nu_t)^{N_t}\exp\Big(-\int_0^t\lambda_s^*\nu_s\mathrm{d}s\Big)\exp\Big(\int_0^t\varphi_s\mathrm{d}\overline{W}_s - \frac{1}{2}\int_0^t\varphi_s^2\mathrm{d}s\Big). \end{aligned} \tag{3.7}$$

下面我们给出平方最优套期保值问题(3.1)的解.

定理 3.3 假设下列微分方程有唯一解

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\sum\limits_{i,j=2}^{3}[\sigma_t^{i-1}\sigma_t^{j-1}S_{s-}^{i-1}S_{s-}^{j-1}] + h_{(1)}(s, S_{s-}^1, S_{s-}^2) \\ \qquad + \lambda_s^*[h(s, (1+\mu_s^1)S_{s-}^1, (1+\mu_s^2)S_{s-}^2) - h(s, S_{s-}^1S_{s-}^2)] \\ \qquad - \lambda_s^*\Big[\sum\limits_{i-1}^{2}\mu_s^iS_t^ih_{(i+1)}(s, (1+\mu_s^1)S_{s-}^1, (1+\mu_s^2)S_{s-}^2)\Big] = 0; \\ h(T, S_T^1, S_T^2) = H(S_T^1S_T^2), \end{cases} \tag{3.8}$$

其中$h_{(i,j)}$表示$h(\cdot,\cdot,\cdot)$对第i和j个变量的二阶偏导数在(s, S_{s-}^1, S_{s-}^2)处的值, $h_{(i)}(\cdot,\cdot,\cdot)$表示$h(\cdot,\cdot,\cdot)$对第$i$个变量的偏导数. 则在价格模型(2.1)下, 任意T-未定权益$H(S_T^1, S_T^2) \in L^2(\mathsf{P})$, 内部信息者的平方最优套期保值问题(3.1)的解$(\widehat{\vartheta}_t^1, \widehat{\vartheta}_t^2)$为

$$\begin{cases} \widehat{\vartheta}_t^1 = \vartheta_t^{H,1} - \dfrac{Z_{s-}(\varphi_s\mu_s^2 - \nu_s\sigma_s^2)}{Z_t^YS_{t-}^1(\sigma_s^1\mu_s^2 - \sigma_s^2\mu_s^1)}\Big(h(t, S_{t-}^1, S_{t-}^2) - x - \displaystyle\int_0^t\widehat{\vartheta}_s^1\mathrm{d}S_t^1 - \int_0^t\widehat{\vartheta}_s^2\mathrm{d}S_t^2\Big); \\ \widehat{\vartheta}_t^2 = \vartheta_t^{H,2} - \dfrac{Z_{s-}(\nu_s\sigma_s^1 - \varphi_s\mu_s^2)}{Z_t^YS_{t-}^1(\sigma_s^1\mu_s^2 - \sigma_s^2\mu_s^1)}\Big(h(t, S_{t-}^1, S_{t-}^2) - x - \displaystyle\int_0^t\widehat{\vartheta}_s^1\mathrm{d}S_t^1 - \int_0^t\widehat{\vartheta}_s^2\mathrm{d}S_t^2\Big), \end{cases} \tag{3.9}$$

其中

$$\begin{cases} \vartheta_t^{H,1} = \dfrac{S_{t-}^1\mu_t^1(S_{t-}^2)^2[\sigma_t^2(\sigma_t^2-\mu_t^2)f_1+(\sigma_t^1\mu_t^2-\sigma_t^2\mu_t^1)f_2+(\mu_t^1\mu_t^2-\sigma_t^1\sigma_t^2)\lambda_t^* f_1]}{(S_{t-}^1S_{t-}^2\sigma_t^2\mu_t^1-S_{t-}^1S_{t-}^2\sigma_t^1\mu_t^2)^2\lambda_t^*}; \\ \vartheta_t^{H,2} = \dfrac{S_{t-}^2\mu_t^2(S_{t-}^1)^2[\sigma_t^1(\sigma_t^1-\mu_t^1)f_1+(\sigma_t^2\mu_t^1-\sigma_t^1\mu_t^2)f_2+(\mu_t^1\mu_t^2-\sigma_t^1\sigma_t^2)\lambda_t^* f_1]}{(S_{t-}^1S_{t-}^2\sigma_t^2\mu_t^1-S_{t-}^1S_{t-}^2\sigma_t^1\mu_t^2)^2\lambda_t^*}; \\ Z_t^Y = 1+\displaystyle\int_0^t \frac{Z_{s-}(\varphi_s\mu_s^2-\nu_s\sigma_s^2)}{S_{t-}^1(\sigma_s^1\mu_s^2-\sigma_s^2\mu_s^1)}\mathrm{d}S_s^1+\int_0^t \frac{Z_{s-}(\nu_s\sigma_s^1-\varphi_s\mu_s^1)}{S_{s-}^2(\sigma_s^1\mu_s^2-\sigma_s^2\mu_s^1)}\mathrm{d}S_s^2; \\ f_1 = h(t,(1+\mu_t^1)S_{t-}^1,(1+\mu_t^2)S_{t-}^2)-h(s,S_{t-}^1,S_{t-}^2); \\ f_2 = h_{(2)}\sigma_t^1S_{t-}^1+h_{(3)}\sigma_t^2S_{t-}^2. \end{cases} \tag{3.10}$$

证明: 首先来求$(\Omega,F,\mathcal{Y}_t,\mathsf{P})$上$T$-未定权益$H(S_T^1,S_T^2)$在方差最优鞅测度下的Galtchouk-Kunita-Watanabe分解.

由定理3.2知, 内部信息市场$(\Omega,F,\mathcal{Y}_t,\mathsf{P})$的等价鞅测度$\mathsf{Q}$存在唯一且, 因此$\mathsf{Q}$既是方差最优鞅测度也是极小鞅测度. 由价格过程的Markov性, 可以定义$h(t,S_t^1,S_t^2)=\mathsf{E}^{\mathsf{Q}}[H(S_T^1,S_T^2)|\mathcal{Y}_t]$. 对$h(t,S_t^1,S_t^2)$运用Itô公式, 可以得到

$$\begin{aligned} h(t,S_t^1,S_t^2) &= h(0,S_0^1,S_0^2)+\int_0^t h_{(1)}\mathrm{d}t+\int_0^t h_{(2)}\mathrm{d}S_t^1+\int_0^t h_{(3)}\mathrm{d}S_t^2 \\ &\quad +\int_0^t h_{(2,2)}\mathrm{d}[S^1,S^1]_s+\frac{1}{2}\int_0^t h_{(2,2)}\mathrm{d}[S^1]_s^c+\frac{1}{2}\int_0^t h_{(2,2)}\mathrm{d}[S^1]_s^c \\ &\quad +\sum_{0<s\le t} h(s,S_s^1,S_s^2)-h(s,S_{s-}^1,S_{s-}^2)-h_{(2)}\Delta S_s^1-h_{(3)}\Delta S_s^2 \\ &= h(0,S_0^1,S_0^2)+\int_0^t \delta(s)\mathrm{d}s+\int_0^t h_{(2)}\sigma_s^1S_{s-}^1\mathrm{d}S_t^1+\int_0^t h_{(3)}\sigma_s^2S_{s-}^2\mathrm{d}S_t^1\mathrm{d}W_s^* \\ &\quad +\int_0^t [h(s,(1+\mu_s^1)S_{s-}^1,(1+\mu_s^2)S_{s-}^2)-h(s,S_{s-}^1S_{s-}^2)]\mathrm{d}M_s^*, \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} \delta(s) &= \frac{1}{2}\sum_{i,j=2}^{3}[\sigma_t^{i-1}\sigma_t^{j-1}S_{s-}^{i-1}S_{s-}^{j-1}]-\lambda_s^*[h(s,(1+\mu_s^1)S_{s-}^1,(1+\mu_s^2)S_{s-}^2)-h(s,S_{s-}^1S_{s-}^2)] \\ &\quad +h_{(1)}(s,S_{s-}^1,S_{s-}^2)-\lambda_s^*\Big[\sum_{i-1}^{2}\mu_s^iS_t^ih_{(i+1)}(s,(1+\mu_s^1)S_{s-}^1,(1+\mu_s^2)S_{s-}^2)\Big]. \end{aligned}$$

由于$h(t,S_t^1,S_t^2)$是个$(\mathcal{Y}_t,\mathsf{Q})$鞅, 所以有限变差部分$\delta(s)=0$, 即得$h(\cdot,\cdot,\cdot)$满足(3.8). 所以

$$\begin{aligned} h(t,S_t^1,S_t^2) &= h(0,S_0^1,S_0^2)+\int_0^t h_{(2)}\sigma_s^1S_{s-}^1\mathrm{d}S_t^1+\int_0^t h_{(3)}\sigma_s^2S_{s-}^2\mathrm{d}S_t^1\mathrm{d}W_s^* \\ &\quad +\int_0^t [h(s,(1+\mu_s^1)S_{s-}^1,(1+\mu_s^2)S_{s-}^2)-h(s,S_{s-}^1S_{s-}^2)]\mathrm{d}M_s^*. \end{aligned} \tag{3.11}$$

设在方差最优鞅测度Q下$H(S_T^1,S_T^2)$的Galtchouk-Kunita-Watanabe分解式为

$$H(S_T^1,S_T^2)=\mathsf{E}^{\mathsf{Q}}[H(S_T^1,S_T^2)|\mathcal{Y}_0]+\int_0^T\vartheta_t^{H,1}\mathrm{d}S_t^1+\int_0^T\vartheta_t^{H,2}\mathrm{d}S_t^2+\mathrm{I}_T^H. \tag{3.12}$$

注意到内部信息市场$(\Omega,F,\mathcal{Y}_t,\mathsf{P})$中方差最优鞅测度与极小鞅测度都是Q. 因而将(3.12)式等号左右两边分别与S_t^1,S_t^2做条件二次变差过程可得

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\langle h(\cdot),S^1\rangle_t&=\vartheta_t^{H,1}\mathrm{d}\langle S^1\rangle_t+\vartheta_t^{H,2}\mathrm{d}\langle S^1,S^2\rangle_t,\\ \mathrm{d}\langle h(\cdot),S^2\rangle_t&=\vartheta_t^{H,1}\mathrm{d}\langle S^1,S^2\rangle_t+\vartheta_t^{H,2}\mathrm{d}\langle S^2\rangle_t,\end{aligned}\tag{3.13}$$

其中$h(\cdot)$表示$h(t,S_t^1,S_t^2)$. 解上述方程组(3.13)得

$$\begin{cases}\vartheta_t^{H,1}=\dfrac{\mathrm{d}\langle h(\cdot),S^1\rangle_t\cdot\mathrm{d}\langle S^2\rangle_t-\mathrm{d}\langle h(\cdot),S^2\rangle_t\cdot\mathrm{d}\langle S^1,S^2\rangle_t}{\mathrm{d}\langle S^1\rangle_t\cdot\mathrm{d}\langle S^2\rangle_t-\mathrm{d}\langle S^1,S^2\rangle_t\cdot\mathrm{d}\rangle S^2,S^1\rangle_t};\\ \vartheta_t^{H,2}=\dfrac{\mathrm{d}\langle S^1,S^1\rangle_t\cdot\mathrm{d}\langle h(\cdot),S^2\rangle_t-\mathrm{d}\langle S^1,S^2\rangle_t\cdot\mathrm{d}\langle h(\cdot),S^1\rangle_t}{\mathrm{d}\langle S^1,S^1\rangle_t\cdot\mathrm{d}\langle S^2,S^2\rangle_t-\mathrm{d}\langle S^1,S^1\rangle_t\cdot\mathrm{d}\langle S^2,S^2\rangle_t}.\end{cases}\tag{3.14}$$

利用条件变差过程的定义, 结合(3.3), (3.11)可得

$$\begin{cases}\mathrm{d}\langle h(\cdot),S^1\rangle_t=(h_{(2)}\sigma_t^1S_{t-}^1+h_{(3)}\sigma_t^2S_{t-}^2)S_{t-}^1\sigma_t^1\\ \qquad\qquad+S_{t-}^1\mu_t^1(h(t,(1+\mu_t^1)S_{t-}^1,(1+\mu_t^2)S_{t-}^2)-h(s,S_{t-}^1,S_{t-}^2))\lambda_t^*;\\ \mathrm{d}\langle S^2,S^2\rangle_t=(S_{t-}^2\sigma_t^2)^2+(S_{t-}^2\mu_t^2)^2\lambda_t^*;\\ \mathrm{d}\langle h(\cdot),S^2\rangle_t=(h_{(2)}\sigma_t^1S_{t-}^1+h_{(3)}\sigma_t^2S_{t-}^2)S_{t-}^2\sigma_t^2\\ \qquad\qquad+S_{t-}^2\mu_t^2(h(t,(1+\mu_t^1)S_{t-}^1,(1+\mu_t^2)S_{t-}^2)-h(s,S_{t-}^1,S_{t-}^2))\lambda_t^*;\\ \mathrm{d}\langle S^1,S^2\rangle_t=S_{t-}^1S_{t-}^2\sigma_t^1\sigma_t^2+S_{t-}^1S_{t-}^2\mu_t^1\mu_t^2\lambda_t^*;\\ \mathrm{d}\langle S^1,S^1\rangle_t=(S_{t-}^1\sigma_t^1)^2+(S_{t-}^1\mu_t^1)^2\lambda_t^*.\end{cases}\tag{3.15}$$

将(3.15)代入(3.14)即可得$\vartheta^{H,1}$, $\vartheta^{H,2}$可由(3.10)式来表示. 由(3.5)知

$$\begin{aligned}Z_t^Y&\triangleq\mathsf{E}^{\mathsf{Q}}\Big[\frac{\mathrm{d}\mathsf{Q}}{\mathrm{d}\mathsf{P}}\Big|\mathcal{Y}_t\Big]=\mathsf{E}^{\mathsf{Q}}[Z_T|\mathcal{Y}_t]=\mathsf{E}^{\mathsf{Q}}\Big(\varepsilon\Big(\int_0^\cdot\varphi_s\mathrm{d}\overline{W}_s+\int_0^\cdot\nu_t\mathrm{d}\overline{M}_t\Big)_T\Big|\mathcal{Y}_t\Big)\\ &=\mathsf{E}^{\mathsf{Q}}\Big[1+\int_0^TZ_{s-}\varphi_s\mathrm{d}\overline{W}_s+\int_0^TZ_{s-}\nu_t\mathrm{d}\overline{M}_t|\mathcal{Y}_t\Big]\\ &=\mathsf{E}^{\mathsf{Q}}\Big[1+\int_0^TZ_{s-}\varphi_s+Z_{s-}\nu_t\lambda_t^*\mathrm{d}t+\int_0^tZ_{s-}\varphi_s\mathrm{d}W_s^*+\int_0^tZ_{s-}\nu_t\mathrm{d}M_s^*|\mathcal{Y}_t\Big]\\ &=1+\int_0^tZ_{s-}\varphi_s\mathrm{d}W_s^*+\int_0^tZ_{s-}\nu_t\mathrm{d}M_s^*.\end{aligned}\tag{3.16}$$

结合(3.3)与(3.16), 由鞅表示定理及鞅表示的唯一性知

$$\begin{aligned}Z_t^Y&=1+\int_0^t\frac{Z_{s-}(\varphi_s\mu_s^2-\nu_s\sigma_s^2)}{S_{t-}^1(\sigma_s^1\mu_s^2-\sigma_s^2\mu_s^1)}\mathrm{d}S_s^1+\int_0^t\frac{Z_{s-}(\nu_s\sigma_s^1-\varphi_s\mu_s^1)}{S_{s-}^2(\sigma_s^1\mu_s^2-\sigma_s^2\mu_s^1)}\mathrm{d}S_s^2\\ &\triangleq1+\int_0^t\zeta_s^1\mathrm{d}S_s^1+\int_0^t\zeta_s^2\mathrm{d}S_s^2.\end{aligned}\tag{3.17}$$

因此由文献[6]中的定理4.2知平方套期保值问题(3.1)的解为

$$\begin{aligned}\widehat{\vartheta}_t^1 &= \vartheta_t^{H,1} - \frac{\zeta_t^1}{Z_t^Y}\Big(h(t,S_{t-}^1,S_{t-}^2) - x - \int_0^t \widehat{\vartheta}_s^1 \mathrm{d}S_t^1 - \int_0^t \widehat{\vartheta}_s^2 \mathrm{d}S_t^2\Big),\\ \widehat{\vartheta}_t^2 &= \vartheta_t^{H,2} - \frac{\zeta_t^2}{Z_t^Y}\Big(h(t,S_{t-}^1,S_{t-}^2) - x - \int_0^t \widehat{\vartheta}_s^1 \mathrm{d}S_t^1 - \int_0^t \widehat{\vartheta}_s^2 \mathrm{d}S_t^2\Big).\end{aligned} \tag{3.18}$$

结合(3.10), (3.17)和(3.18)可得最优策略为(3.9), 定理得证. □

参 考 文 献

[1] Pikovsky, I. and Karatzas, I., Anticipative portfolio optimization, *Advance in Applied Probability*, **28**(1996), 1095–1122.

[2] Grorud, A. and Pontier, M., Insider trading in a continuous time market model, *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, **1**(1998), 315–330.

[3] Amendinger, J., Imkeller, P. and Schweizer, M., Additional logarithmic utility of an insider, *Stochastic Processes and Their Applications*, **75**(1998), 163–186.

[4] Grorud, A. and Pontier, M., Asymmetric information and incomplete market, *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, **4**(2001), 1–18.

[5] Amendinger, J., Becherer, D. and Schweizer, M., A monetary value for initial information in portfolio optimization, *Finance and Stochastics*, **7**(2003), 29–46.

[6] Campi, L., Some results on quadratic hedging with insider trading, *Stochastics*, **77**(2005), 327–348.

[7] Yan, H.F., Yang, J.Q. and Liu, L.M., Mixed hedging under additive market price information, *Journal of Systems Science and Complexity*, **21**(2008), 239–249.

[8] 杨建奇, 肖庆宪, 内部信息者的最小亏损风险策略, 高校应用数学学报, **23**(2008), 393–398.

[9] Grorud, A., Asymmetric information in a financial market with jumps, *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, **3**(2000), 641–660.

Quadratic Hedging Strategies under Inner Information

YANG JIANQI XIAO QINGXIAN

(*Business School, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai, 200093*)

A market model with inner information is constructed. The problem of quadratic hedging for investors with inner information is introduced and solved. First the dynamic of risky assets in the market with inner information is deduced using the initial enlarge filtration method. Second by Itô formula and the decomposition of Galtchouk-Kunita-Watanabe the explicit optimal strategy is given.

Keywords: Inner information, hedging, jump-diffusion models, enlarge filtration.

AMS Subject Classification: 60H30, 91G10.