应用概率统计　第二十七卷
第四期　2011年8月

Chinese Journal of Applied Probability
and Statistics Vol.27 No.4 Aug. 2011

半马尔可夫过程的极限分布及其推广 *

董海玲
(深圳大学数学与计算科学学院, 深圳, 518060)

侯振挺
(中南大学数学科学与计算技术学院, 长沙, 410075)

江国朝
(哈尔滨工业大学深圳研究生院, 深圳, 518055)

摘　要

本文运用马尔可夫骨架过程的极限理论研究齐次可列半马尔可夫过程, 得到其极限分布. 当更新间隔的分布不是格子分布时, 本文的结果和邓永录等[1]中的结果一致, 但采用的方法不同, 本文采用的是马尔可夫骨架过程的理论方法, 而[1]中采用的是交替更新过程的方法; 而且关于更新间隔服从格子分布的情形, [1]中没有研究, 而本文给出了结果. 最后, 将齐次可列半马尔可夫过程的极限理论进行推广, 并通过一个例子给以说明.

关键词:　马尔可夫骨架过程, Doob骨架过程, 半马尔可夫过程, 极限分布.

学科分类号:　O211.62.

§1.　引　　言

本文讨论马尔可夫骨架过程的一个重要的特例—齐次可列半马尔可夫过程. 1954年Lévy[2]引入了半马尔可夫过程的概念并加以研究. 经过了半个世纪的研究, 半马尔可夫过程的理论和应用得到了广泛的发展, 已形成了一个独立的研究方向, 参见[3–5].

本文研究齐次可列半马尔可夫过程的极限分布, 大体结构如下: 第二节回顾马尔可夫骨架过程的极限理论. 第三节首先证明齐次可列半马尔可夫过程是Doob骨架过程的一个特例, 然后运用马尔可夫骨架过程的极限理论来研究齐次可列半马尔可夫过程, 得到齐次可列半马尔可夫过程的极限分布. 第四节将齐次可列半马尔可夫过程的极限理论进行推广, 并通过一个例子给以说明.

§2.　基础知识

定义 2.1 [6]　假定$X(t)$是一个以$\{\gamma_n\}_{n=0}^{\infty}$为骨架时序列的正规马尔可夫骨架过程($\gamma_0=0$), 如果存在$(E,\mathcal{E})$上的概率测度$\pi(\cdot)$, 使得对任意的$A\in\mathcal{E}$,

$$\mathsf{P}(X(\gamma_1)\in A|X(0)=x,\gamma_1=s)=\mathsf{P}(X(\gamma_1)\in A)=\pi(A),$$

*国家自然科学基金(11071258)、国家自然科学基金青年基金(11001179)和深圳大学博士启动基金(000048)资助.
本文2009年10月23日收到, 2010年12月24日收到修改稿.

则称$X(t)$为Doob骨架过程, 称$\pi(\cdot)$为$X(t)$特征测度, $\{\gamma_n, n\ge 1\}$称为$X(t)$的更新点.

令$Y_0=\gamma_1-0$, $Y_i=\gamma_{i+1}-\gamma_i$, $i\in N^+$, 则$\{Y_i, i\ge 1\}$表示两个更新点之间的间隔, 为一系列独立同分布的随机变量. 对$\forall\, x\in E$, $t\ge 0$, 定义

$$F(x,t)=\mathsf{P}(\gamma_1\le t|X(0)=x),\qquad F(t)=\int_E F(x,t)\pi(\mathrm{d}x),$$

则$F(t)$为Y_i的分布. 令m表示Y_i的期望.

定义 2.2[6] 假定$X(t)$是一个Doob骨架过程, 如果$m<\infty$, 且对任意的$x\in E$, 满足$F(x,0)=0$, $F(x,\infty)\equiv 1$, 则$X(t)$称为一个正常返Doob骨架过程.

定义 2.3[1] 设$F(t)$是一个阶梯函数, 如果能找到一个正的实数δ, 使得$F(t)$的所有跳跃发生在序列$n\delta$, $n=1,2,3,\ldots$, 并且进一步假定δ是满足这一性质中最大的实数, 我们称$F(t)$是格子分布, 并且步长为δ; 若$\delta=0$, 称$F(t)$不是格子分布.

定理 2.1[7] 假定$X(t)$是一个正常返的Doob骨架过程. 如果$F(t)$不是格子分布, 则对于一切的$A\in\mathcal{E}$, 极限$\lim\limits_{t\to\infty}p(x,t,A)$存在,

$$p(A)=:\lim_{t\to\infty}p(x,t,A)=\frac{\displaystyle\int_0^\infty h(t,A)\mathrm{d}t}{m},\qquad \forall\, A\in\mathcal{E},$$

并且$p(\cdot)$是$(E,\mathcal{E})$上的概率测度, 其中m为更新间隔的期望.

当更新间隔服从格子分布时, 极限分布$p(A)=:\lim\limits_{t\to\infty}p(x,t,A)$并不存在, 但是, 对于任意的常数$0\le c<\delta$, 极限$\lim\limits_{n\to\infty}p(c+n\delta,A)$存在.

定理 2.2[7] 假定$X(t)$是一个正常返的Doob骨架过程. 如果$F(t)$是以δ为步长的格子分布, 则对于$\forall\, A\in\mathcal{E}$, 及常数$0\le c<\delta$,

$$\lim_{n\to\infty}p(x,c+n\delta,A)=\frac{\delta}{m}\sum_{k=0}^{\infty}h(c+k\delta,A).$$

§3. 齐次可列半马尔可夫过程的极限分布

定义 3.1[8] 令E为一可数集, $X=\{X(t,\omega), 0\le t<\tau\}$称为齐次可列半马尔可夫过程, 如果满足:

(1) 令$\tau_0=0$, $\tau_1=\inf\{t>0, X(t)\ne X(0)\}$, $\tau_{n+1}=\inf\{t>\tau_n, X(t)\ne X(\tau_n)\}$, $n>1$, $\tau_n\uparrow\tau$;

(2) $\mathsf{P}\{X(\tau_{n+1})\in A|\mathcal{F}_{\tau_n})\}=\mathsf{P}\{X(\tau_{n+1})\in A|X(\tau_n)\}$, $n=0,1,2,\ldots$;

(3) $X(t,\omega)=X(\tau_n,\omega)$, $\tau_n\le t<\tau_{n+1}$, $n=0,1,2,\ldots$.

假定$X_0=j$, 对于任意$i\in E$, 定义$d_0^i,d_1^i,d_2^i,\ldots$为过程状态依次转移到i的一系列跳点, 于是$\{d_n^i,n\geq 0\}$构成了一个更新过程, 如果$X_0=j=i$, 则$d_0^i=0$, 为普通更新过程; 否则为延迟更新过程.

令

$$
\begin{aligned}
&P_{ij}(t)=\mathsf{P}(X(t)=j|X(0)=i),\\
&V_{ji}^0=d_0^i-0, \qquad\qquad V_{ii}^n=d_n^i-d_{n-1}^i, \quad n\geq 1,\\
&H_{ji}(t)=\mathsf{P}(V_{ji}^n\leq t), \qquad \mu_{ii}=\mathsf{E}V_{ii}^n.
\end{aligned}
$$

显然, $H_{ii}(t)$为V_{ii}^n的分布函数, 对应的期望记为μ_{ii}.

定理 3.1 齐次可列半马尔可夫过程是马尔可夫骨架过程.

证明: (1) 取齐次可列半马尔可夫过程真正发生状态转移的时刻序列$\{\tau_n\}$为骨架时序列, 由τ_n的定义, $\tau_0=0$, $\tau_n\uparrow\tau$, 并且满足对任意的$n\geq 0$, $\tau_n<\infty$时, 一定有$\tau_n<\tau_{n+1}$; (2) τ_1为过程首次发生状态转移的时刻, 而τ_{n+1}为τ_n之后, 过程首次发生状态转移的时刻, 于是有$\tau_{n+1}=\tau_n+\theta_{\tau_n}\tau_1$成立; (3) 由定义知, 对任意的$n$, 齐次可列半马尔可夫过程在$\tau_n$处有马尔可夫性. 由以上可以看出齐次可列半马尔可夫过程是马尔可夫骨架过程. □

定理 3.2 齐次可列半马尔可夫过程是Doob骨架过程.

证明: 对任一固定的状态$i\in E$, 取齐次可列半马尔可夫过程每次转移到状态i的跳点构成的停时列$\{d_n^i,n\geq 1\}$为骨架时序列, 则根据定义3.1, 齐次可列半马尔可夫过程在d_n^i时刻有马尔可夫性, 于是可得

$$\mathsf{P}(X(d_1^i)=i|X(0)=i,d_1^i=s)=\mathsf{P}(X(d_1^i)=i)=\pi_i. \tag{3.1}$$

由定义2.2, 定理3.1及(3.1)式知齐次可列半马尔可夫过程是Doob骨架过程, 每次转移到状态i的跳点构成的停时列$\{d_n^i,n\geq 1\}$即为Doob骨架时序列, 也称为更新点. 定理证毕. □

对任意的$i,j\in E$及$t\in R_+$, 令

$$
\begin{aligned}
&h_i(t)=\mathsf{P}(t<\tau_1|X(0)=i),\\
&Q_i(t)=\mathsf{P}(\tau_1\leq t|X(0)=i),\\
&G_{ik}(t)=\mathsf{P}(\tau_{n+1}-\tau_n\leq t|X(\tau_n)=i,X(\tau_{n+1})=k), \qquad i\neq k,\\
&q_{ij}=\mathsf{P}(X(\tau_{n+1})=j|X(\tau_n)=i), \qquad i\neq j.
\end{aligned}
$$

令T_i为过程在状态i的逗留时间之和, T_{ik}为已知过程处于状态i, 下次跳到状态k时, 过程在i上的逗留时间, 则

$$\mathsf{P}\{T_{ik}\leq t\}=\mathsf{P}\{\tau_{n+1}-\tau_n\leq t|X(\tau_n)=i,X(\tau_{n+1})=k\}=G_{ik}(t). \tag{3.2}$$

由(3.2)式及齐次性可得

$$\begin{aligned} \mathsf{P}\{T_i \le t\} &= \sum_{k\ne i} q_{ik}\mathsf{P}\{T_{ik}\le t\} = \sum_{k\ne i} q_{ik}G_{ik}(t) \\ &= \sum_{k\ne i} Q_{ik}(t) = Q_i(t), \end{aligned} \tag{3.3}$$

所以T_i的分布函数为$Q_i(t)$, 记$\alpha_i = \mathsf{E}T_i$.

引理 3.1 当$Q_i(t)$不是格子分布时,

$$\int_0^\infty h_i(t)\mathrm{d}t = \alpha_i.$$

证明: 由$h_i(t)$和$Q_i(t)$的定义可得

$$h_i(t) = \mathsf{P}(t < \tau_1 | X(0) = i) = 1 - Q_i(t). \tag{3.4}$$

由(3.3)式及α_i的定义可得, 当$Q_i(t)$不是格子分布时,

$$\alpha_i = \int_0^\infty (1 - Q_i(t))\mathrm{d}t. \tag{3.5}$$

由(3.4)(3.5)式易得引理成立. □

引理 3.2 当$Q_i(t)$是以δ为步长的格子分布时,

$$\sum_{n=0}^\infty h_i(c + n\delta) = \frac{\alpha_i}{\delta}. \tag{3.6}$$

证明: 由$h_i(t)$和$Q_i(t)$的定义可得

$$h_i(c + n\delta) = 1 - Q_i(c + n\delta). \tag{3.7}$$

当$Q_i(t)$是以δ为步长的格子分布时, T_i只在$n\delta$, $n = 1, 2, \ldots$上取值, 于是有

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^\infty (1 - Q_i(c + n\delta)) &= \sum_{n=0}^\infty \mathsf{P}(T_i > c + n\delta) \\ &= \mathsf{P}(T_i = \delta) + \mathsf{P}(T_i = 2\delta) + \mathsf{P}(T_i = 3\delta) + \cdots \\ &\quad + \mathsf{P}(T_i = 2\delta) + \mathsf{P}(T_i = 3\delta) + \cdots \\ &\quad + \mathsf{P}(T_i = 3\delta) + \cdots \\ &= \sum_{n=0}^\infty k\mathsf{P}(T_i = k\delta). \end{aligned} \tag{3.8}$$

由α_i的定义可得

$$\sum_{n=0}^\infty k\delta \mathsf{P}(T_i = k\delta) = \alpha_i. \tag{3.9}$$

于是由(3.7)(3.8)(3.9)式可得

$$\sum_{n=0}^\infty h_i(c + n\delta) = \frac{\alpha_i}{\delta}. \qquad \square$$

定理 3.3 假定$X(t)$是一个齐次可列半马尔可夫过程. 如果满足

(1) $H_{ii}(t)$不是格子分布, $Q_i(t)$也不是格子分布;

(2) $\mu_{ii} < \infty$, 即状态i为正常返的;

(3) $H_{ji}(\infty) = 1$;

则对于一切的$i \in \mathcal{E}$, 极限$\lim\limits_{t\to\infty} p_{ji}(t)$存在, 并且与初始状态$j$无关,

$$p_i = \lim_{t\to\infty} p_{ji}(t) = \frac{\alpha_i}{\mu_{ii}}, \qquad \forall\, i \in E.$$

并且p_i是E上的概率测度. 若条件(2)改为$\mu_{ii} = \infty$, 即状态i为零常返的; 则

$$\lim_{t\to\infty} p_{ji}(t) = p_i = 0, \qquad \forall\, i \in E.$$

证明: 由定理2.1, 定理3.2及引理3.1立即可得. □

对于更新间隔的分布$H_{ii}(t)$为格子分布的情形, 极限分布$p_i = \lim\limits_{t\to\infty} p_{ji}(t)$并不存在, 但是, 对于任意的常数$0 \le c < \delta$, 极限$\lim\limits_{n\to\infty} p_{ji}(c + n\delta)$存在.

定理 3.4 假定$X(t)$是一个齐次可列半马尔可夫过程. 如果满足

(1) $H_{ii}(t)$是以δ为步长的格子分布, $Q_i(t)$也是以δ为步长的格子分布;

(2) $\mu_{ii} < \infty$, 即状态i为正常返的;

(3) $H_{ji}(+\infty) = 1$;

则对于一切的$i \in \mathcal{E}$及固定的c, 极限$\lim\limits_{n\to\infty} p_{ji}(c + n\delta)$存在,

$$\lim_{n\to\infty} p_{ji}(c + n\delta) = \frac{\delta}{\mu_{ii}} \sum_{n=0}^{\infty} h_i(c + n\delta) = \frac{\alpha_i}{\mu_{ii}} \qquad \forall\, i \in E.$$

若条件(2)改为$\mu_{ii} = \infty$, 即状态i为零常返的; 则

$$\lim_{t\to\infty} p_{ji}(t) = 0, \qquad \forall\, i \in E.$$

证明: 由定理2.2, 定理3.2及引理3.2立即可得. □

§4. 齐次可列半马尔可夫过程极限分布的推广

事实上, 在求齐次可列半马尔可夫过程的极限分布时, 只要求$\{d_n^i, n \ge 0\}$为一更新过程, 并且过程在d_n^i处发生跳跃, 具有马尔可夫性, 对状态空间和跳跃间隔之间过程的发展并不做具体要求, 因此, 我们可以把齐次可列半马尔可夫过程的极限理论加以推广, 应用于下述过程:

设状态空间$\mathcal{X}$为任意实数空间, 在过程X_t的发展中, 不时会有随机的跳跃发生, 在这些跳跃的时刻, 过程具有马尔可夫性, 在这些跳跃之间, 过程的发展服从某条光滑的曲线(可以是直线, 指数曲线或者其他合理的曲线).

令$A_1=\{X_t\leq x\}$, $A_2=\{X_t>x\}$, 则过程X_t可以映射到A_1和A_2两个状态的齐次半马尔可夫过程. 过程X_t在状态A_1和A_2之间来回转换, 构成一个再生周期. 如果再生周期的分布不是格子分布时, 对应的期望记作μ, 在一个再生周期中, 过程X_t处于状态A_1的时间的期望记为α_1, 则由定理3.3可知, 该过程的极限分布存在,

$$\lim_{t\to\infty}\mathsf{P}(X_t\in A_1)=\frac{\alpha_1}{\mu},$$

如果再生周期的分布为格子分布, 该过程的极限分布不存在.

下面通过一个具体的例子来进一步说明上述结论.

例 1　水库模型: 考虑这样一个有无限储量的水库, $t=0$时储水量为x_0, 除了降雨不考虑由其他的水源流入, 该地区降雨随机发生, 第i次降雨量为随机变量Y_i, 水库向外的供水率$a(x)$依赖于当时水库的储量, 设X_t为t时刻水库中的储水量, 令$A_1=\{X_t\leq x_0\}$, $A_2=\{X_t>x_0\}$, 可以理解为A_1代表降雨量较少, A_2代表降雨量充足, $\lim\limits_{t\to\infty}\mathsf{P}(X_t\in A_2)$是否存在, 怎么表示?

解:　令N_t为t之前降雨的次数, 则可得

$$X_t=x_0+\sum_{i=0}^{N_t}Y_i-\int_0^t a(X_s)\mathrm{d}s.$$

不考虑一直不下雨和不停下雨的病态情形, 过程将在状态A_1和A_2之间来回转换. 在某一次降雨之后, 过程进入状态A_2, 中间由于水不断的流出, 过程逐渐进入A_1, 在某一次大的降雨之后过程再次回到A_2, 构成了一个再生周期. 如果再生周期的分布不是格子分布时, 对应的期望记为μ_{22}, 并且在一个再生周期中过程处于状态A_2的时间的期望记为α_2 (对于具体的实例, μ_{22}和α_2都可以通过数据具体求得), 于是由定理3.3可得

$$\lim_{t\to\infty}\mathsf{P}(X_t\in A_2)=\frac{\alpha_2}{\mu_{22}},$$

对于再生周期的分布为格子分布的情形, $\lim\limits_{t\to\infty}\mathsf{P}(X_t\in A_2)$不存在.

例1具有一定的代表性, 类似的例子有很多: 例如考虑一个保险公司, 最初的资金为x_0, 索赔随机到达, 保费率依赖于公司的资金, X_t表示公司在时刻t时的资金, 令$A_1=\{X_t\leq x_0\}$, $A_2=\{X_t>x_0\}$, 可以理解为A_1代表公司亏损, A_2代表公司盈利, 考虑当$\lim\limits_{t\to\infty}\mathsf{P}(X_t\in A_2)$的值, 即公司运行很长时间之后处于盈利的概率. 证明思路完全类似于例1. 经济方面也有不少这样的例子, 本文就不再一一列举了.

参 考 文 献

[1] 邓永录, 梁之舜, 随机点过程及其应用, 北京: 科学出版社, 1992.

[2] Lévy, P., *Semi-Markovian Processes*, Amsterdam: Proc. III Internat. Congr. Math., 1954, 416–426.

[3] Hou, Z.T., Luo, J.W. and Shi, P., Stochastic stability of linear systems with semi-Markovian jump parameters, *ANZIAM Journal*, **46**(2005), 331–340.

[4] Hou, Z.T., Dong, H.L. and Shi, P., Asymptotic stability in distribution of nonlinear stochastic systems with semi-Markovian switching, *ANZIAM Journal*, **49(2)**(2007), 231–241.

[5] Ghosh, M.K., Goswami, A. and Kumar, S.K., Portfolio optimization in a semi-Markov modulated market, *Applied Mathematics and Optimization*, **60(2)**2009, 275–296.

[6] Hou, Z.T. and Liu, G.X., *Markov Skeleton Processes and Their Applications*, Science Press and International Press, 2005.

[7] 董海玲, 马尔可夫骨架过程极限理论, 博士论文, 长沙: 中南大学, 2008.

[8] Cinlar, E., *Introduction to Stochastic Processes*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1975.

The Limit Distribution of Semi-Markov Processes and Its Generalization

Dong Hailing

(*School of Mathematics and Computer Science, Shenzhen University, Shenzhen, 518060*)

Hou Zhenting

(*School of Mathematics, Central South University, Changsha, 410075*)

Jiang Guochao

(*Shenzhen Graduate School, Harbin Institute of Technology, Shenzhen, 518055*)

By using limit distribution of Markov skeleton processes, the article studies homogeneous denumerable semi-Markov processes and obtains their limit distribution. When the distribution of renewal interval is non-lattice, the result obtained in this paper is consistent with that in [1], but the approaches this article used are Markov skeleton processes approaches which differ from [1]. Furthermore, when the distribution of renewal interval is lattice, this paper gives the result, whereas [1] didn't study this case. Finally, this article generalizes the limit distribution of homogeneous denumerable semi-Markov processes, and illustrates the result through one example.

Keywords: Markov skeleton processes, Doob skeleton processes, semi-Markov processes, limit distribution.

AMS Subject Classification: 60K15.