应用概率统计　第二十七卷
第四期　2011年8月
Chinese Journal of Applied Probability
and Statistics Vol.27 No.4 Aug. 2011

随机环境中马氏链的大数定律和强大数定律 *

李明亮[1,2]　　刘再明[1]

([1]中南大学数学科学与计算技术学院, 长沙, 410083; [2]湖南第一师范学院数理系, 长沙, 410205)

摘　要

本文主要研究了单无限马氏环境中马氏链的几类特殊函数的大数定律及强大数定律, 并且给出了加于链和过程特殊样本函数上的充分条件.

关 键 词:　随机环境, 马氏链, 大数定律, 强大数定律.

学 科 分 类 号:　O211.62.

§1.　引　　言

随机环境中马氏链一般理论的研究, 始于20世纪80年代初, Cogburn、Orey和戴永隆等人在遍历理论、中心极限定理等研究领域取得了一系列深刻的结果, 详见文献[1–6]. 在国内, 随机环境中马氏链的强大数定律, 首先由李应求 (2003)提出, 他研究了具有离散参量的马氏环境中马氏链函数的强大数定律, 并且给出了直接加于链和过程样本函数上的充分条件, 详见文献[7]. 郭明乐 (2003)研究了马氏环境中马氏链的强大数定律, 但他的工作实质上和[7]的工作一样.

本文进一步研究了马氏环境中马氏链的强大数定律, 特别地还研究了大数定律, 给出了它们在几个特殊样本函数上的充分条件.

§2.　基本假设及定义

设$\mathcal{N}_+$表示非负整数集, $(\Omega,\Im,\mathsf{P})$是概率空间, $(\mathcal{X},\mathcal{A})$、$(\Theta,\mathcal{B})$为任意可测空间, $\vec{\xi}=\{\xi_n:n=0,1,2,\ldots\}$和$\vec{X}=\{X_n:n=0,1,2,\ldots\}$分别是$(\Omega,\Im,\mathsf{P})$上取值于$\Theta$和$\mathcal{X}$的随机序列, $\{p(\theta),\theta\in\Theta\}$是$(\mathcal{X},\mathcal{A})$上的一族转移函数族, 且假设对任意$A\in\mathcal{A}$, $\mathsf{P}(\cdot;\cdot,A)$是$\mathcal{B}\times\mathcal{A}$可测的, $\{k(\cdot,\cdot)\}$是$(\Theta,\mathcal{B})$上的转移函数族, 且假设对任意$B\in\mathcal{B}$, $k(\cdot,B)$是$\mathcal{B}$可测的. 对任意序列$\vec{\eta}=\{\eta_n\}$, 记$\vec{\eta}_k^r=\{\eta_n,k\le n\le r,-\infty\le k\le r\le+\infty\}$.

定义 2.1　如果对任意$A\in\mathcal{A}$, $n\in\mathcal{N}_+$, 有

$$\mathsf{P}(X_0\in A|\vec{\xi})=\mathsf{P}(X_0\in A|\xi_0),\qquad \mathsf{P}(X_{n+1}\in A|\vec{X}_0^n,\vec{\xi})=\mathsf{P}(\xi_n;X_n,A),$$

*国家自然科学基金(10271020、10471012)和院级课题(XYS10N07)资助.
本文2009年3月13日收到, 2011年4月12日收到修改稿.

则称$\vec{X}$为随机环境$\vec{\xi}$中的马氏链, $\vec{\xi}$为随机环境序列, $\mathcal{X}$为状态空间, Θ为环境空间. 若$\vec{\xi}$是一马氏序列, 则称$\vec{X}$是马氏环境$\vec{\xi}$中的马氏链.

引理 2.1[7] 如果$\vec{X}$是马氏环境$\vec{\xi}$中的马氏链, 则$\{(X_n,\xi_n),n\geq 0\}$是马氏双链, 且其一步转移概率Q可写成: $\mathsf{Q}_n(x,\theta;A\times B)=\mathsf{K}_n(\theta,B)\mathsf{P}(\theta;x,A)$, 其中$\mathsf{K}_n(\theta,B)$为$\vec{\xi}$的一步转移概率, $\mathsf{P}(\theta;x,A)$为$\vec{X}$在随机环境$\vec{\xi}$中的转移概率, 如果$\vec{\xi}$是齐次马氏链, 则双链也是齐次的.

定义 2.2 称马氏双链$\{(X_n,\xi_n),n\geq 0\}$为无反馈的，如果其一步转移概率Q满足: $\mathsf{Q}(x,\theta;A\times B)=\mathsf{K}(\theta,B)\mathsf{P}(\theta;x,A)$.

本文恒假设$\vec{X}$是马氏环境$\vec{\xi}$中的马氏链, $\mathcal{X}$、Θ是可数的, 存在$(x,\theta)\in\mathcal{X}\times\Theta$, 使得$\mathsf{P}(X_n=x,\xi_n=\theta,\text{i.o.})=1$, 称$(x,\theta)$为可回状态. $\{f_n(x,\theta),\ n\geq 0\}$是$\mathcal{X}\times\Theta$上的$\mathcal{X}\times\mathcal{B}$可测函数列.

令$\tau_0=0$, $\tau_{n+1}=\inf\{n>\tau_k;X_n=x,\xi_n=\theta\}$, $\sigma_k=\tau_{k+1}-\tau_k$, $\Omega_{\tau_k}=\{\tau_k(\omega)<\infty\}$, $\aleph_n=\sigma(X_u,\xi_v,u,v\leq n)$, $\aleph_{\tau_k}=\{A\subset\Omega_{\tau_k},$对任意$n\geq 0,A(\tau_k\leq n)\in\aleph_n\}$, $\aleph^{\tau_k}=\sigma(X_{\tau_k+u},\xi_{\tau_k+u},u\geq 0)$. 当$\tau_m<n\leq\tau_{m+1}$, $(m\geq 0)$时, 令$l(n)=m$. 令

$$Y_k=\sum_{m=\tau_k}^{\tau_{k+1}-1}f_m(X_m,\xi_m),\quad U_k=\sum_{m=\tau_k}^{\tau_{k+1}-1}|f_m(X_m,\xi_m)|,\qquad k=0,1,\ldots,l(n)-1,$$
$$Y_n=\sum_{m=\tau_{l(n)}}^{n-1}f_m(X_m,\xi_m).$$

显然对任意$n\geq 1$, 有$\tau_k(\omega)\leq n\in\aleph_n$,

$$\sum_{m=0}^{n-1}f_m(X_m,\xi_m)=\sum_{k=0}^{l(n)-1}Y_k+Y_n\qquad\Big(\text{约定}\ \sum_{k=0}^{-1}Y_k=0\Big).$$

§3. 强大数定律

条件 3.1 存在一数学期望有限的非负随机变量Y, 使得对一切$n\geq 0$, 有$q_n(x)\equiv\mathsf{P}(U_n+\sigma_n>x)\leq q(x)\equiv 1-F_Y(x)\ (x>0)$.

引理 3.1[7] 若$\{(X_n,\xi_n),n\geq 0\}$为无反馈的, $f_m(x,\theta)\equiv f(x,\theta)\ (m\geq 0)$, $\mathsf{E}U_1<\infty$, 则条件3.1满足.

引理 3.2[7] (1) $\{Y_k,k\geq 0\}$是$(\Omega,\Im,\mathsf{P})$上的独立随机变量列.

(2) 对任意实数α, β, $\{\alpha U_k+\beta\sigma_k:k\geq 0\}$独立.

引理 3.3[8] 设$\{X_n,n\geq 0\}$是相互独立的随机变量列, $S_n=\sum\limits_{k=0}^{n-1}X_k$, X是随机变量, 且$q(x)=\mathsf{P}(|X|>x)$, 如果$q_n(x)=\mathsf{P}(|X_n|>x)\leq q(x)$对一切$x\geq 0$及$n\geq 0$成立, 并且

$\mathsf{E}|X|^r < \infty$, $(0 < r < 2)$, 则

$$\frac{1}{\sqrt[r]{n}}(S_n - a_n) \to 0 \qquad \text{a.s.}[p] \qquad (n \to \infty),$$

其中

$$a_n = \begin{cases} 0, & \text{当 } 0 < r < 1 \text{ 时}, \\ \sum\limits_{k=0}^{n-1} \mathsf{E}X_k, & \text{当 } 1 \le r < 2 \text{ 时}. \end{cases}$$

引理 3.4[7]　若条件3.1成立, 则对一切$n \ge 0$, 有

(1) $\mathsf{E}|Y_n| + \mathsf{E}\sigma_n \le \mathsf{E}U_n + \mathsf{E}\sigma_n \le \mathsf{E}Y < \infty$.

(2) $\mathsf{E}\max\{U_0, U_1, \ldots, U_n\}$有限, 且$\lim\limits_{n\to\infty}[1/(n+1)]\mathsf{E}\max\{U_0, U_1, \ldots, U_n\} = 0$.

定理 3.1　若条件3.1成立, 则

(1) $\{Y_k, k \ge 0\}$满足强大数定律;

(2) $\{U_k, k \ge 0\}$满足强大数定律;

(3) $\{\sigma_k, k \ge 0\}$满足强大数定律.

证明:　(1) 由引理3.4有$\mathsf{E}|Y_k| \le \mathsf{E}|Y_k| + \mathsf{E}|\sigma_k| < \infty$, 且

$$\mathsf{P}(|Y_k| > x) \le \mathsf{P}(U_k > x) \le \mathsf{P}(U_k + \sigma_k > x) \equiv q_k(x) \le q(x) = 1 - F_Y(x),$$

又由引理3.2知$\{Y_k, k \ge 0\}$是$(\Omega, \Im, \mathsf{P})$上的独立随机变量列, 故满足引理3.3的条件, 于是有

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(Y_k - \mathsf{E}Y_k) \to 0, \qquad n \to \infty \ \text{ a.e..}$$

(2)、(3)的证明同(1).　　$\square$

定理 3.2　若条件3.1成立, 则

$$\frac{1}{n}\mathsf{E}\Big[\sum_{k=0}^{l(n)-1}(Y_k - \mathsf{E}Y_k)\Big] \to 0.$$

证明:　根据$l(n)$的定义, 当$\tau_m < n \le \tau_{m+1}$ $(m \ge 0)$时, 令$l(n) = m$, 故

$$l(n) = m \le \tau_m < n \le \tau_{m+1},$$

从而得$\{l(n) > n - 1\} = \emptyset$, 因此有

$$\begin{aligned} \mathsf{E}\Big[\sum_{k=0}^{l(n)-1}(Y_k - \mathsf{E}Y_k)\Big] &= \sum_{m=1}^{n-1}\sum_{k=0}^{m-1}\int_{\{l(n)=m\}}(Y_k - \mathsf{E}Y_k)\mathrm{d}\mathsf{P} \\ &= \sum_{k=0}^{n-2}\sum_{m=k+1}^{n-1}\int_{\{l(n)=m\}}(Y_k - \mathsf{E}Y_k)\mathrm{d}\mathsf{P} \\ &= \sum_{k=0}^{n-2}\int_{\{l(n)>k\}}(Y_k - \mathsf{E}Y_k)\mathrm{d}\mathsf{P} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1}\int_{\Omega}(Y_k - \mathsf{E}Y_k)\mathrm{d}\mathsf{P} - \sum_{k=0}^{n-1}\int_{\{l(n)\le k\}}(Y_k - \mathsf{E}Y_k)\mathrm{d}\mathsf{P}. \end{aligned}$$

又由$l(n)$的定义有$\{l(n)<0\}=\emptyset$, 故

$$\begin{aligned}&\sum_{k=0}^{n-1}\int_{\Omega}(Y_k-\mathsf{E}Y_k)\mathrm{d}\mathsf{P}-\sum_{k=0}^{n-1}\int_{\{l(n)\le k\}}(Y_k-\mathsf{E}Y_k)\mathrm{d}\mathsf{P}\\ =&\sum_{k=0}^{n-1}\int_{\Omega}(Y_k-\mathsf{E}Y_k)\mathrm{d}\mathsf{P}-\sum_{k=1}^{n-1}\int_{\{l(n)<k\}}(Y_k-\mathsf{E}Y_k)\mathrm{d}\mathsf{P}-\sum_{k=0}^{n-1}\int_{\{l(n)=k\}}(Y_k-\mathsf{E}Y_k)\mathrm{d}\mathsf{P},\end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}&\sum_{k=0}^{n-1}\int_{\Omega}(Y_k-\mathsf{E}Y_k)\mathrm{d}\mathsf{P}-\sum_{k=1}^{n-1}\int_{\{l(n)<k\}}(Y_k-\mathsf{E}Y_k)\mathrm{d}\mathsf{P}-\sum_{k=0}^{n-1}\int_{\{l(n)=k\}}(Y_k-\mathsf{E}Y_k)\mathrm{d}\mathsf{P}\\ =&\sum_{k=0}^{n-1}\mathsf{E}(Y_k-\mathsf{E}Y_k)-\sum_{k=1}^{n-1}\mathsf{E}(Y_k-\mathsf{E}Y_k)\mathsf{P}(l(n)<k)-\sum_{k=0}^{n-1}\int_{\{l(n)=k\}}(Y_k-\mathsf{E}Y_k)\mathrm{d}\mathsf{P}\\ =&\sum_{k=0}^{n-1}\int_{\{l(n)=k\}}(\mathsf{E}Y_k-Y_k)\mathrm{d}\mathsf{P}.\end{aligned}$$

从而

$$\mathsf{E}\sum_{k=0}^{l(n)-1}(Y_k-\mathsf{E}Y_k)=\sum_{k=0}^{n-1}\int_{\{l(n)=k\}}(\mathsf{E}Y_k-Y_k)\mathrm{d}\mathsf{P},$$

因此有

$$\begin{aligned}\Big|\mathsf{E}\sum_{k=0}^{l(n)-1}(Y_k-\mathsf{E}Y_k)\Big| &= \Big|\sum_{k=0}^{n-1}\int_{\{l(n)=k\}}(\mathsf{E}Y_k-Y_k)\mathrm{d}\mathsf{P}\Big|\\ &\le \sum_{k=0}^{n-1}\int_{\{l(n)=k\}}(\mathsf{E}|Y_k|+|Y_k|)\mathrm{d}\mathsf{P}\\ &\le \sum_{k=1}^{n-1}\int_{\{l(n)=k\}}(\mathsf{E}\max\{U_0,\ldots,U_{n-1}\}+\max\{U_0,\ldots,U_{n-1}\})\mathrm{d}\mathsf{P}\\ &= \int_{\sum\limits_{k=0}^{n-1}\{l(n)=k\}}(\mathsf{E}\max\{U_0,\ldots,U_{n-1}\}+\max\{U_0,\ldots,U_{n-1}\})\mathrm{d}\mathsf{P}\\ &= 2\mathsf{E}(\max\{U_0,\ldots,U_{n-1}\}).\end{aligned}$$

由条件3.1及引理3.4有

$$\frac{1}{n}\Big|\mathsf{E}\Big[\sum_{k=0}^{l(n)-1}(Y_k-\mathsf{E}Y_k)\Big]\Big|\le\frac{2}{n}\mathsf{E}\max\{U_0,\ldots,U_{n-1}\}\to 0,\qquad(n\to\infty).$$

从而结论成立. □

定理 3.3 若条件3.1成立, 则

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{l(n)-1}(Y_k-\mathsf{E}Y_k)\to 0,\qquad \text{a.e..}$$

证明: 根据$l(n)$的定义有, 当$\tau_m < n \le \tau_{m+1}$ $(m \ge 0)$时, 令$l(n) = m$, 故

$$l(n) = m \le \tau_m < n \le \tau_{m+1},$$

从而$l(n)/n < 1$.

又由$l(n)$的定义, 当$n \to \infty$时, $l(n) \to \infty$, a.e..

令$A = \{l(n) \to \infty\}$, 则$\mathsf{P}(A) = 1$, 从而对$\forall\,\omega \in A$, 都有$l(n)(\omega) \to \infty$.

又由定理3.1, 对$\forall\,\omega \in A$都有

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}\Big|\sum_{k=0}^{l(n)(\omega)-1}(Y_k(\omega) - \mathsf{E}Y_k)\Big| &= \frac{l(n)(\omega)}{n} \cdot \frac{1}{l(n)(\omega)}\Big|\sum_{k=0}^{l(n)(\omega)-1}(Y_k(\omega) - \mathsf{E}Y_k)\Big| \\ &\le \frac{1}{l(n)(\omega)}\Big|\sum_{k=0}^{l(n)(\omega)-1}(Y_k(\omega) - \mathsf{E}Y_k)\Big| \to 0,\end{aligned}$$

从而

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{l(n)-1}(Y_k - \mathsf{E}Y_k) \to 0, \qquad \text{a.e..} \qquad \square$$

推论 3.1　若条件3.1成立, 则

$$\frac{1}{n}\Big\{\sum_{k=0}^{l(n)-1}(Y_k - \mathsf{E}Y_k) - \mathsf{E}\sum_{k=0}^{l(n)-1}(Y_k - \mathsf{E}Y_k)\Big\} \to 0, \qquad \text{a.e..}$$

证明: 由定理3.2和定理3.3有

$$\begin{aligned}&\frac{1}{n}\Big|\sum_{k=0}^{l(n)-1}(Y_k - \mathsf{E}Y_k) - \mathsf{E}\sum_{k=0}^{l(n)-1}(Y_k - \mathsf{E}Y_k)\Big| \\ \le\ &\frac{1}{n}\Big|\sum_{k=0}^{l(n)-1}(Y_k - \mathsf{E}Y_k)\Big| + \frac{1}{n}\Big|\mathsf{E}\sum_{k=0}^{l(n)-1}(Y_k - \mathsf{E}Y_k)\Big| \to 0, \qquad \text{a.e..}\end{aligned}$$

故结论成立.　　$\square$

§4.　大数定律

定理 4.1　若对$\forall\,k \ge 0$, 都存在常数c, 使得$D(Y_k) \le c$, 则$\{Y_k, k \ge 0\}$满足大数定理.

证明: 由引理3.2知$\{Y_k, k \ge 0\}$相互独立, 从而由切贝雪夫不等式, 对$\forall\,\varepsilon > 0$有

$$\begin{aligned}\mathsf{P}\Big\{\Big|\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(Y_k - \mathsf{E}Y_k)\Big| \ge \varepsilon\Big\} &\le \frac{1}{n^2\varepsilon^2}D\Big(\sum_{k=0}^{n-1}Y_k\Big) \\ &= \frac{1}{n^2\varepsilon^2}\sum_{k=0}^{n-1}D(Y_k) \le \frac{c}{n\varepsilon^2} \to 0,\end{aligned}$$

于是定理成立.　　$\square$

引理 4.1[9] 若马氏双链$\{(X_n,\xi_n),n\geq 0\}$是不可约、正常返的，且$\mathsf{E}(\tau_1^2)<\infty$，则

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\mathsf{E}(Y_k-\mathsf{E}Y_k)^2\to\nu^2,$$

其中ν为常数.

定理 4.2 若马氏双链$\{(X_n,\xi_n),n\geq 0\}$是不可约、正常返的，且$\mathsf{E}(\tau_1^2)<\infty$，则$\{Y_k,k\geq 0\}$满足大数定理.

证明: 由条件及引理4.1知

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\mathsf{E}(Y_k-\mathsf{E}Y_k)^2\to\nu^2,$$

又$\{Y_k,k\geq 0\}$相互独立，从而由切贝雪夫不等式，对$\forall\,\varepsilon>0$有

$$\begin{aligned}\mathsf{P}\Big\{\Big|\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(Y_k-\mathsf{E}Y_k)\Big|\geq\varepsilon\Big\} &\leq \frac{1}{n^2\varepsilon^2}D\Big(\sum_{k=0}^{n-1}Y_k\Big)\\ &= \frac{\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\mathsf{E}(Y_k-\mathsf{E}Y_k)^2}{n\varepsilon^2}\to 0,\end{aligned}$$

故定理成立. □

下面恒设$\vec{\xi}$是时齐的马氏链，$\forall\,m\geq 0$，$f_m\equiv f$.

引理 4.2 若$\vec{\xi}$是时齐的马氏链，$\forall\,m\geq 0$，$f_m\equiv f$，则$\{Y_k,k\geq 0\}$是$(\Omega,\Im,\mathsf{P})$上的独立同分布的随机变量列.

证明: 独立性已经由引理3.2证明了，下只证同分布性.

由引理2.1知，$\{(X_n,\xi_n),n\geq 0\}$是齐次马氏链，因此由强马氏性及$\mathsf{P}(X_{\tau_k}=x,\xi_{\tau_k}=\theta)=1$，对$\forall\,k\geq 0$有

$$\begin{aligned}\mathsf{P}(Y_k=a) &= \sum_{u=1}^{\infty}\sum_{n=k}^{\infty}\mathsf{P}(\tau_k=n,\tau_{k+1}-\tau_k=u,\\ &\qquad f(X_{\tau_k},\xi_{\tau_k})+\cdots+f(X_{\tau_k+u-1},\xi_{\tau_k+u-1})=a)\\ &= \sum_{u=1}^{\infty}\sum_{n=k}^{\infty}\int_{\{\tau_k=n\}}\mathsf{P}(\tau_{k+1}-\tau_k=u,\\ &\qquad f(X_{\tau_k},\xi_{\tau_k})+\cdots+f(X_{\tau_k+u-1},\xi_{\tau_k+u-1})=a|\aleph_{\tau_k})\mathrm{d}\mathsf{P}\\ &= \sum_{u=1}^{\infty}\sum_{n=k}^{\infty}\int_{\{\tau_k=n\}}\mathsf{P}(\tau_{k+1}-\tau_k=u,\\ &\qquad f(X_{\tau_k},\xi_{\tau_k})+\cdots+f(X_{\tau_k+u-1},\xi_{\tau_k+u-1})=a|X_{\tau_k},\xi_{\tau_k})\mathrm{d}\mathsf{P}\\ &= \sum_{u=1}^{\infty}\int_{\{\tau_0=0\}}\mathsf{P}(\tau_1=u,\\ &\qquad f(X_0,\xi_0)+f(X_1,\xi_1)+\cdots+f(X_{u-1},\xi_{u-1})=a|X_0,\xi_0)\mathrm{d}\mathsf{P}\\ &= \sum_{u=1}^{\infty}\mathsf{P}(\tau_1=u,f(X_0,\xi_0)+f(X_1,\xi_1)+\cdots+f(X_{u-1},\xi_{u-1})=a).\end{aligned}$$

从而结论成立.　□

令

$$S_n=\frac{1}{n+1}\sum_{k=n(n+1)/2}^{n(n+3)/2}Y_k,\qquad n\geq 0.$$

引理 4.3　$\{S_n,n\geq 0\}$是$(\Omega,\Im,\mathsf{P})$上的独立随机变量列.

证明:　由引理3.2知, $\{Y_k,k\geq 0\}$是$(\Omega,\Im,\mathsf{P})$上的独立随机变量列, 从而$\{S_n,n\geq 0\}$也是$(\Omega,\Im,\mathsf{P})$上的独立随机变量列.　□

定理 4.3　若$\vec{\xi}$是时齐的马氏链, $\forall\, m\geq 0$, $f_m\equiv f$, 且$DY_0<\infty$, 则

$$(\mathsf{P})\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{m=0}^{n-1}\Big(\frac{S_m}{m+1}-\frac{\mathsf{E}S_m}{m+1}\Big)=0,$$

这里$(\mathsf{P})\lim\limits_{n\to\infty}$表示依概收敛.

证明:　由条件及引理4.2知, $\{Y_k,k\geq 0\}$是$(\Omega,\Im,\mathsf{P})$上的独立且同分布的随机变量列, 又由引理4.3及切比雪夫不等式, 对$\forall\,\varepsilon>0$有

$$\begin{aligned}
\mathsf{P}\Big\{\frac{1}{n}\Big|\sum_{m=0}^{n-1}\Big(\frac{S_m}{m+1}-\frac{\mathsf{E}S_m}{m+1}\Big)\Big|\geq\varepsilon\Big\}
&\leq \frac{D\Big(\sum\limits_{m=0}^{n-1}\dfrac{S_m}{m+1}\Big)}{n^2\varepsilon^2}\\
&=\frac{\sum\limits_{m=0}^{n-1}\dfrac{DS_m}{(m+1)^2}}{n^2\varepsilon^2}=\frac{\sum\limits_{m=0}^{n-1}\dfrac{1}{(m+1)^2}\sum\limits_{k=0}^{m}DY_k}{n^2\varepsilon^2}\\
&=\frac{\sum\limits_{m=0}^{n-1}\dfrac{1}{m+1}\dfrac{1}{m+1}\sum\limits_{k=0}^{m}DY_k}{n^2\varepsilon^2}\\
&=\frac{\sum\limits_{m=0}^{n-1}\dfrac{DY_0}{m+1}}{n^2\varepsilon^2}\leq\frac{DY_0}{n\varepsilon^2}\to 0,
\end{aligned}$$

故结论成立.　□

参 考 文 献

[1] Cogburn, R., The ergodic theory of Markov chains in random environments, *Z. Wahrsch. Verw. Gebiete*, **66**(1984), 109–128.

[2] Cogburn, R., On direct convergence and periodicity for transition probabilities of Markov chains in random environments, *Annprobab*, **18**(1990), 642–654.

[3] Cogburn, R., On the central limit theorem for Markov chains in random environments, *Annprobab*, **19**(1991), 587–604.

[4] 王汉兴, 戴永隆, 马氏环境中马氏链的Poisson极限律, 数学学报, **40(2)**(1997), 266–270.

[5] 李应求, 关于马氏环境中马氏链的几点注记, 数学进展, **28(4)**(1999), 358–360.

[6] Nawrotzkii, K., Finite Markov chains in stationary random environments, *Z. W.*, **10**(1982), 1041–1046.

[7] 李应求, 状态可数的马氏环境中马氏链函数的强大数定律, 数学杂志, **23(4)**(2003), 483–490.

[8] 朱成熹, 随机极限引论, 南开大学出版社, 1983.

[9] Chung, K.L., *Markov Chains with Stationary Transition Probability*, Springer, Berlin, 1960.

[10] 郭明乐, 马氏环境中马氏链的强大数定律, 应用数学, **16(4)**(2003), 143–148.

The Strong Law of Large Numbers and the Law of Large Numbers for Markov Chains in Random Environments

Li Mingliang[1,2] Liu Zaiming[1]

([1] *College of Mathematical Sciences and Computing Technology, Central South University, Changsha, 410083*)

([2] *Department of Mathematics and Science, Hunan First Normal University, Changsha, 410205*)

In this paper, we primarily study the strong law of large numbers and the law of large numbers of some special functions for Markov chains in unidirectional infinitely Markovian environments, and give some sufficient conditions on the jointly Markov chains and the sample function of the jointly Markov chains.

Keywords: Random environments, Markov chains, the law of large numbers, the strong law of large numbers.

AMS Subject Classification: 60J10, 60F05.