应用简报

混合连接网络度分布的稳定性 *

孔祥星[1]　赵清贵[2]　侯振挺[1⋆]

([1]中南大学数学科学与计算技术学院, 长沙, 410075; [2]重庆文理学院数学与统计学院, 重庆, 402160)

摘　要

本文对既有择优连接, 又有随机连接的网络(简称混合连接网络)进行了研究. 基于马氏链理论, 本文给出它们度分布稳定性存在的严格证明, 并且得到相应网络的度分布和度指数的精确表达式. 特别, 在连接规则中只要存在择优成分, 网络度分布就服从幂律分布即所得网络为无标度网络, 且度指数随着择优连接在连接规则中所占比例的变化而变化.

关键词: 混合连接网络, 无标度网络, 马氏链, 度分布.

学科分类号: O212.62.

§1. 引　言

自然界中存在的大量复杂系统, 如社会、生物、通讯系统等都可以用网络来描述. 其中结点是系统中的元素, 边代表元素之间的相互作用或连接. 如因特网中的结点代表网页, 边表示网页之间的超连接; 商业网络中节点代表公司, 边表示它们之间各种商业关系等.

网络作为一门科学, 到目前为止, 经历了三个阶段. 首先, 欧拉开创了图论学科. 其次, 二十世纪中叶, Erdös和Rényi引入了随机图论[1], 再者就是近年来由Watts和Strogatz(1998)提出的小世界网络以及Barbási和Albert(1999)提出的无标度网络而产生的复杂网络.

很多现实网络如因特网、演员合作网络[3, 4]等, 研究发现具有度数为k的结点在网络中所占份额衰减服从幂律分布$P(k)\sim k^{-\gamma}$, 其中γ为独立于网络规模的常数, 这个结果说明很多大规模的网络自组织成无标度(scale-free)网络. 为了说明无标度性产生的内在机制: 增长和择优. Barbási和Albert提出了著名的BA模型[3], 通过计算机模拟得到$\gamma=2.9\pm0.1$, 在[4]中通过平均场方法启发式地得到$\gamma=3$. BA模型文章的发表立刻引起了科学界研究复杂网络的热潮, 至今已有数以百计的模型被提出和研究. 而后, Krapivsky et al. (2000)用率方程方法, Dorogovtsev et al. (2000)用主方程方法分别研究了BA模型都得到了与平均场方法相同的结果.

*高等学校博士学科点专项科研基金(20090162110058)和重庆市教委科技项目基金(KJ101210)资助.

⋆通讯作者, E-mail: csupolaris@sina.com.

本文2008年12月10日收到, 2011年3月2日收到修改稿.

Liu et al. (2002)认为现实中很多网络的连接规则既不是完全随机连接, 又不是完全择优连接, 而是介于这两者之间的某种混合连接. 为此他们提出混合连接的网络模型: 新结点与旧结点i相连的概率与$(1-p)k_i+p$成正比, 即

$$\Pi(k_i)=\frac{(1-p)k_i+p}{\sum\limits_j[(1-p)k_j+p]},$$

其中, $0\leq p\leq 1$表示新结点在旧结点中随机连线的概率, 以概率$1-p$新结点在旧结点中择优选择结点i. 当$p=0$时退化为BA模型, 当$p=1$时退化为随机连接模型度分布为指数分布. 当$0<p<1$他们认为产生一个介于无标度和随机网络之间的网络.

本文将首次利用马氏链方法研究混合连接的增长网络, 给出它们度分布稳定性存在的严格证明, 并且得到相应网络度分布的精确表达式. 特别,发现当连接规则中只要存在择优成分($p<1$), 网络度分布就是幂律分布, 且度指数随p的变化而变化.

§2. 模型描述

设初始网络有m_0个结点, 度数之和为N. 每单位时间增加一个新结点和m条从这个结点出发的新连线, 为了包含随机和择优, 构造新结点选择旧结点i的概率Π与$(1-p)k_i+p$成正比, 即

$$\Pi(k_i)=\frac{(1-p)k_i+p}{\sum\limits_j[(1-p)k_j+p]},$$

其中$0\leq p\leq 1$, 表示新结点在旧结点中随机连线的概率, 以概率$1-p$新结点在旧结点中择优选择结点. 从而, t时刻网络中共m_0+t个结点, 总度数之和为$N+2mt$.

令$k_i(t)$表示i时刻加入的结点在t时刻的度数, 易知, $\{k_i(t)\}$ $(t=i,i+1,\ldots)$是非齐次马氏链, 令$P(k,i,t)=\mathsf{P}\{k_i(t)=k\}$, 由模型的构造, $\{k_i(t)\}$ $(t=i,i+1,\ldots)$的初始分布为$P(k,i,i)=\delta_{km}$, 其中$\delta_{mm}=1$; 当$k\neq m$时, $\delta_{km}=0$, 转移概率为

$$\mathsf{P}\{k_i(t+1)=l|k_i(t)=k\}=\begin{cases}1-\dfrac{m[(1-p)k+p]}{(1-p)(N+2mt)+p(m_0+t)} & l=k;\\ \dfrac{m[(1-p)k+p]}{(1-p)(N+2mt)+p(m_0+t)} & l=k+1;\\ 0 & \text{其它}.\end{cases}\tag{2.1}$$

§3. 度分布

对任一结点一加入网络度数即为m, 从而网络中结点的度数最小为m, 且结点的度数总是增加的. 要考虑度数为m的结点在网络总结点中所占的份额, 只需考虑那些加入网络以

后任何时间步都不增加连线的结点. 记

$$P(k,t)=\frac{1}{t}\sum_{i=1}^{t}P(k,i,t),$$

从而可得到如下引理:

引理 3.1 $P(m)=\lim\limits_{t\to\infty}P(m,t)$存在, 与初始网络无关, 且有

$$P(m)=\frac{2m-(2m-1)p}{m^2+2m-(m^2+m-1)p}>0.$$

证明: 由网络构造可知, 结点i在刚加入网络的度数为m (即$P(m,i,i)=1$), 有

$$P(m,i,t+1)=P(m,i,t)\Big\{1-\frac{m[(1-p)m+p]}{(1-p)(N+2mt)+p(m_0+t)}\Big\}\qquad(1\le i\le t),$$

$$P(m,t+1)=\frac{t}{t+1}P(m,t)\Big\{1-\frac{m[(1-p)m+p]}{(1-p)(N+2mt)+p(m_0+t)}\Big\}+\frac{1}{t+1}.\tag{3.1}$$

(3.1)为一差分方程, 解得

$$\begin{aligned}P(m,t)&=\frac{1}{t}\prod_{i=1}^{t-1}\Big\{1-\frac{m[(1-p)m+p]}{(1-p)(N+2mi)+p(m_0+i)}\Big\}\\&\quad\times\Big\{P(m,1)+\sum_{l=1}^{t-1}\prod_{j=1}^{l}\Big\{1-\frac{m[(1-p)m+p]}{(1-p)(N+2mj)+p(m_0+j)}\Big\}^{-1}\Big\}.\end{aligned}$$

令

$$x_t=P(m,1)+\sum_{l=1}^{t-1}\prod_{j=1}^{l}\Big\{1-\frac{m[(1-p)m+p]}{(1-p)(N+2mj)+p(m_0+j)}\Big\}^{-1},$$

$$y_t=t\prod_{i=1}^{t-1}\Big\{1-\frac{m[(1-p)m+p]}{(1-p)(N+2mi)+p(m_0+i)}\Big\}^{-1}>t,\qquad t\to\infty,$$

则有$P(m,t)=x_t/y_t$,

$$\begin{aligned}x_{t+1}-x_t&=\prod_{j=1}^{t}\Big\{1-\frac{m[(1-p)m+p]}{(1-p)(N+2mj)+p(m_0+j)}\Big\}^{-1},\\y_{t+1}-y_t&=\Big\{1+\frac{mt[(1-p)m+p]}{(1-p)(N+2mt)+p(m_0+t)}\Big\}\\&\quad\cdot\prod_{i=1}^{t}\Big\{1-\frac{m[(1-p)m+p]}{(1-p)(N+2mi)+p(m_0+i)}\Big\}^{-1}>0,\\\frac{x_{t+1}-x_t}{y_{t+1}-y_t}&=\frac{1}{1+mt[(1-p)m+p]/[(1-p)(N+2mt)+p(m_0+t)]}\\&\to\frac{2m-(2m-1)p}{m^2+2m-(m^2+m-1)p},\qquad t\to\infty.\end{aligned}$$

由Stolz定理得, $P(m)=\lim_{t\to\infty}P(m,t)$存在, 且

$$P(m)=\lim_{t\to\infty}P(m,t)=\lim_{t\to\infty}\frac{x_t}{y_t}=\lim_{t\to\infty}\frac{x_{t+1}-x_t}{y_{t+1}-y_t}=\frac{2m-(2m-1)p}{m^2+2m-(m^2+m-1)p}. \qquad \square$$

上述引理说明网络演化过程中所得度数为m的结点在总结点中所占的份额$P(m)$是参数p的函数. 当$p=0$时即为BA模型, $P(m)=2/(m+2)$. 当$p=1$时, $P(m)=1/(m+1)$.

对于在t时刻度数为$k\ (k>m)$的结点, 在$t-1$时刻的度数可能为k或$k-1$, 即度数为k结点可能是由度数为k的结点不增加连线和度数为$k-1$的结点增加一条新连线而得到(因为网络结点的度数不能减少). 因此, 可得如下引理:

引理 3.2 设$k>m$, 若$P(k-1)=\lim_{t\to\infty}P(k-1,t)$存在且大于零, 则$\lim_{t\to\infty}P(k,t)$也存在, 记为$P(k)$, 且有

$$P(k)=\frac{m(1-p)k+2mp-m}{m(1-p)k+2m-mp+p}P(k-1)>0, \qquad (k>m). \tag{3.2}$$

证明: 证明过程类似引理3.1. $\square$

由引理3.2, 我们可以得到$P(k)$和$P(k-1)$的关系式. 对于(3.2)式, 当$p=0$时, 变为$P(k)=[(k-1)/(k+2)]P(k-1)$; 当$p=1$时, 变为$P(k)=[m/(m+1)]P(k-1)$; 当$0<p<1$时, 可以化为

$$P(k)=\frac{k-1+p/(1-p)}{k+(2-p)/(1-p)+p/[m(1-p)]}P(k-1).$$

由引理3.1和引理3.2, 及数学归纳法, 可得到下面定理:

定理 3.1 $P(k)\ (k=m,m+1,\ldots)$存在, 且当$k\geq m$时, 有

$$P(k)=\begin{cases}\dfrac{2m(m+1)}{k(k+1)(k+2)}, & p=0;\\[2ex] \dfrac{\Gamma[k+p/(1-p)]}{\Gamma[k+1+(2-p)/(1-p)+p/(m(1-p))]} & \\[2ex] \quad\cdot\dfrac{\Gamma[m+1+(2-p)/(1-p)+p/(m(1-p))]}{\Gamma[m+p/(1-p)]} & \\[2ex] \quad\cdot\dfrac{2m-(2m-1)p}{m^2+2m-(m^2+m-1)p}, & 0<p<1;\\[2ex] \dfrac{1}{m+1}\dfrac{m}{m+1}^{k-m}, & p=1.\end{cases}$$

对于上式当$p=0$时, 即为BA模型有

$$P(k)=\frac{2m(m+1)}{k(k+1)(k+2)}\sim k^{-3},$$

所得度分布为幂律分布, 与[4–6]中解析结果和模拟一致; 当$p=1$时度分布不是幂律分布, 从而所得网络不是无标度网络. 当$0<p<1$时, $P(k)\sim k^{-\gamma}$, 其中$\gamma=3+p/[m(1-p)]$. 从而度分布是幂律分布, 即网络是无标度网络, 度指数$\gamma=3+p/[m(1-p)]$是新结点所带线条数和随机所在线性连线规则中所占比例p的函数.

§4. 结　论

对于连线规则, 如果是随机连线, 所得网络度分布不是幂律分布, 从而不是无标度网络. 如果只有择优不含随机连线, 此时网络模型为著名的BA模型, 网络自组织演化所得网络是度指数$\gamma=3$的无标度网络. 在连接规则中只要存在择优成分, 所得网络的度分布服从幂律分布, 但此时的度指数γ不再是常数, 而是新结点所带连线数m和随机连线所占比例p的函数.

从上述分析可以看出对于上述连线规则只要含有择优因素, 所得网络的度分布就服从幂律分布, 可产生无标度网络, 而非择优连线则会破坏无标度网络的产生. 从而, 验证了Barbási等人在[3]中所述择优是产生无标度网络的一个必要条件.

参 考 文 献

[1] Erdös P., Rényi.A., On the evolution of random graphs, Publications of the Mathematical Institute Hungarian Academy Sciences 5(1960),17-61.

[2] Watts D. J. and Strogatz S. H., Collective dynamics of small-world networks, Nature, 393(1998), 440-442.

[3] Barbási A.-L. and Albert R., Emergence of Scaling in Random Networks, Science, 286(1999), 509-512.

[4] Barbási A. -L.,Albert R. and Jeong H., Mean-field theory for scale-free random network,Physica A 272(1999), 173-187.

[5] Krapivsky P. L., Redner S. and Leyvraz F. Connectivity of growing random Networks,Phys. Rev. Lett. 85(2000), 4629-4632.

[6] Dorogovtsev S. N., Mendes J. F. F. and Samukhin A. N., Structure of growing networks with preferential linking, Phys. Rev. Lett. 85(2000), 4633-4636.

[7] Liu Z.H.,et al.,Connective distribution and attack tolerance of general networks with both preferential and random attachments, Phy.Lett A303(2002),337-334.