应用概率统计　第二十七卷
第五期　2011年10月

Chinese Journal of Applied Probability
and Statistics Vol.27 No.5 Oct. 2011

ρ混合过程下变窗宽局部M-估计的强相合性 *

罗中德
(百色学院数学与计算机信息工程系, 百色, 533000)

杨善朝
(广西师范大学数学科学学院, 桂林, 541004)

摘　要

考虑到在实际应用中, 运用变窗宽局部M-估计进行非参数估计时, 所收集到的数据有时并非独立样本, 而可能是一些混合样本. 因此, 本文就观测数据为ρ混合过程的条件下, 讨论了变窗宽局部M-估计的强相合性, 并给出两个具有较弱假设条件的定理.

关键词: ρ混合过程, 变窗宽, 局部M-估计, 强相合性.

学科分类号: O212.7.

§1. 引　　言

回归估计在金融、计量经济和控制系统理论等领域有着广泛的用途, 许多学者提出了各种非参数回归方法, 其中局部多项式核回归估计已经被证明是一个有效的非参数回归方法. 相对传统的核方法而言, 局部多项式核回归估计具有诸多优点, 如设计的自相适应性和高的渐进效率等, 而且, 局部多项式核回归能够适应几乎所有的回归设计并且能有效的处理好边界效应问题(见文献[1]、[2]).

然而, 局部多项式核回归估计方法的一个不足之处是缺乏稳健性. 又由于M-型回归估计已经被证明具有良好的稳健性, 因此很多学者将局部多项式核回归估计与M-型回归估计有效的结合, 从而得到了局部M-估计, 并且证明了局部M-估计也像局部多项式核回归估计那样具有较好的渐进性质, 同时也能成功的处理边界效应问题(见文献[3]-[9]). 在独立样本下, 文献[3]考察了多项式拟合的局部M-型估计的极大极小化收敛速度; 文献[4]和[5]证明了局部M-回归估计能成功地处理边界效应问题且是有效的导数估计方法; 文献[6]在上述的局部M-回归方法中嵌入了一个变窗宽并给出该回归方法的弱相合性和渐进正态性, 使得所提出的估计方法能成功的处理空间非齐性曲线、异方差和高度非均匀设计. 在非独立样本的情况下, 文献[7]研究了在观测数据为ρ混合过程和α混合过程的条件下, 局部M-估计的弱相合性和渐进正态性; 文献[8]研究了在观测数据为混合时间序列(为α-混合过程)的条件下, 变窗宽局部M-估计的弱相合性、强相合性和渐进正态性; 文献[9]研究了观测数据为PA序列和NA序列的条件下变窗宽局部M-估计的弱相合性和渐进正态性.

*国家自然科学基金项目(11061007)、广西自然科学基金项目(2011GXNSFA018133)、广西教育厅科研立项项目(201106LX622)资助.

本文2010年3月15日收到, 2011年5月3日收到修改稿.

在实际应用中, ρ混合过程是一类较为广泛的混合过程, 因此我们有必要讨论在该类混合过程条件下局部M-估计的强相合性, 而就笔者所知, 很少有文献讨论ρ混合过程下变窗宽局部M-估计的强相合性. 为此, 本文研究了在ρ混合过程条件下变窗宽局部M-估计的强相合性, 通过对窗宽的收敛速度进行适当的控制, 文章在第二节给出了两个假设条件比较弱的定理, 这一结果与文献[7]中的弱相合性相比有更大的理论价值. 下面先来了解一下变窗宽局部M-估计的相关定义.

令$(X_1,Y_1),\ldots,(X_n,Y_n)$是来自密度函数为$f(x,y)$的总体$(X,Y)$的随机样本, $f_X(x)$是X的边缘密度. 本文考虑如下的回归函数: $m(x)=\mathsf{E}(Y|X=x)$, $x\in\mathcal{R}$. 为简单起见, 本文主要研究局部线性拟合的情况, 而对于局部多项式拟合的情况只要运用类似的方法就可得到同样结论. 文献[6]给出如下准则: 求a和b以满足以下局部估计方程组

$$\begin{cases}\sum\limits_{i=1}^{n}\psi(Y_i-a-b(X_i-x))\alpha(X_i)K\Big(\dfrac{X_i-x}{h}\alpha(X_i)\Big)=0,\\ \sum\limits_{i=1}^{n}\psi(Y_i-a-b(X_i-x))\dfrac{X_i-x}{h}\alpha(X_i)K\Big(\dfrac{X_i-x}{h}\alpha(X_i)\Big)=0,\end{cases}\tag{1.1}$$

其中, $K(\cdot)$是核函数; h是一正数列, 且$h\to0$ $(n\to\infty)$; $\alpha(\cdot)$是反映在每一数据点磨光程度可以变化的非负函数, 并称$h/\alpha(X_i)$为变窗宽; $\psi(\cdot)$是某抗异常值的函数$g(\cdot)$的导数; $m(x)$和$m'(x)$的M-型估计则分别定义为方程组(1.1)的解$\widehat{a}$和$\widehat{b}$, 并分别用$\widehat{m}_n(x)$和$\widehat{m}_n'(x)$来表示.

§2. 假设与主要结论

定义 2.1 记

$$\rho(n):=\sup_{k\in N}\sup_{X\in L_2(\mathcal{F}_1^k)Y\in L_2(\mathcal{F}_{k+n}^\infty)}\frac{|\mathsf{E}(X-\mathsf{E}X)(Y-\mathsf{E}Y)|}{\sqrt{\mathsf{Var}\,X\mathsf{Var}\,Y}},$$

其中$\mathcal{F}_a^b=\sigma\{\{X_i,Y_i\}_{i=a}^b\}$. 称过程$\{X_i,Y_i\}_{i=1}^\infty$是$\rho$混合的, 如果有$\rho(n)\to0$, $n\to\infty$.

对给定的点x_0, 全文采用如下的符号和假设:

(A_1) 核函数$K(\cdot)$是一连续的概率密度函数, 并且具有有界支撑, 比如$[-1,1]$. 对$l\geq0$, 令$s_l:=\displaystyle\int u^lK(u)\mathrm{d}u$;

(A_2) $\alpha^*:=\min\limits_x\alpha(x)$, $\alpha(x)$有界且在x_0点连续;

(A_3) 回归函数$m(\cdot)$在点x_0有连续二阶导数;

(A_4) 窗宽序列满足: 当$n\to\infty$时, $h\to0$且$nh\to+\infty$;

(A_5) $\mathsf{E}[\psi(\varepsilon)|X=x]=0$, 其中$\varepsilon=Y-m(X)$;

(A_6) 设计密度$f_X(\cdot)$在x_0处连续且$f_X(x_0)>0$;

(A_7) 函数$\psi(\cdot)$连续且几乎处处有导数$\psi'(\cdot)$. 进一步的, 假设$\psi_\varepsilon(x)=\mathsf{E}[\psi'(\varepsilon)|X=x]$在$x_0$处连续且是正的, $\mathsf{E}[\psi(\varepsilon)|X=x]$在$x_0$处连续;

(A_8) 在点x_0的领域$U(x_0,\delta)$内一致的满足:

$$\mathsf{E}\Big[\sup_{|z|\le\delta}|\psi(\varepsilon+z)-\psi(\varepsilon)-\psi'(\varepsilon)z|\,|X=x\Big]=o(\delta),\qquad \delta\to 0;$$

(A_9) 设$\{X_i,Y_i\}_{i=1}^{\infty}$是一个平稳的$\rho$混合过程, 且存在$\theta>0$, 使$\rho(n)=O(n^{-\theta})$.

注记 1 (1) 条件(A_1)-(A_8)与文献[6]中在独立样本情形下所给的条件是一致的, 正如文献[6]所指出的, 条件(A_1)-(A_8)是适当的且满足很多应用的需要. 这是因为上述条件不需要$\psi(\cdot)$的单调性和有界性, 至于核函数$K(\cdot)$的有界支撑的限制也不是本质的, 它只是用来避免复杂的证明, 如果对$K(\cdot)$的尾部提出必要的限制条件的话则可以去掉它的有界支撑限制;

(2) 这里对于ρ-混合系数的要求要比文献[7]弱得多, 在文献[7]中要求ρ-混合系数满足$\sum\limits_{n}\rho(n)<+\infty$, 而本文只要求存在$\theta>0$, 使$\rho(n)=O(n^{-\theta})$.

本文的主要结论如下.

定理 2.1 设条件(A_1)-(A_9)成立, 又设: (1) $M_1,M_2>0$, 使得$\{|\psi(\varepsilon)|\,|X=x\}\le M_1$, $\{|\psi'(\varepsilon)|\,|X=x\}\le M_2$; (2) 存在$1>\lambda>0$, 使$nh=O(n^{\lambda})$, 则

$$\{\widehat{m}_n(x_0)-m(x_0),h(\widehat{m}_n'(x_0)-m'(x_0))\}\to 0,\qquad \text{a.s.}.$$

定理 2.2 设条件(A_1)-(A_9)成立, 又设: (1) 存在$r_1,r_2>1$, 使$\mathsf{E}[|\psi(\varepsilon)|^{r_1}|X=x]<\infty$, $\mathsf{E}[|\psi'(\varepsilon)|^{r_2}|X=x]<\infty$; (2) λ满足$1/r<\lambda<1$, 且$nh=O(n^{\lambda})$, 其中$r=\min\{r_1,r_2\}$, 则$\{\widehat{m}_n(x_0)-m(x_0),h(\widehat{m}_n'(x_0)-m'(x_0))\}\to 0$, a.s..

注记 2 在ρ-混合过程的情况下, 我们通过对窗宽进行适当的选取, 从而弱化了对随机误差项矩的阶数的要求. 这一结果与文献[7]中的弱相合性相比, 不仅降低了对ρ混合系数收敛速度的要求, 而且具有更大的理论价值.

§3. 定理的证明

为了书写方便, 本文采用如下符号:

$$\alpha_i=\alpha(X_i),\quad K_i=K\Big(\frac{X_i-x_0}{h}\alpha(X_i)\Big),\quad R(X_i)=m(X_i)-m(x_0)-m'(x_0)(X_i-x_0).$$

并且为使证明过程更加流畅, 本文用记号"$\ll$"表示通常的大"O".

引理 3.1[10] 设$\{X_i:i\ge 1\}$为ρ混合序列, 存在某个$\theta>0$使$\rho(n)=O(n^{-\theta})$. 又设$\mathsf{E}X_i=0$, $\mathsf{E}|X_i|^q<\infty$ (其中$q>1$). 则对任意整数$m\ge 1$, 存在正常数$C(m)$使, 当$1<q\le 2$时, 有

$$\mathsf{E}\Big|\sum_{i=1}^{n}X_i\Big|^q\le C(m)n^{\sigma(m)}\sum_{i=1}^{n}\mathsf{E}|X_i|^q,$$

当$q>2$时, 有

$$\mathsf{E}\Big|\sum_{i=1}^n X_i\Big|^q \le C(m)n^{\sigma(m)}\Big\{\sum_{i=1}^n \mathsf{E}|X_i|^q+\Big(\sum_{i=1}^n \mathsf{E}X_i^2\Big)^{q/2}\Big\},$$

其中$\sigma(m)=(q-1)\alpha^m$且$0<\alpha<1$. 注意到当$m\to\infty$时, $\sigma(m)\to 0$.

引理 3.2 设条件(A_1)-(A_9)成立, 则

$$\mathsf{E}\Big\{\sum_{i=1}^n (X_i-x_0)^l\alpha_iK_i\Big\}=\alpha^{-l}(x_0)nh^{l+1}f_X(x_0)s_l(1+o(1)),$$

$$\mathsf{E}\Big\{\sum_{i=1}^n (X_i-x_0)^l R(X_i)\alpha_iK_i\Big\}=\frac{1}{2}\alpha^{-l-2}(x_0)nh^{l+3}m''(x_0)f_X(x_0)s_{l+2}(1+o(1)).$$

证明: 由文献[11]的引理4的证明过程易得. □

引理 3.3 设定理2.1或定理2.2中的条件成立, 则几乎处处的有

$$\sum_{i=1}^n \psi(\varepsilon_i)(X_i-x_0)^l\alpha_iK_i=o(nh^{l+1}), \tag{3.1}$$

$$\sum_{i=1}^n \psi'(\varepsilon_i)(X_i-x_0)^l\alpha_iK_i=\psi_\varepsilon(x_0)\alpha^{-l}(x_0)nh^{l+1}f_X(x_0)s_l(1+o(1)), \tag{3.2}$$

$$\sum_{i=1}^n \psi'(\varepsilon_i)(X_i-x_0)^l R(X_i)\alpha_iK_i=\frac{1}{2}\psi_\varepsilon(x_0)\alpha^{-l-2}(x_0)nh^{l+3}m''(x_0)f_X(x_0)s_{l+2}(1+o(1)). \tag{3.3}$$

证明: (3.1)式的证明: (1) 首先证明在定理2.2的条件下(3.1)式成立. 由$1/r<\lambda<1$知, $1/r_1<\lambda<1$, 所以$(1-\lambda)/(r_1-1)<\lambda$, 从而存在$\tau>0$和$s>0$, 使得

$$\frac{2s+1-\lambda}{r_1-1}<\tau<\lambda<1. \tag{3.4}$$

记$Z_i^l=\psi(\varepsilon_i)(X_i-x_0)^l\alpha_iK_i$, $Z_i^l(1)=\psi(\varepsilon_i)(X_i-x_0)^l\alpha_iK_iI_{(|\psi(\varepsilon_i)|\le n^\tau)}$, $Z_i^l(2)=Z_i^l-Z_i^l(1)$. 由$\mathsf{E}[\psi(\varepsilon)|X=x]=0$知$\mathsf{E}Z_i^l=0$, 从而

$$\begin{aligned}&\frac{1}{nh^{l+1}}\sum_{i=1}^n \psi(\varepsilon_i)(X_i-x_0)^l\alpha_iK_i\\ =\;&\frac{1}{nh^{l+1}}\sum_{i=1}^n (Z_i^l(1)-\mathsf{E}Z_i^l(1))+\frac{1}{nh^{l+1}}\sum_{i=1}^n (Z_i^l(2)-\mathsf{E}Z_i^l(2)):=S_n(1)+S_n(2).\end{aligned}$$

因此为了证明(3.1)式, 我们只需分别证明$S_n(1)\to 0$, a.s.和$S_n(2)\to 0$, a.s.即可.

(i) 先证$S_n(1)\to 0$, a.s.. 由引理3.1得, 对任意$\epsilon>0$, 和$q>2$有

$$\begin{aligned}\mathsf{P}(|S_n(1)|>\epsilon)\;&\ll\;(nh^{l+1})^{-q}\mathsf{E}\Big|\sum_{i=1}^n (Z_i^l(1)-\mathsf{E}Z_i^l(1))\Big|^q\\ &\ll\; n^{\sigma(m)-q}h^{-q(l+1)}\Big\{\sum_{i=1}^n \mathsf{E}|(Z_i^l(1)-\mathsf{E}Z_i^l(1))|^q\\ &\quad+\Big(\sum_{i=1}^n \mathsf{E}|Z_i^l(1)-\mathsf{E}Z_i^l(1)|^2\Big)^{q/2}\Big\}.\end{aligned} \tag{3.5}$$

利用引理3.2, $K(\cdot)$和$\alpha(\cdot)$非负有界, 并注意到$|X_i - x_0| \le h/\alpha^*$, 有

$$\begin{aligned} \mathsf{E}|(Z_i^l(1) - \mathsf{E}Z_i^l(1))|^q &\ll \mathsf{E}|Z_i^l(1)|^q \\ &= \mathsf{E}\{\mathsf{E}|\psi(\varepsilon_i)(X_i - x_0)^l \alpha_i K_i I_{(|\psi(\varepsilon_i)| \le n^\tau)}|^q |X_i\} \\ &\ll \mathsf{E}\{|\psi(\varepsilon_i)|^q I_{(|\psi(\varepsilon_i)| \le n^\tau)}|X_i = x_0\}\mathsf{E}\{|(X_i - x_0)^l \alpha_i K_i|^q\} \\ &\ll n^{\tau(q-r_1)}h^{ql}\mathsf{E}\{|\psi(\varepsilon_i)|^{r_1} I_{(|\psi(\varepsilon_i)| \le n^\tau)}|X_i = x_0\}\mathsf{E}(\alpha_i K_i) \\ &\ll n^{\tau(q-r_1)}h^{ql}\mathsf{E}\{|\psi(\varepsilon_i)|^{r_1}|X_i = x_0\}hs_0 \\ &\ll n^{\tau(q-r_1)}h^{ql+1}. \end{aligned} \tag{3.6}$$

同理, 有

$$\mathsf{E}|Z_i^l(1) - \mathsf{E}Z_i^l(1)|^2 \ll n^{\tau(2-r_1)}h^{2l+1}, \qquad 1 < r_1 < 2, \tag{3.7}$$

$$\mathsf{E}|Z_i^l(1) - \mathsf{E}Z_i^l(1)|^2 \ll h^{2l+1}, \qquad r_1 \ge 2. \tag{3.8}$$

利用(3.6)-(3.8)式, (3.5)式变为

$$\mathsf{P}(|S_n(1)| > \epsilon) \ll n^{\sigma(m)}[n^{-(\lambda-\tau)q+\lambda-\tau r_1} + n^{-[\lambda-(2-r_1)\tau]q/2}], \qquad 1 < r_1 < 2,$$

$$\mathsf{P}(|S_n(1)| > \epsilon) \ll n^{\sigma(m)}[n^{-(\lambda-\tau)q+\lambda-\tau r_1} + n^{-q\lambda/2}], \qquad r_1 \ge 2.$$

由(3.4)式得, $\lambda - \tau > 0$, 且$(r_1 - 1)\tau > 0$, 从而$\lambda - (2 - r_1)\tau = (\lambda - \tau) + (r_1 - 1)\tau > 0$, 因此当$q, m$充分大时, 则有$\sum \mathsf{P}(|S_n(1)| > \epsilon) < \infty$, 从而$S_n(1) \to 0$, a.s..

(ii) 现证$S_n(2) \to 0$, a.s.. 为此令

$$S_n'(2) = \frac{1}{nh^{l+1}}\sum_{i=1}^n Z_i^l(2), \qquad \xi_i = |\psi(\varepsilon_i)|I_{(|\psi(\varepsilon_i)| > i^\tau)},$$

从而$S_n(2) = S_n'(2) - \mathsf{E}S_n'(2)$. 利用(3.6)式的证明方法有

$$\begin{aligned} |\mathsf{E}S_n'(2)| &\le \frac{1}{nh^{l+1}}\sum_{i=1}^n \mathsf{E}\{|\psi(\varepsilon_i)(X_i - x_0)^l \alpha_i K_i| I_{(|\psi(\varepsilon_i)| > n^\tau)}\} \\ &\ll \frac{1}{nh}n^{\tau(1-r_1)}\sum_{i=1}^n \mathsf{E}\{|\psi(\varepsilon_i)|^{r_1} I_{(|\psi(\varepsilon_i)| > n^\tau)}|X_i = x_0\}\mathsf{E}(\alpha_i K_i) \\ &\ll n^{\tau(1-r_1)} \to 0, \qquad n \to \infty. \end{aligned} \tag{3.9}$$

又利用$\alpha(\cdot)$和$K(\cdot)$的有界性, 有

$$\begin{aligned} |S_n'(2)| &\le \frac{1}{nh^{l+1}}\sum_{i=1}^n |\psi(\varepsilon_i)(X_i - x_0)^l \alpha_i K_i| I_{(|\psi(\varepsilon_i)| > n^\tau)} \\ &\ll \frac{1}{nh}\sum_{i=1}^n |\psi(\varepsilon_i)| I_{(|\psi(\varepsilon_i)| > i^\tau)} \ll n^{-\lambda}\sum_{i=1}^n \xi_i. \end{aligned} \tag{3.10}$$

由Kronecker引理知, 要证明$n^{-\lambda}\sum\limits_{i=1}^{n}\xi_i\to 0$, a.s., 只需证明$\sum\limits_{i=1}^{\infty}i^{-\lambda}\xi_i<\infty$, a.s., 为此令$T_n=\sum\limits_{i=1}^{n}i^{-\lambda}\xi_i$. 下面用子序列法证明$\{T_n\}$ a.s.收敛.

对任意$m\ge n\ge 1$, 利用(3.6)的证明方法, 自然数列r阶和不等式以及(3.4)式, 则当$n\to\infty$时,

$$\mathsf{E}|T_m-T_n|=\sum_{i=n+1}^{m}i^{-\lambda}\mathsf{E}\xi_i\ll\sum_{i=n+1}^{m}i^{\tau(1-r_1)-\lambda}\ll\sum_{i=n+1}^{\infty}i^{-(1+2s)}\ll n^{-s}\to 0.$$

因此$\{T_n\}$是L_1中的Chauchy序列. 从而存在随机变量T, 使得$\mathsf{E}|T|<\infty$且$\mathsf{E}|T_n-T|\to 0$. 又对任意$\epsilon>0$,

$$\mathsf{P}(|T_{2^k}-T|>\epsilon)\ll\limsup_n\mathsf{E}|T_{2^k}-T_n|\ll\sum_{i=2^k+1}^{\infty}i^{-(1+2s)}\ll 2^{-ks},$$

所以

$$\sum_{k=1}^{\infty}\mathsf{P}(|T_{2^k}-T|>\epsilon)<\infty,$$

即有$T_{2^k}\to T$, a.s.. 又

$$\mathsf{P}\Big(\max_{2^{k-1}<n\le 2^k}|T_n-T_{2^{k-1}}|>\epsilon\Big)\ll\mathsf{P}(|T_{2^k}-T_{2^{k-1}}|>\epsilon)\ll\sum_{i=2^{k-1}+1}^{2^k}i^{-(1+2s)}\ll 2^{-ks},$$

所以

$$\sum_{k=1}^{\infty}\mathsf{P}\Big(\max_{2^{k-1}<n\le 2^k}|T_n-T_{2^{k-1}}|>\epsilon\Big)<\infty,$$

从而当$k\to\infty$时, $\max\limits_{2^{k-1}<n\le 2^k}|T_n-T_{2^{k-1}}|\to 0$, a.s., 因此$T_n$与$T_{2^k}$在a.s.收敛意义下有相同的极限, 即有$T_n\to T$, a.s., 从而由Kronecher引理知$n^{-\lambda}\sum\limits_{i=1}^{n}\xi_i\to 0$, a.s.. 又由(3.10)式得$S_n'(2)\to 0$, a.s., 再结合(3.9)式有$S_n(2)\to 0$, a.s.. 最后, 综合(i)(ii)知在定理2.2的条件下(3.1)式成立.

(2) 下面证明在满足定理2.1的条件下(3.1)式也成立. 对任意的$\epsilon>0$和$q>2$, 利用引理3.1, 定理2.1的条件以及(3.1)式的证明方法有

$$\begin{aligned}\mathsf{P}\Big(\frac{1}{nh^{l+1}}\sum_{i=1}^{n}Z_i^l>\epsilon\Big)&\ll n^{\sigma(m)-q}h^{-q(l+1)}\Big\{\sum_{i=1}^{n}\mathsf{E}|Z_i^l|^q+\Big(\sum_{i=1}^{n}\mathsf{E}|Z_i^l|^2\Big)^{q/2}\Big\}\\&\ll n^{\sigma(m)}\{(nh)^{1-q}+(nh)^{-q/2}\}\ll n^{\sigma(m)}\{n^{-\lambda(q-1)}+n^{-\lambda q/2}\},\end{aligned}$$

所以在上式中取q,m充分大, 则有

$$\sum_{i=1}^{\infty}\mathsf{P}\Big(\frac{1}{nh^{l+1}}\sum_{i=1}^{n}Z_i^l>\epsilon\Big)<\infty.$$

因此我们证明了在满足定理2.1的条件下(3.1)式也是成立的.

(3.2)式和(3.3)式的证明: 下面我们证明(3.2)式. 为此令

$$H_n(x_0)=\frac{1}{nh^{l+1}}\sum_{i=1}^{n}\psi'(\varepsilon_i)(X_i-x_0)^l\alpha_iK_i,$$

注意到

$$\begin{aligned}&|H_n(x_0)-\psi_\varepsilon(x_0)\alpha^{-l}(x_0)f_X(x_0)s_l|\\ \le\ &|H_n(x_0)-\mathsf{E}H_n(x_0)|+|\mathsf{E}H_n(x_0)-\psi_\varepsilon(x_0)\alpha^{-l}(x_0)f_X(x_0)s_l|:=J_{n1}+J_{n2}.\end{aligned}$$

又利用引理3.2易得

$$\begin{aligned}\mathsf{E}H_n(x_0)&=\frac{1}{nh^{l+1}}\sum_{i=1}^{n}\mathsf{E}\psi'(\varepsilon_i)(X_i-x_0)^l\alpha_iK_i\\&=\frac{1}{nh^{l+1}}\sum_{i=1}^{n}\mathsf{E}\{(X_i-x_0)^l\alpha_iK_i\mathsf{E}[\psi'(\varepsilon_i)|X_i]\}\\&=\frac{1}{nh^{l+1}}\sum_{i=1}^{n}\mathsf{E}[\psi'(\varepsilon_i)|X_i=x_0](1+o(1))\mathsf{E}\{(X_i-x_0)^l\alpha_iK_i\}\\&=\psi_\varepsilon(x_0)\alpha^{-l}(x_0)f_X(x_0)s_l(1+o(1))\to\psi_\varepsilon(x_0)\alpha^{-l}(x_0)f_X(x_0)s_l,n\to\infty.\end{aligned}$$

所以$J_{n2}\to 0$, a.s.. 而对于$J_{n1}\to 0$, a.s., 其证明方法与证明(3.1)式的方法类似, 这里不再重复. 再者, 利用引理3.2的第二个结论以及(3.2)式的证法可得到(3.3)式. □

下面给出定理的证明过程.

定理的证明: 由于定理2.1与定理2.2的证明方法没有本质的区别, 因此这里只给出定理2.1的证明, 而定理2.2的证明可通过类似的证法得到.

令$\widetilde{a}=a$, $\widetilde{b}=hb$, $r=(\widetilde{a},\widetilde{b})^T,r_0=(m(x_0),hm'(x_0))^T$. 并记

$$l_n(r)=\sum_{i=1}^{n}g(Y_i-a-b(X_i-x_0))\alpha_iK_i=\sum_{i=1}^{n}g\Big(Y_i-\widetilde{a}-\widetilde{b}\frac{X_i-x_0}{h}\Big)\alpha_iK_i.$$

令S_δ表示中心在点r_0半径为δ的圆. 记

$$r_i=(r-r_0)^T\Big(1,\frac{X_i-x_0}{h}\Big)^T,$$

则

$$Y_i-\widetilde{a}-\widetilde{b}\frac{X_i-x_0}{h}=\varepsilon_i+R(X_i)-r_i.$$

下面证明对任意充分小的$\delta>0$, 有

$$\mathsf{P}\Big\{\lim_{n\to\infty}\inf_{r\in S_\delta}l_n(r)>l_n(r_0)\Big\}=1. \tag{3.11}$$

事实上, 由于

$$\begin{aligned} l_n(r) - l_n(r_0) &= \sum_{i=1}^n \alpha_i K_i \int_{\varepsilon_i+R(X_i)}^{\varepsilon_i+R(X_i)-r_i} \psi(t)\mathrm{d}t \\ &= \sum_{i=1}^n \alpha_i K_i \int_{\varepsilon_i+R(X_i)}^{\varepsilon_i+R(X_i)-r_i} [\psi(\varepsilon_i) + \psi'(\varepsilon_i)(t-\varepsilon_i) \\ &\quad + (\psi(t) - \psi(\varepsilon_i) - \psi'(\varepsilon_i)(t-\varepsilon_i))]\mathrm{d}t \\ &:= K_{n1} + K_{n2} + K_{n3}. \end{aligned} \tag{3.12}$$

由引理3.3, 又由于$\| r - r_0 \| \le \delta$,

$$\begin{aligned} \frac{K_{n1}}{nh} &= -(r-r_0)^T \frac{1}{nh} \sum_{i=1}^n \alpha_i K_i \psi(\varepsilon_i) \Big(1, \frac{X_i - x_0}{h}\Big)^T \\ &= -(r-r_0)^T (o(1), o(1))^T \le \| r - r_0 \| \, o(1) \\ &= o(1)\delta, \qquad \text{a.s.}. \end{aligned}$$

利用积分中值定理, 有

$$\frac{K_{n3}}{nh} = -(r-r_0)^T \frac{1}{nh} \sum_{i=1}^n \alpha_i K_i [\psi(\varepsilon_i + z_i) - \psi(\varepsilon_i) - \psi'(\varepsilon_i) z_i] \Big(1, \frac{X_i - x_0}{h}\Big)^T,$$

其中z_i在$R(X_i)$和$R(X_i) - r_i$之间$(i = 1, 2, \dots, n)$. 注意到$|X_i - x_0| \le h/\alpha^*$和$R(X_i) = O(h^2)$, 有

$$\begin{aligned} \max_i |z_i| &\le \max_i \{|R(Xi)| + |r_i|\} \le \max_i |R(Xi)| + (1 + 1/\alpha^*)\delta \\ &= O(h^2) + (1 + 1/\alpha^*)\delta, \end{aligned}$$

从而由条件(A_8)和引理3.3的证明方法可得,

$$\frac{K_{n3}}{nh} = o(1)\delta^2, \qquad \text{a.s.}. \tag{3.13}$$

通过简单的积分运算有

$$\begin{aligned} \frac{K_{n2}}{nh} &= \frac{1}{2nh} \sum_{i=1}^n \alpha_i K_i \psi'(\varepsilon_i) [(R(X_i) - r_i)^2 - R^2(X_i)] \\ &= \frac{1}{2nh} \sum_{i=1}^n \alpha_i K_i \psi'(\varepsilon_i) [r_i^2 - 2R(X_i) r_i] \\ &= \frac{1}{2nh} \sum_{i=1}^n \alpha_i K_i \psi'(\varepsilon_i) \left\{ (r - r_0)^T \begin{pmatrix} 1 & \frac{X_i - x_0}{h} \\ \frac{X_i - x_0}{h} & \frac{(X_i - x_0)^2}{h^2} \end{pmatrix} (r - r_0) - 2R(X_i) r_i \right\} \\ &:= M_{n1} + M_{n2}. \end{aligned}$$

利用引理3.3得

$$\begin{aligned}
M_{n2} &= -(r-r_0)^T\frac{1}{nh}\sum_{i=1}^n\alpha_iK_i\psi'(\varepsilon_i)R(X_i)\Big(1,\frac{X_i-x_0}{h}\Big)^T\\
&= O(h^2)\delta, \qquad \text{a.s.},\\
M_{n1} &= \frac{1}{2}(r-r_0)^T\psi_\varepsilon(x_0)f_X(x_0)\begin{pmatrix} s_0 & \dfrac{s_1}{\alpha(x_0)}\\ \dfrac{s_1}{\alpha(x_0)} & \dfrac{s_2}{\alpha^2(x_0)}\end{pmatrix}(1+o(1))(r-r_0)\\
&:= \frac{1}{2}(r-r_0)^T\psi_\varepsilon(x_0)f_X(x_0)A(1+o(1))(r-r_0), \qquad \text{a.s.}.
\end{aligned}$$

从而

$$\frac{K_{n2}}{nh}=\frac{1}{2}(r-r_0)^T\psi_\varepsilon(x_0)f_X(x_0)A(1+o(1))(r-r_0)+O(h^2)\delta, \qquad \text{a.s.}.$$

令γ表示矩阵A的最小特征值, 则对充分小的$\delta>0$和任意$r\in S_\delta$有

$$\mathsf{P}\Big\{\lim_{n\to\infty}\inf_{r\in S_\delta}\frac{K_{n2}}{nh}>\frac{1}{2}\gamma\psi_\varepsilon(x_0)f_X(x_0)\delta^2\Big\}=1. \tag{3.14}$$

由上式与(3.12)-(3.14)式就可得到(3.11)式.

由(3.11)式知, $l_n(r)$在S_δ内部有一个局部极小值点, 而在该局部极小值点处方程组(1.1)一定成立. 令$(\widehat{m}_n(x_0),h\widehat{m}_n'(x_0))$是最靠近$r_0$的根, 则

$$\mathsf{P}\Big\{\lim_{n\to\infty}\{(\widehat{m}_n(x_0)-m(x_0))^2+h^2(\widehat{m}_n'(x_0)-m'(x_0))^2\}\le\delta^2\Big\}=1.$$

因此定理2.1得证. $\square$

参 考 文 献

[1] Wand, M.P. and Jones, M.C., *Kernel Smoothing*, Chapman and Hall, 1995.

[2] Fan, J.Q. and Gijbels, I., *Local Polynomial Modelling and Its Applications*, Chapman and Hall, 1996.

[3] Tsybakov, A.B., Robust reconstruction of functions by the local-approximation method, *Problems of Information Transmission*, **22**(1986), 133–146.

[4] Fan, J.Q., Hu, T.C. and Truong, Y.K., Robust non-parametric function estimation, *Scand. J. Statist.*, **21**(1994), 433–446.

[5] Welsh, A.H., Robust estimation of smooth regression and spread functions and their derivatives, *Statistica Sinica*, **6**(1996), 347–366.

[6] Fan, J.Q. and Jiang, J.C., Variable bandwidth and one-step local M-estimator, *Sci. China Ser. A*, **43**(2000), 65–81.

[7] Jiang, J.C. and Mack, Y.P., Robust local polynomial regression for dependent data, *Statistica Sinica*, **11**(2001), 705–722.

[8] Cai, Z.W. and Ould-Said, E., Local M-estimator for nonparametric time series, *Sta. Probab. Lett.*, **65**(2003), 433–449.

[9] Chen, J., Zhang, L.X. and Li, D.G., Spatial local M-estimation under association, *Metrika*, **67**(2008), 11–29.

[10] 杨善朝, 混合序列矩不等式和非参数估计, 数学学报, **40(2)**(1997), 271–279.

[11] Fan, J.Q. and Gijbels, I., Variable bandwidth and local linear regression smoothers, *Ann. Statist.*, **20**(1992), 2008–2036.

Strong Consistency of Local M-estimator with Variable Bandwidth under ρ Mixing Processes

Luo Zhongde

(*Department of Mathematics and Computer Information, Baise University, Baise, 533000*)

Yang Shanchao

(*School of Mathematics Science, Guangxi Normal University, Guilin, 541004*)

When we are using the local M-estimator with variable bandwidth to estimate, the collected data are not independent samples sometimes, but may be some mixing samples. Therefore, this paper discusses the strong consistency of M-estimator with variable bandwidth when the observational data are ρ-mixing processes, and gives two theorems with some weaker assumptions.

Keywords: ρ mixing processes, variable bandwidth, local M-estimator, strong consistency.

AMS Subject Classification: 62G20.