应用概率统计　第二十八卷
第一期　2012年2月

Chinese Journal of Applied Probability
and Statistics Vol.28 No.1 Feb. 2012

总收益互换定价 *

叶中行[1,2]　　庄瑞鑫[2,3]

([1]上海对外贸易学院商务信息学院, 上海, 201620; [2]上海交通大学数学系, 上海, 200240)

([3]中国外汇交易中心, 上海, 201203)

摘　要

本文讨论了信用衍生产品之一的总收益互换的定价问题. 其中涉及到利率风险和违约风险, 本文利用HJM利率模型来刻画利率风险, 并利用强度模型和混合模型对违约风险进行建模. 分别考虑了违约时间与利率无关时总收益互换合约的定价问题, 以及违约时间与利率相关时总收益互换合约的定价问题, 给出了相应的定价模型, 并用蒙特卡罗模拟方法得到定价问题的数值解.

关键词: 总收益互换, 利率模型, 强度模型, 混合模型, 违约风险, 蒙特卡罗模拟.

学科分类号: O211.63, F830.9.

§1. 引　　言

总收益互换是一种信用衍生产品, 对它的定价问题的研究还较少见. 总收益互换指信用保障的买方在协议期间将参照资产的总收益转移给信用保障的卖方, 总收益可以包括本金、利息、预付费用以及因资产价格的有利变化带来的资本利得; 作为交换, 保障卖方则承诺向对方交付协议资产增殖的特定比例, 通常是LIBOR加一个差额, 以及因资产价格不利变化带来的资本亏损. 在金融市场中, 总收益互换交易主要发生在银行和对冲基金之间. 由于对冲基金所披露的资产负债表信息较少, 市场会认为它具有高风险, 所以对冲基金的融资成本是很高的. 但是总收益互换给了对冲基金以较低成本变相持有某种金融资产的机会, 而且这种持有方式是以表外工具的形式存在的. 而银行的主要目的是在转移风险的同时获取较高的收益. 交易中产生的现金流可见下图:

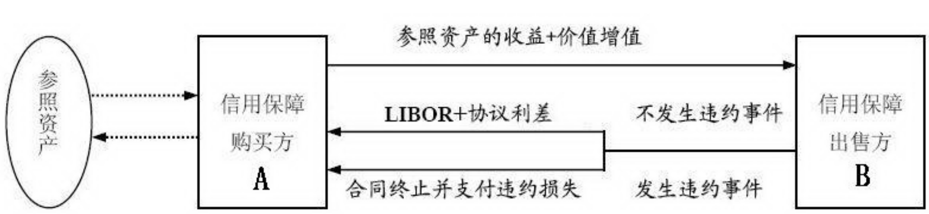

图1　总收益互换现金流图

*国家重点基础研究发展计划(973项目2007CB814903)、国家自然科学基金(11171215)和上海市高校085工程资助.
本文2010年7月8日收到.

图中的Libor是伦敦同业拆借利率, 是指伦敦的第一流银行之间短期资金借贷的利率, 是国际金融市场中大多数浮动利率的基础利率. 最常用的是3个月和6个月的Libor利率. 由于总收益互换涉及到利率风险和违约风险, 要对总收益互换定价就要对这两种风险都进行建模. 本文所采用的利率模型为Heath-Jarrow-Morton (HJM)模型[1]. 这里之所以采用HJM模型是因为该模型在每一时刻都会给出市场中的远期利率曲线, 不仅仅是单一的无风险利率, 故而对于市场利率的刻画更加准确.

§2. HJM利率模型

Heath-Jarrow-Morton在1992年提出了一个能对远期利率曲线进行建模的模型, 即HJM模型[1]. 该模型中的远期利率$f(t,T)$是在t时刻时所锁定的在T时刻借款所须付出的即时利率. 当t固定时, 那么$f:T\longmapsto f(t,T)$对应了一条远期曲线.

假设$f(0,T)$, $0\le T\le \overline{T}$在零时刻就已知, 称为初始时刻远期利率曲线. 在HJM模型中, 有

$$\mathrm{d}f(t,T)=\alpha(t,T)\mathrm{d}t+\sigma(t,T)\mathrm{d}W(t),\qquad 0\le t\le T, \tag{2.1}$$

其中$\{W(t)\}$是现实概率测度下的标准布朗运动, $\alpha(t,T)$是漂移项, $\sigma(t,T)$是波动项. 记

$$\sigma^*(t,T)=\int_t^T\sigma(t,v)\mathrm{d}v,$$

$R(t)=f(t,t)$, $D(t)=e^{-\int_0^t R(u)\mathrm{d}u}$是贴现过程.

Shreve (2004)证明了在风险中性鞅测度下, HJM模型满足以下方程:

$$\mathrm{d}f(t,T)=\sigma(t,T)\sigma^*(t,T)\mathrm{d}t+\sigma(t,T)\mathrm{d}\widetilde{W}(t), \tag{2.2}$$

其中$\{\widetilde{W}(t)\}$是风险中性概率测度下的标准布朗运动. 记$B(t,T)$是到期日为T、到期支付为1的零息债券在t时刻的价格, 在风险中性概率测度下它满足以下方程:

$$\mathrm{d}B(t,T)=R(t)B(t,T)\mathrm{d}t-\sigma^*(t,T)B(t,T)\mathrm{d}\widetilde{W}(t). \tag{2.3}$$

Shreve同时给出了Libor利率的模型, 记$L(t,T)$为t时刻锁定的, 在未来时间段T到$T+\delta$上进行投资所获得的收益率, 那么

$$L(t,T)=\frac{B(t,T)-B(t,T+\delta)}{\delta B(t,T+\delta)}. \tag{2.4}$$

当$0\le t<T$时, 称$L(t,T)$为远期libor利率. 当$t=T$时, 称之为即期Libor利率. δ称为Libor的期限, 一般情况下取值为0.25年或0.5年.

§3. 总收益互换的定价

假设市场无套利是证券定价的基本原则, 即存在等价鞅测度Q (又称为风险中性测度), 使得任意证券关于无风险利率的贴现价格过程均为Q鞅. 等价鞅测度是一个与真实测度P等价的概率测度, 这两个测度有着相同的概率为0的事件. 在Harrison and Kreps (1979)和Harrison and Pliska (1981)中指出等价鞅测度的存在意味着无套利, 在某些技术性条件下, 等价鞅测度和无套利是等价的. Delbaen and Schachermeyer (1998)给出了此等价性成立的弱技术条件.

考虑概率空间$(\Omega,\mathcal{F},(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0},\mathsf{P})$上的随机的经济体系, 其中$\sigma$域流$(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$代表随时间演变的信息流, 满足通常条件, P为真实概率测度. 由无套利准则, 图一中A方和B方所支付的现金流的贴现在风险中性鞅测度下的期望要相等. 从而有

$$\widetilde{\mathsf{E}}(D(t_i)\mathrm{CF}_{\mathrm{A}}(t_i)|\mathcal{F}_0)=\widetilde{\mathsf{E}}(D(t_i)\mathrm{CF}_{\mathrm{B}}(t_i)|\mathcal{F}_0), \tag{3.1}$$

其中, $\widetilde{\mathsf{E}}$表示风险中性测度下的期望, $D(t_i)$是HJM模型中贴现因子, CF是cash flow现金流的缩写. 假设图1中标的资产的违约时刻为τ, 信用保险的购买方为A, 信用保险的出售方为B, 那么A方要向B方支付的是债券的利息加上价值增值部分(若增值为负数, 则减去), 而B方要向A方支付的是Libor加协议利差. 不妨假设参考资产即债券在t_0时刻的价值是X_0, 面值为F, 付息周期为半年, 并且假设该债券与总收益互换有相同的到期日T. 记债券的付息日为$[0=t_0,t_1=t_0+0.5,t_2,\ldots,t_{n-1},t_n=T]$, 那么A方在$t_i$时刻支付的现金流为

$$\mathrm{CF}_{\mathrm{A}}(t_i)=\begin{cases}C_i\times\mathbf{1}_{(\tau>t_i)} & i<n;\\ \{C_n+(F-X_0)\}\times\mathbf{1}_{(\tau>t_n)} & i=n,\end{cases} \tag{3.2}$$

其中, C_i是债券在t_i时刻将要支付的利息, 是在零时刻已知的, $\mathbf{1}_{(\tau>t_i)}$是关于违约时间的示性函数. 再考虑B所支付的现金流, B方在t_i时刻的支付为

$$\mathrm{CF}_{\mathrm{B}}(t_i)=(L(t_{i-1},t_{i-1})+\mathrm{spread})\times\delta\times\mathrm{NV}\times\mathbf{1}_{(\tau>t_i)},\qquad i=1,\ldots,n, \tag{3.3}$$

其中的NV (Nominal Value)是由总收益互换合约所规定名义本金, δ是Libor利率的期限, 这里取值为0.5, $L(t_{i-1},t_{i-1})$是t_i时刻的Libor利率值, Spread是由总收益互换合约所规定的一个常值, 所谓对总收益互换定价, 就是要求解Spread的值. 若假定标的资产的违约损失率为100%, 也就是说一旦发生违约, 总收益互换中信用保险的出售方要向信用保险的购买方支付债券面值F, 故B方在违约时刻时刻τ的支付为

$$\mathrm{CF}_{\mathrm{B}}(\tau)=F\times\mathbf{1}_{(\tau\leq t_n)}. \tag{3.4}$$

再将上述式子代回(3.1)式可以得到spread的定价公式为

$$\begin{aligned}\text{spread} &= \frac{\widetilde{\mathsf{E}}\Big(\sum\limits_{i=1}^{n} D(t_i)C_i \times \mathbf{1}_{(\tau>t_i)}|\mathcal{F}_0\Big) + \widetilde{\mathsf{E}}(D(t_n)(F-X_0)\times \mathbf{1}_{(\tau>t_n)}|\mathcal{F}_0)}{\widetilde{\mathsf{E}}\Big(\sum\limits_{i=1}^{n} D(t_i)\times \mathbf{1}_{(\tau>t_i)}|\mathcal{F}_0\Big)\times\delta\times \mathrm{NV}} \\ &\quad - \frac{\widetilde{\mathsf{E}}\Big(\sum\limits_{i=1}^{n} D(t_i)L(t_{i-1},t_{i-1})\times \mathbf{1}_{(\tau>t_i)}\times\delta\times\mathrm{NV}|\mathcal{F}_0\Big)+\widetilde{\mathsf{E}}(D(\tau)\times F\times \mathbf{1}_{(\tau\le t_n)}|\mathcal{F}_0)}{\widetilde{\mathsf{E}}\Big(\sum\limits_{i=1}^{n} D(t_i)\times \mathbf{1}_{(\tau>t_i)}|\mathcal{F}_0\Big)\times\delta\times \mathrm{NV}}.\end{aligned} \tag{3.5}$$

定价公式(3.5)中显著依赖债券违约时间τ, 这需要对违约时间进行建模. 在这里, 由于引入了违约时间τ, 信息流$\mathcal{F}$和风险中性期望$\widetilde{\mathsf{E}}$都已不同于HJM模型中的定义. 不妨将HJM模型中的利率过程所对应的测度空间记为$(\Omega_1,\mathcal{F}_1,\mu_1)$, 而违约时间$\tau$对应的测度空间记为$(\Omega_2,\mathcal{F}_2,\mu_2)$. 下面考虑如何给出两者的联合概率测度空间.

§4. 违约过程与利率过程相互独立时的spread定价

由于违约时间与利率过程相互独立, 可以将两者的联合概率测度空间直接定义为乘积测度空间, 即新的风险中性测度空间定义为

$$(\Omega,\mathcal{F},\mu)=(\Omega_1\times\Omega_2,\mathcal{F}_1\times\mathcal{F}_2,\mu_1\times\mu_2). \tag{4.1}$$

对于违约时间的建模, 此处参考了可违约债券定价的强度模型, 详见文献[6]. 出于简化模型的考虑, 不妨假设违约时间是具有常强度λ时齐泊松过程N的首跳时间. 违约概率为$F(t):=\mu_2[\tau\le t]=1-e^{-\lambda t}$, 那么由测度论中的Fubini定理就有

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathsf{E}}\Big(\sum_{i=1}^{n} D(t_i)C_i\times \mathbf{1}_{(\tau>t_i)}|\mathcal{F}_0\Big) &= \sum_{i=1}^{n} C_i\widetilde{\mathsf{E}}(D(t_i)\times \mathbf{1}_{(\tau>t_i)}|\mathcal{F}_0) \\ &= \sum_{i=1}^{n} C_i\int_{\Omega_1\times\Omega_2} D(t_i)\times \mathbf{1}_{(\tau>t_i)}\mathrm{d}(\mu_1\times\mu_2) \\ &= \sum_{i=1}^{n} C_i\int_{\Omega_2}\int_{\Omega_1} D(t_i)\times \mathbf{1}_{(\tau>t_i)}\mu_1(\mathrm{d}\omega_1)\mu_2(\mathrm{d}\omega_2) \\ &= \sum_{i=1}^{n} C_i\int_{\Omega_2}\mathbf{1}_{(\tau>t_i)}\int_{\Omega_1} D(t_i)\mu_1(\mathrm{d}\omega_1)\mu_2(\mathrm{d}\omega_2) \\ &= \sum_{i=1}^{n} C_i e^{-\lambda t_i}B(0,t_i).\end{aligned}$$

通过类似的计算, 有

$$\widetilde{\mathsf{E}}(D(t_n)(F-X_0)\times \mathbf{1}_{(\tau>t_n)}|\mathcal{F}_0)=(F-X_0)e^{-\lambda t_n}\times B(0,t_n),$$
$$\widetilde{\mathsf{E}}\Big(\sum_{i=1}^n D(t_i)L(t_{i-1},t_{i-1})\times \mathbf{1}_{(\tau>t_i)}\times\delta\times \mathrm{NV}|\mathcal{F}_0\Big)=\sum_{i=1}^n e^{-\lambda t_i}B(0,t_i)L(0,t_{i-1})\times\delta\times\mathrm{NV},$$
$$\widetilde{\mathsf{E}}(D(\tau)\times F\times \mathbf{1}_{(\tau\le t_n)}|\mathcal{F}_0)=F\times\int_0^{t_n}B(0,u)\lambda e^{-\lambda u}\mathrm{d}u,$$
$$\widetilde{\mathsf{E}}\Big(\sum_{i=1}^n D(t_i)\times \mathbf{1}_{(\tau>t_i)}|\mathcal{F}_0\Big)\times\delta\times\mathrm{NV}=\sum_{i=1}^n e^{-\lambda t_i}B(0,t_i)\times\delta\times\mathrm{NV}.$$

将上述五式代回到spread定价公式(3.5), 得

$$\begin{aligned}\mathrm{spread} &= \frac{\sum\limits_{i=1}^n C_i e^{-\lambda t_i}B(0,t_i)+(F-X_0)e^{-\lambda t_n}B(0,t_n)}{\sum\limits_{i=1}^n e^{-\lambda t_i}B(0,t_i)\times\delta\times\mathrm{NV}}\\ &\quad -\frac{\sum\limits_{i=1}^n e^{-\lambda t_i}B(0,t_i)L(0,t_{i-1})\times\delta\times\mathrm{NV}+F\times\displaystyle\int_0^{t_n}B(0,u)\lambda e^{-\lambda u}\mathrm{d}u}{\sum\limits_{i=1}^n e^{-\lambda t_i}B(0,t_i)\times\delta\times\mathrm{NV}}. \end{aligned}\tag{4.2}$$

这样就得到了违约时间与利率过程相互独立时的spread定价.

§5. 违约过程与利率过程相关时的spread定价

当违约事件的发生与利率相关时, 就不能像上一章中那样直接使用乘积空间来定义新的测度空间, 进而求解. 所以在这里, 我们考虑利用Das和Sundaram混合模型[7]对违约时间和利率过程进行建模, 最后用蒙特卡洛模拟的方法来得到spread的定价. 将spread定价公式(3.5)中的分子记为$\widetilde{\mathsf{E}}(U|\mathcal{F}_0)$, 分母记为$\widetilde{\mathsf{E}}(V|\mathcal{F}_0)$. 那么,

$$\mathrm{spread}=\frac{\widetilde{\mathsf{E}}(U|\mathcal{F}_0)}{\widetilde{\mathsf{E}}(V|\mathcal{F}_0)}.\tag{5.1}$$

Das和Sundaram[7]在2007年构造了一个用于CDS定价的混合模型, 华尔街称他们的模型为两维半模型. 该模型认为公司违约强度依赖与以下几个方面: 公司资本结构, 公司股票价值, 市场利率, 合同所进行到的时间点. 也就是

$$\xi(t)=h(y)\exp[a_0+a_1r(t)-a_2\ln S(t)+a_3(t-t_0)],\tag{5.2}$$

其中, a_i, $i=1,2,3$是常数, 可以通过市场数据估计. $r(t)$是利率, $S(t)$是公司股票价值, t_0是模型的初始时刻. 模型中的$h(y)$是公司资本结构的函数, 而公司在Δt时间段上的违约概率定义为$\lambda(t)=1-\exp[-\xi(t)\Delta t]$.

基于上述违约强度模型, Das和Sundaram又分别对$S(t)$、$r(t)$进行建模, 使之成为一套完备的定价体系. 此处假设模型定义在时间段$[0,T]$上, 并将这段时间细分成许多个长度为h的小间断, 市场利率r满足CIR模型(HJM模型的一种特殊情况), 即

$$r_{t+h}=r_t+a(b-r_t)h+\sigma_f\sqrt{r_t}\times X_f(t)\sqrt{h}. \tag{5.3}$$

而公司股票价格s满足以下差分方程:

$$S_{t+h}=S_t\times\exp(\sigma_s X_s(t)\sqrt{h}), \tag{5.4}$$

其中, 哑变量$(X_f(t),X_s(t))$的联合分布由表一给出:

表1 概率分布图

$X_f(t)$	$X_s(t)$	Probability
1	1	$(1/4)\cdot(1+m_1(t))[1-\lambda(t)]$
1	-1	$(1/4)\cdot(1-m_1(t))[1-\lambda(t)]$
-1	1	$(1/4)\cdot(1+m_2(t))[1-\lambda(t)]$
-1	-1	$(1/4)\cdot(1-m_2(t))[1-\lambda(t)]$
1	$-\infty$	$\lambda(t)/2$
-1	$-\infty$	$\lambda(t)/2$

$$m_1(t)=\frac{\dfrac{4e^{r(t)h}/(1-\lambda(t))-2(\exp(\sigma_s\sqrt{h})+\exp(-\sigma_s\sqrt{h}))}{\exp(\sigma_s\sqrt{h})-\exp(-\sigma_s\sqrt{h})}+\dfrac{2\rho}{1-\lambda(t)}}{2},$$

$$m_2(t)=\frac{\dfrac{4e^{r(t)h}/(1-\lambda(t))-2(\exp(\sigma_s\sqrt{h})+\exp(-\sigma_s\sqrt{h}))}{\exp(\sigma_s\sqrt{h})-\exp(-\sigma_s\sqrt{h})}-\dfrac{2\rho}{1-\lambda(t)}}{2},$$

其中ρ是利率与股票价格的相关系数. 当模型中的参数给定时, 知道t时刻的市场利率r_t和股票价格S_t就可以计算出$X_f(t)$和$X_s(t)$的概率分布. 若$X_s(t)=-\infty$则发生违约, 模拟终止; 否则可以模拟出下一时刻, 市场利率r_{t+h}和股票价格S_{t+h}的走势. 由此递推关系, 我们可以得到0到T时间段上的一组利率过程和股票价格过程, 并计算出与这一组过程所对应的U的值和V的值. 由蒙特卡罗方法进行多次模拟后取平均值就可以得到$\widetilde{\mathsf{E}}(U|\mathcal{F}_0)$和$\widetilde{\mathsf{E}}(V|\mathcal{F}_0)$的值. 再由公式(5.1) spread $=\widetilde{\mathsf{E}}(U|\mathcal{F}_0)/\widetilde{\mathsf{E}}(V|\mathcal{F}_0)$求出spread的定价.

以下用蒙特卡罗模拟的方法求解总收益互换的定价, 首先要给出模型的具体参数, 如何从市场数据中用统计方法得到参数估计可参见[7]. 此处假设, 总收益互换的期限T为两年, 时间间隔$h=0.0001$, 总收益互换合约的标的物为某一企业债券, 现价X_0为100元, 面值F为100元, 债券两年后到期, 每半年偿付一次利息, 每次付息3元. 给定利率模型(5.3)中

的参数, 使得$a=2$, $b=0.04$, $r_0=0.03$, $\sigma_f=0.05$. 给定股票价格模型(5.4)中的参数, 使得$S(0)=10$, $\sigma_s=0.2$. 将利率与股票收益率的相关系数ρ设为0.3, 而(5.2)式中的参数设置为$h(y)=1$, $a_0=-1$, $a_1=3$, $a_2=0.5$, $a_3=0.01$, 即

$$\xi(t)=\exp[-1+3r(t)-0.5\ln S(t)+0.01(t-t_0)]. \tag{5.5}$$

整个模型系数确定之后, 就可以进行数值模拟了. 下面给出$r(t), S(t), \lambda(t)$的一组走势图.

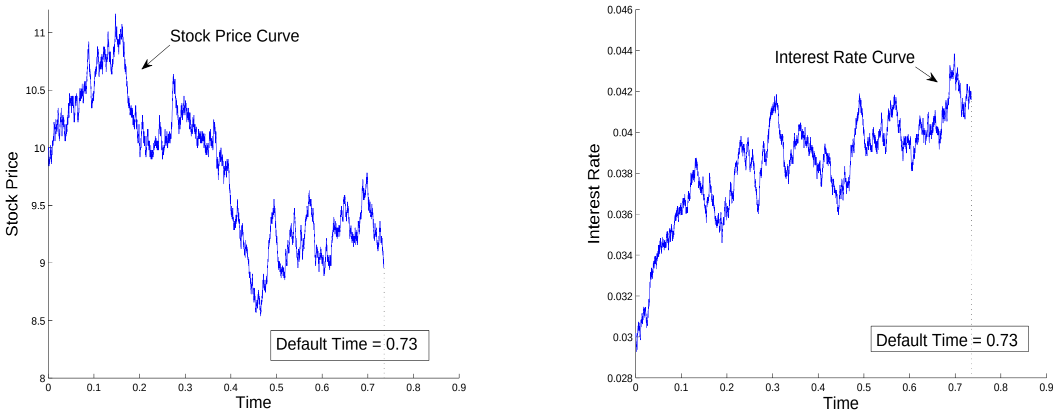

图2　利率及股价走势图

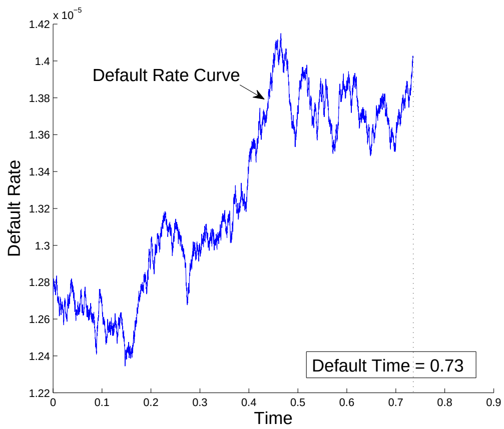

图3　违约概率走势图

上图中, 违约时刻$\tau=0.73$. 当违约事件发生时(τ时刻), 模拟过程终止, 参照(4.2)式可以计算出对应于这组随机过程$r(t), S(t)$的U、V值, 此处, $U=-95.7550$, $V=49.0758$. 将每一次模拟得到的U, V的值进行累加, 经过100000次的模拟, 可以得到

$$\widetilde{\mathsf{E}}(U|\mathcal{F}_0)\approx\frac{\sum\limits_{i=1}^{100000}U_i}{100000}=-16.1062,\qquad \widetilde{\mathsf{E}}(V|\mathcal{F}_0)\approx\frac{\sum\limits_{i=1}^{100000}V_i}{100000}=165.4704.$$

根据(5.1)式, 可知

$$\text{spread} = \frac{\widetilde{\mathsf{E}}(U|\mathcal{F}_0)}{\widetilde{\mathsf{E}}(V|\mathcal{F}_0)} \approx -0.0998.$$

在100000次模拟中, 违约发生的次数为21190次, 故标的债券两年内违约的概率概率约为

$$\frac{21190}{100000} = 0.2119 = 21.19\%.$$

参 考 文 献

[1] Heath, D., Jarrow, R. and Morton, A., Bond pricing and the term structure of interest rates: A new methodology for contingent claims valuation, *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, **60(1)**(1992), 77–105.

[2] Shreve, S.E., *Stochastic Calculus for Finance: Continuous-Time Models*, Springer Verlag, 2004.

[3] Harrison, J.M. and Kreps, D.M., Martingales and arbitrage in multiperiod securities markets, *Journal of Economic Theory*, **20(3)**(1979), 381–408.

[4] Harrison, J.M. and Pliska, S.R., Martingales and stochastic integrals in the theory of continuous trading, *Stoch. Proc. Appl.*, **11(3)**(1981), 215–260.

[5] Delbaen, F. and Schachermayer, W., The fundamental theorem of asset pricing for unbounded stochastic processes, *Mathematische Annalen*, **312(2)**(1998), 215–250.

[6] 叶中行, 白云芬, 约化模型下的公司债券定价, 山西大学学报(自然科学版), **31**(2008), 393–398.

[7] Das, S. and Sundaram, R., An integrated model for hybrid securities, *Management Science*, **53(9)**(2007), 1439–1451.

Pricing of Total Return Swap

YE ZHONGXING[1,2] ZHUANG RUIXIN[2,3]

([1]*School of Business Information Management, Shanghai Institute of Foreign Trade, Shanghai, 201620*)

([2]*Department of Mathematics, Shanghai Jiao Tong University, Shanghai, 200240*)

([3]*China Foreign Exchange Trade System, Shanghai, 201203*)

This paper discusses the pricing of total return swap which is one of the credit derivatives. As the total return swap contracts are exposed to both interest rate risk and default risk, this paper characterizes the interest rate risk through HJM model. Intensity model and hybrid model are used to characterize the default risk and to derive the corresponding pricing formula for two cases when the default time and interest rate are independent or correlated, respectively. Monte Carlo simulation method is used here to derive the numerical solution of the pricing problem.

Keywords: Total return swap, HJM model, intensity model; hybrid model, default risk, Monte Carlo simulation.

AMS Subject Classification: 60H10, 62P20, 91B28.