应用概率统计 第二十八卷
第四期 2012年8月

Chinese Journal of Applied Probability
and Statistics Vol.28 No.4 Aug. 2012

# 广义负相依一般风险模型中有限时破产概率的估计及数值模拟 *

杨 洋[1,2] 林金官[2]

([1]南京审计学院数学与统计学院, 南京, 210029; [2]东南大学数学系, 南京, 210096)

**摘 要**

本文研究了一类带利率的重尾相依风险模型, 其中索赔额是一列上广义负相依随机变量, 索赔到达过程是一般的非负整值过程, 并且独立于索赔额序列, 保费收入过程是一个一般的非负非降随机过程. 我们考虑了两种情况, 其一是索赔额、索赔到达过程及保费收入过程相互独立, 其二是累积折现保费收入总量的尾概率可以被索赔额的尾概率高阶控制, 得到了保险公司有限时破产概率的渐近估计, 并且给出了相应的数值模拟, 验证了理论结果的合理性.

**关键词**: 有限时破产概率, 广义负相依结构, 重尾分布, 数值模拟.

**学科分类号**: O211.4.



## §1. 引 言

本文研究了一个带常利率的相依一般风险模型, 其要求索赔额$\{X_n, n\geq 1\}$构成一列同分布(未必相互独立)的随机变量, 具有共同的分布函数$F(x)=\overline{F}(x)=\mathsf{P}(X_1>x)>0$, 对所有的$x>0$; 索赔到达过程$\{N(t), t\geq 0\}$是一个与$\{X_n, n\geq 1\}$相互独立的一般非负计数过程, 满足对任意的$t\geq 0$, $0<\lambda(t)=\mathsf{E}N(t)<\infty$. 记连续的索赔到达时刻为$\{\tau_n, n\geq 1\}$, 时刻$t\geq 0$之前的所有累积保费收入是一个非负非降的随机过程$\{C(t), t\geq 0\}$, 满足$C(0)=0$, 对所有的$t>0$, $C(t)<\infty$几乎处处成立. 假设$r$表示常值利息率, 即经过时间$t$以后, 1元钱将会增长为$e^{rt}$元. 在该风险模型中, 定义到$t$时刻保险公司的累积折现净损失为

$$L(t)=\sum_{n=1}^{N(t)}X_n e^{-r\tau_n}-\int_0^t e^{-rs}C(\mathrm{d}s).$$

假设$x\geq 0$表示公司的初始风险储备, 由于破产总发生在索赔到达时刻, 则对于任意固定的$T\geq 0$, 保险公司在$T$时刻之前破产的有限时破产概率可以定义为

$$\Psi(x,T)=\mathsf{P}\Big(\sup_{t\in[0,T]}L(t)>x\Big). \tag{1.1}$$

*国家自然科学基金(11001052, 11171065)、中国博士后科学基金(20100471365)、江苏省自然科学基金(BK2010480, BK2011058)和江苏省青蓝工程资助.

本文2011年12月12日收到, 2012年2月1日收到修改稿.

在上述风险模型中, 如果索赔额$\{X_n, n \geq 1\}$是独立的随机变量, 则该模型被称为独立一般风险模型, 其是由文献[1]引入的. 进一步的, 如果索赔到达过程$N(t)$是更新计数过程, 并且保费收入过程是线性的, 即$C(t) = ct$, 其中常数$c$表示固定的保费收入率, 则上述风险模型简化为所谓的经典更新风险模型.

早期众多的文献对经典的带利率更新风险模型中破产概率的渐近性进行了深入的研究, 并且得到了许多有用的结论, 参见文献[1–4]. 值得注意的是, 文献[3]研究了在以下两种情形下, 独立更新风险模型中无限时破产概率的渐近性, 第一种情况要求假设$\{X_n, n \geq 1\}$, $\{N(t), t \geq 0\}$和$\{C(t), t \geq 0\}$相互独立; 第二种情况考虑的是累积折现保费收入总量

$$\widetilde{C} = \int_0^\infty e^{-rs} C(\mathrm{d}s) < \infty \qquad \text{a.s.}$$

满足

$$\mathsf{P}(\widetilde{C} > x) = o(\overline{F}(x)), \qquad x \to \infty. \tag{1.2}$$

然而, 在保险公司的实际保险业务中, 由于各种因素, 索赔额变量往往具有某种相依性. 故为了符合实际情况, 近年来, 文献[5]在索赔额随机变量是负相协(negative association)长尾分布(long-tailed distribution)和控制变换尾分布(dominatedly-varying-tailed distribution)交集的情形下, 得到了带利率一般风险模型中有限时破产概率的渐近性. 受文献[3]和[5]的启发, 本文考虑了更为一般的相依结构(广义负相依)风险模型, 分别得到了上述两种情况(即, 第一种是索赔额、索赔到达过程及保费收入过程相互独立; 第二种是累积折现保费收入总量的尾概率可以被索赔额的尾概率高阶控制)下, 有限时破产概率的渐近估计, 并进行了相应的统计模拟, 验证了理论结果的合理性.

若无特殊说明, 本文中所有的极限关系均指$x \to \infty$, $K$在不同的地方可以表示不同的常数. 对两个正函数$f(x)$和$g(x)$, 记$f(x) \sim g(x)$, 若$\lim f(x)/g(x) = 1$; 记$f(x) \lesssim g(x)$或者$g(x) \gtrsim f(x)$, 若$\limsup f(x)/g(x) \leq 1$; 记$f(x) = o(g(x))$, 若$\lim f(x)/g(x) = 0$. 对任意的集合$A$, 定义$\mathbf{1}_A$表示示性函数.

我们将把索赔额分布$F$限制在重尾分布族下研究. 一个重要的重尾分布族是控制变换尾分布族. 称$\mathbb{R}$上的分布$V$是控制变换尾的, 记为$V \in \mathcal{D}$, 若对任意的$y > 0$,

$$\limsup \frac{\overline{V}(xy)}{\overline{V}(x)} < \infty, \qquad \text{其中 } \overline{V}(x) = 1 - V(x).$$

一个略小的重尾分布族是$\mathcal{C}$族. 称$\mathbb{R}$上的分布$V$是一致变换尾的, 记为$V \in \mathcal{C}$, 若

$$\lim_{y \searrow 1} \liminf_{x \to \infty} \frac{\overline{V}(xy)}{\overline{V}(x)} = 1.$$

与这两个重尾族联系密切的一个更大的重尾族是$\mathcal{L}$族. 称$\mathbb{R}$上的分布$V$是长尾的, 记为$V \in \mathcal{L}$, 若对任意的$y > 0$,

$$\lim \frac{\overline{V}(x+y)}{\overline{V}(x)} = 1.$$

上述重尾分布族的包含关系为

$$\mathcal{C} \subset \mathcal{L} \cap \mathcal{D} \subset \mathcal{L}.$$

进一步的, 对任意$\mathbb{R}$上的分布$V$, 定义其上Matuszewska指标(upper Matuszewska index)为

$$J_V^+ = -\lim_{y\to\infty} \frac{\log \overline{V}_*(y)}{\log y}, \qquad \text{其中 } \overline{V}_*(y) := \liminf_{x\to\infty} \frac{\overline{V}(xy)}{\overline{V}(x)} \text{ 对任意的 } y > 1.$$

易见, $V \in \mathcal{D}$, 当且仅当, $J_V^+ < \infty$ (参见文献[6]的2.1节). 由文[6]的命题2.2.1和文[7]的引理3.5知, 如果$V \in \mathcal{D}$, 则对任意的$p > J_V^+$, 存在正常数$K$和$D$, 使得对所有的$x \geq y \geq D$有

$$\frac{\overline{V}(y)}{\overline{V}(x)} \leq K\Big(\frac{y}{x}\Big)^{-p}, \tag{1.3}$$

并且

$$x^{-p} = o(\overline{V}(x)). \tag{1.4}$$

本文的剩余部分, 组织如下. 第二节我们将介绍一些常用的相依结构, 并给出本文的主要结果以及相关的数值模拟. 在第三节中我们将给出了一些引理及主要结果的证明.

## §2.　主要结果及数值模拟

本节我们首先介绍常用的一些相依结构. 称随机变量$\xi_1, \ldots, \xi_n$是下广义负相依(lower extended negatively dependent, LEND)的, 若存在某个$M > 0$, 使得对所有的$x_i$, $i = 1, \ldots, n$, 有

$$\mathsf{P}\Big(\bigcap_{i=1}^n \{\xi_i \leq x_i\}\Big) \leq M \prod_{i=1}^n \mathsf{P}(\xi_i \leq x_i). \tag{2.1}$$

称随机变量$\xi_1, \ldots, \xi_n$是上广义负相依(upper extended negatively dependent, UEND)的, 若存在某个$M > 0$, 使得对所有的$x_i$, $i = 1, \ldots, n$, 有

$$\mathsf{P}\Big(\bigcap_{i=1}^n \{\xi_i > x_i\}\Big) \leq M \prod_{i=1}^n \mathsf{P}(\xi_i > x_i). \tag{2.2}$$

称随机变量$\xi_1, \ldots, \xi_n$是广义负相依(extended negatively dependent, END)的, 若(2.1)和(2.2)均成立. 称一列r.v.s $\{\xi_i, i \geq 1\}$是LEND/UEND/END的, 若对每个$n$, 存在与$n$无关的一致的$M$, 使得$\xi_1, \ldots, \xi_n$是LEND/UEND/END的. END的概念是有文献[8]提出的, 在此基础上, 文献[9]更深入的研究了LEND和UEND随机变量当$M = 1$时, (2.1)和(2.2)分别描述了下负相依(lower negative dependence)和上负相依(upper negative dependence), 这些负相依结构是由文献[10, 11]引入的, 并且在实际中一直被众多的学者研究和使用, 因为其包含了常用的由文献[12, 13]提出的负相协(negative association)结构. 值得注意的是, 广义负相依结构不仅包含了对应的负相依结构, 也包含了部分正相依结构, 例如$n$维Farlie-Gumbel-Morgenstern分布等, 参见文献[8]和[9].

下面的定理是本文的主要结果, 其得到了广义负相依风险模型中有限时破产概率的渐近性, 情况(i)推广了文献[5]的定理2.2.

**定理 2.1** 在上述相依一般风险模型中, 假设索赔额$\{X_n, n\geq 1\}$是一列非负UEND随机变量, 具有共同的分布$F$和有限的均值$\mu$. 若对任意满足$\lambda(T)-\lambda(0)>0$的$T>0$, 存在某个$p>J_F^+$使得$\mathsf{E}(N(T))^p<\infty$.

(i) 假设保费收入过程$\{C(t), t\geq 0\}$独立于$\{X_n, n\geq 1\}$, $\{N(t), t\geq 0\}$. 若$F\in\mathcal{L}\cap\mathcal{D}$, 则有

$$\Psi(x,T)\sim\int_x^T\overline{F}(xe^{rt})\lambda(\mathrm{d}t); \tag{2.3}$$

(ii) 假设累积折现保费收入总量$\widetilde{C}$满足(1.2)式. 若$F\in\mathcal{C}$, 则有(2.3)式成立.

本节的最后, 我们将给出定理2.1的数值模拟, 以检验定理2.1中理论结果的合理性, 我们的工作主要是估计(2.3)式中得到的有限时破产概率.

假定索赔额$\{X_n, n\geq 1\}$是同分布的Pareto随机变量

$$\overline{F}(x;\kappa,\beta)=\Big(\frac{\kappa}{\kappa+x}\Big)^{\beta},\qquad x\geq 0, \tag{2.4}$$

其中, $\kappa=2$, $\beta=3$. 可以验证$F\in\mathcal{C}\subset\mathcal{L}\cap\mathcal{D}$. 假设$\{(X_{2n-1}, X_{2n}), n\geq 1\}$是$(X_1, X_2)$的独立复制, 并且

$$F_{X_1,X_2}(x,y)=((F(x))^{-\theta}+(F(y))^{-\theta}-1)^{-1/\theta}, \tag{2.5}$$

其中, $\theta=1$, 则$(X_1, X_2)$的联合分布函数$F_{X_1,X_2}(x,y)$是由Clayton Copula构成的. 由文[14]的注3.1和文[8]的例4.2知, $X_1$和$X_2$是END的, 再由$\{(X_{2n-1}, X_{2n}),\ n\geq 1\}$的独立性知, 索赔额序列$\{X_n, n\geq 1\}$也是END的.

假设索赔到达过程$N(t)$是参数为$\lambda=0.2$的齐次Poisson过程. 易见, $N(t)$满足条件$\mathsf{E}(N(T))^p<\infty$, $p>J_F^+$. 假设保费收入过程是线性的, 即$C(t)=ct$, 这里保费收入率$c=10$, 利率$r=0.1$.

选取时间长度$T=100$, 保险公司的初始风险储备分别为$x=500$, $10^3$, $2\times10^3$和$5\times10^3$. 我们将验证(2.3)式的精确性, 关于定理2.1中有限时破产概率$\Psi(x,T)$的模拟计算步骤如下:

第一步, 设定初始风险储备$x$的值和变量$l=0$为初始值;

第二步, 将时间长度$[0,T]$等分成$m=1000$份, 记每个时间点为$t_i$, $i=1,\ldots,m$;

第三步, 对每个$t_i$, 由Poisson分布$P(\lambda t_i)$生成随机数$n_i$, 记$n_i$表示索赔额的样本容量;

第四步, 由均匀分布$U(0,t_i)$生成索赔到达时刻序列$\{\tau_n^i, n=1,\ldots,n_i\}$, 以及由(2.4)和(2.5)式产生索赔额序列$\{X_n^i, n=1,\ldots,n_i\}$.

第五步, 对每个$t_i$, 由下式计算序列$\{D_i, i=1,\ldots,m\}$:

$$D_i=\sum_{k=1}^{n_i}X_k^ie^{-r\tau_k^i}-\int_0^{t_i}e^{-rs}C(\mathrm{d}s),\qquad i=1,\ldots,m,$$

其中, $r$和$C(t)$由上定义, 指定其中的参数;

第六步, 选取$\{D_i, i=1,\ldots,m\}$的最大值, 记为$D^*$. 比较$D^*$和$x$的大小. 如果$D^*>x$, 则$l$的值增加1;

第七步, 重复第二步至第六步$N=10^{12}$次;

第八步, 计算有限时破产概率的矩估计值$l/N$;

第九步, 重复第一步至第八步10次, 将10次估计值的中位数作为有限时破产概率的模拟值.

对不同的$x$的值, 将有限时破产概率的模拟值和理论值列于表1中(括号中的值表示误差相对于理论值的百分比). 由表1可以看出, 随着风险储备$x$的增大, 模拟值和理论值的差在减小. 因此, 定理2.1中的渐近关系是合理的.

表1　定理2.1中模拟值与理论值的比较

| $x(\times 10^3)$ | Theoretical result | Analog value |
|---|---|---|
| 0.5 | 4.5129e-8 | 4.1e-8(9.1%) |
| 1 | 5.6695e-9 | 5.2e-9(8.3%) |
| 2 | 7.1047e-10 | 7.5e-10(5.6%) |
| 5 | 4.5539e-11 | 4.3e-11(5.5%) |

## §3.　一些引理及主要结果的证明

在证明本文的主要结果之前, 我们首先给出一个关于UEND/LEND/END随机变量的重要引理. 下面的引理在定理2.1的证明中起到重要作用.

**引理 3.1**　设$\{\xi_n, n\geq 1\}$是一列UEND的同分布随机变量, 具有共同的分布$V$和$\mu_V^+=\mathsf{E}\xi_1\mathbf{1}_{\{\xi_1\geq 0\}}<\infty$. 则对任意的$v>0$, $x>0$及$n\geq 1$, 存在某个正常数$C$使得

$$\mathsf{P}\Big(\sum_{k=1}^{n}\xi_k>x\Big)\leq n\overline{V}(vx)+Cn^{1/v}x^{-1/v}. \tag{3.1}$$

**证明:**　为简便起见, 记$S_n^{\xi}=\sum\limits_{k=1}^{n}\xi_k$, $n\geq 1$. 若对每个$n\geq 1$, $\xi_n$几乎处处非正, 则(3.1)式显然成立. 下面我们均假设$\mu_V^+>0$. 对任意固定的$\nu>0$及正整数$n$, 定义$\widetilde{\xi}_n=\min(\xi_n, vx)$, $\widetilde{\xi}_n^+=\max(\widetilde{\xi}_n, 0)$. 由文[9]的引理2.2 (b)知, 随机变量列$\{\widetilde{\xi}_n, n\geq 1\}$和$\{\widetilde{\xi}_n^+, n\geq 1\}$仍然分别是UEND的. 记$\widetilde{S}_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\widetilde{\xi}_k$, $n\geq 1$. 易见,

$$\begin{aligned}\mathsf{P}(S_n^{\xi}>x) &= \mathsf{P}\Big(S_n^{\xi}>x, \max_{1\leq k\leq n}\xi_k>vx\Big)+\mathsf{P}\Big(S_n^{\xi}>x, \max_{1\leq k\leq n}\xi_k\leq vx\Big)\\ &\leq n\overline{V}(vx)+\mathsf{P}(\widetilde{S}_n^{\xi}>x). \end{aligned}\tag{3.2}$$

对任意的正数$h$, 再次使用文[9]的引理2.2 (b)知, $\{e^{h\widetilde{\xi}_n^+}, n\geq 1\}$是UEND的非负随机变量. 因此, 使用等式

$$\mathsf{E}e^{h\widetilde{\xi}_1^+} = \int_0^{vx}(e^{hu}-1)V(\mathrm{d}u)+(e^{hvx}-1)\overline{V}(vx)+1,$$

由Markov不等式, 文[9]的引理2.2 (a)及基本不等式$1+u\leq e^u$, 并注意到$(e^{hu}-1)/u$关于变量$u$严格单调递增, 我们有

$$\begin{aligned}\mathsf{P}(\widetilde{S}_n^{\xi}>x) &\leq e^{-hx}\Big(\int_0^{vx}(e^{hu}-1)V(\mathrm{d}u)+(e^{hvx}-1)\overline{V}(vx)+1\Big)^n\\ &\leq \exp\Big\{n\int_0^{vx}(e^{hu}-1)V(\mathrm{d}u)+n(e^{hvx}-1)\overline{V}(vx)-hx\Big\}\\ &\leq \exp\Big\{n\frac{e^{hvx}-1}{vx}\mu_V^+-hx\Big\}. \end{aligned}\tag{3.3}$$

在(3.3)式中, 选取$h=v^{-1}x^{-1}\log(1+x(\mu_V^+n)^{-1})>0$有

$$\mathsf{P}(\widetilde{S}_n^{\xi}>x)\leq \exp\Big\{\frac{1}{v}\log\frac{e\mu_V^+n}{x}\Big\},$$

结合(3.2)式可得(3.1)式成立. □

**引理 3.2** 在上述相依一般风险模型中, 假设索赔额$\{X_n, n\geq 1\}$是一列非负两两(pairwise) UEND随机变量, 具有共同的分布$F\in\mathcal{L}\cap\mathcal{D}$. $Z$是任意非负随机变量, 并且假设$\{X_n, n\geq 1\}$, $\{N(t), t\geq 0\}$和$Z$是相互独立的. 则对任意的$T>0$及正整数$n_0$有

$$\sum_{n=1}^{n_0}\mathsf{P}\Big(\sum_{k=1}^{n}X_ke^{-r\tau_k}>x+Z, N(T)=n\Big)\sim\sum_{n=1}^{n_0}\sum_{k=1}^{n}\mathsf{P}(X_ke^{-r\tau_k}>x, N(T)=n).$$

**证明:** 类似于文[5]引理3.5的证明, 可得本引理成立, 略去其详细证明. □

下面我们不加证明地引入一个引理, 其是由文[1]的引理3.5给出的.

**引理 3.3** 在上述一般风险模型中(允许任意相依性), 则有

$$\sum_{k=1}^{\infty}\mathsf{P}(X_ke^{-r\tau_k}\mathbf{1}_{\{\tau_k\leq T\}}>x)=\int_0^T\overline{F}(xe^{rt})\lambda(\mathrm{d}t).$$

最后, 我们证明我们的主要结果定理2.1.

**定理2.1的证明:** 易见, 由$F\in\mathcal{D}$及$\mu<\infty$知, $J_F^+\geq 1$. 注意到, 存在某个$p>J_F^+$, 使得$\mathsf{E}(N(T))^p<\infty$, 故对任意的$\epsilon>0$, 存在某个正整数$n_1=n_1(T,\epsilon)$使得

$$\mathsf{E}(N(T))^p\mathbf{1}_{\{N(T)>n_1\}}\leq\epsilon.\tag{3.4}$$

首先估计破产概率$\Psi(x,T)$的上界, 我们注意到上界的证明对定理的两种情况(i)和(ii)均成立. 将其分为两个部分

$$\begin{aligned} \Psi(x,T) &\leq \mathsf{P}\Big(\sum_{k=1}^{N(T)} X_k e^{-r\tau_k} > x\Big) \\ &= \Big(\sum_{n=1}^{n_1} + \sum_{n=n_1}^{\infty}\Big)\mathsf{P}\Big(\sum_{k=1}^{n} X_k e^{-r\tau_k} > x, N(T)=n\Big) \\ &=: I_1 + I_2. \end{aligned} \tag{3.5}$$

由引理3.2 ($Z\equiv 0$)和引理3.3知, 对充分大的$x$, 我们有

$$\begin{aligned} I_1 &\leq (1+\epsilon)\sum_{n=1}^{n_1}\sum_{k=1}^{n}\mathsf{P}(X_k e^{-r\tau_k} > x, N(T)=n) \\ &\leq (1+\epsilon)\sum_{k=1}^{\infty}\mathsf{P}(X_k e^{-r\tau_k} > x, N(T)\geq k) \\ &= (1+\epsilon)\int_0^T \overline{F}(xe^{rt})\lambda(\mathrm{d}t). \end{aligned} \tag{3.6}$$

另一方面, 由引理3.1, $F\in\mathcal{D}$, (1.4), (3.4)和$p > J_F^+ \geq 1$知, 存在某个正常数$K$, 使得对充分大的$x$有

$$\begin{aligned} I_2 &\leq \sum_{n=n_1}^{\infty}\mathsf{P}\Big(\sum_{k=1}^{n} X_k > x\Big)\mathsf{P}(N(T)=n) \\ &\leq \overline{F}(p^{-1}x)\sum_{n=n_1}^{\infty} n\mathsf{P}(N(T)=n) + Kx^{-p}\sum_{n=n_1}^{\infty} n^p\mathsf{P}(N(T)=n) \\ &\leq K\overline{F}(x)(\mathsf{E}N(T)\mathbf{1}_{\{N(T)>n_1\}} + \mathsf{E}(N(T))^p\mathbf{1}_{\{N(T)>n_1\}}) \\ &\leq K\epsilon\overline{F}(x). \end{aligned} \tag{3.7}$$

由(1.3)知, 对上述的$p > J_F^+$, 存在某个正常数$K$使得对充分大的$x$有

$$\begin{aligned} \int_0^T \overline{F}(xe^{rt})\lambda(\mathrm{d}t) &\geq K^{-1}\overline{F}(x)\int_0^T e^{-prt}\lambda(\mathrm{d}t) \\ &\geq K^{-1}e^{-prT}(\lambda(T)-\lambda(0))\overline{F}(x), \end{aligned} \tag{3.8}$$

结合(3.7)式及$\lambda(T)-\lambda(0)>0$, 我们有

$$I_2 \leq K\epsilon\int_0^T \overline{F}(xe^{rt})\lambda(\mathrm{d}t). \tag{3.9}$$

综合(3.5), (3.6)和(3.9)式, 可得(2.3)式的上界.

最后, 我们分别在两种情况下估计破产概率$\Psi(x,T)$的下界. 在情况(i)下, 由引理3.2和

引理3.3, 我们有, 对上述给定的$\epsilon > 0$及充分大的$x$

$$\begin{aligned}
\Psi(x,T) &\geq \mathsf{P}\Big(\sum_{k=1}^{N(T)} X_k e^{-r\tau_k} > x + \int_0^T e^{-rs}C(\mathrm{d}s)\Big) \\
&\geq (1-\epsilon)\sum_{n=1}^{n_1}\sum_{k=1}^{n} \mathsf{P}(X_k e^{-r\tau_k} > x, N(T)=n) \\
&= (1-\epsilon)\Big(\sum_{k=1}^{\infty} \mathsf{P}(X_k e^{-r\tau_k} > x, \tau_k \leq T) \\
&\quad - \sum_{n=1}^{n_1}\sum_{k=1}^{n} \mathsf{P}(X_k e^{-r\tau_k} > x, N(T)=n)\Big) \\
&=: (1-\epsilon)\Big(\int_0^T \overline{F}(xe^{rt})\lambda(\mathrm{d}t) - I_3\Big). \qquad (3.10)
\end{aligned}$$

类似于$I_2$的估计, 我们有对充分大的$x$

$$I_3 \leq \overline{F}(x)\mathsf{E}N(T)\mathbf{1}_{\{N(T)>n_1\}} \leq K\epsilon\int_0^T \overline{F}(xe^{rt})\lambda(\mathrm{d}t). \qquad (3.11)$$

由(3.10)和(3.11)式可得(2.3)式的下界.

在情况(ii)下, 我们有对任意的$0 < v < 1$及充分大的$x$

$$\begin{aligned}
\Psi(x,T) &\geq \mathsf{P}\Big(\sum_{k=1}^{N(T)} X_k e^{-r\tau_k} > x + \widetilde{C}\Big) \\
&\geq \mathsf{P}\Big(\sum_{k=1}^{N(T)} X_k e^{-r\tau_k} > x + \widetilde{C}, \widetilde{C} \leq vx\Big) \\
&\geq \mathsf{P}\Big(\sum_{k=1}^{N(T)} X_k e^{-r\tau_k} > (1+v)x, \widetilde{C} \leq vx\Big) \\
&\geq \mathsf{P}\Big(\sum_{k=1}^{N(T)} X_k e^{-r\tau_k} > (1+v)x\Big) - \mathsf{P}(\widetilde{C} > vx) \\
&=: I_4 - I_5. \qquad (3.12)
\end{aligned}$$

类似于(3.10)和(3.11)式的分析, 以及$F \in \mathcal{C}$, 我们有对上述给定的$\epsilon > 0$及充分大的$x$

$$\begin{aligned}
I_4 &\geq (1-\epsilon)\sum_{n=1}^{n_1}\sum_{k=1}^{n} \mathsf{P}(X_k e^{-r\tau_k} > (1+v)x, N(T)=n) \\
&\geq (1-\epsilon)^2 \int_0^T \overline{F}((1+v)xe^{rt})\lambda(\mathrm{d}t) \\
&\geq (1-\epsilon)^2 \inf_{t\in[0,T]} \frac{\overline{F}((1+v)xe^{rt})}{\overline{F}(xe^{rt})} \int_0^T \overline{F}(xe^{rt})\lambda(\mathrm{d}t) \\
&\sim (1-\epsilon)^2 \int_0^T \overline{F}(xe^{rt})\lambda(\mathrm{d}t), \qquad (3.13)
\end{aligned}$$

先令$x\to\infty$, 再令$v\downarrow 0$. 由(1.2), $F\in\mathcal{C}\subset\mathcal{D}$及(3.8)知

$$I_5=o(\overline{F}(vx))=o(\overline{F}(x))=o\Big(\int_0^T\overline{F}(xe^{rt})\lambda(\mathrm{d}t)\Big). \tag{3.14}$$

故由关系式(3.12)–(3.14)可得(2.3)式的下界. $\square$

## 参 考 文 献

[1] Wang, D., Finite-time ruin probability with heavy-tailed claims and constant interest rate, *Stochastic Models*, **24**(2008), 41–57.

[2] Konstantinides, D., Tang, Q. and Tsitsiashvili, G., Estimates for the ruin probability in the classical risk model with constant interest force in the presence of heavy tails, *Insurance: Mathematics and Economics*, **31**(2002), 447–460.

[3] Tang, Q., The finite time ruin probability of the compound Poisson model with constant interest force, *Journal of Applied Probability*, **42**(2005), 608–619.

[4] Tang, Q., Heavy tails of discounted aggregate claims in the continuous-time renewal model, *Journal of Applied Probability*, **44**(2007), 285–294.

[5] Yang, Y. and Wang, Y., Asymptotics for ruin probability of some negatively dependent risk models with a constant interest rate and dominatedly-varying-tailed claim, *Statistics & Probability Letters*, **80**(2010), 143–154.

[6] Bingham, N.H., Goldie, C.M. and Teugels, J.L., *Regular Variation*, Cambridge University Press, Cambridge, 1987.

[7] Tang, Q. and Tsitsiashvili, G., Precise estimates for the ruin probability in finite horizon in a discrete-time model with heavy-tailed insurance and financial risks, *Stochastic Processes and their Applications*, **108**(2003), 299–325.

[8] Liu, L., Precise large deviations for dependent random variables with heavy tails, *Statistics & Probability Letters*, **79**(2009), 1290–1298.

[9] Chen, Y., Chen, A. and Ng, K.W., The Strong law of large numbers for extended negatively dependent random variables, *Journal of Applied Probability*, **47**(2010), 908–922.

[10] Ebrahimi, N. and Ghosh, M., Multivariate negative dependence, *Communications in Statistics – Theory and Methods*, **10**(1981), 307–337.

[11] Block, H.W., Savits, T.H. and Shaked, M., Some concepts of negative dependence, *The Annals of Probability*, **10**(1982), 765–772.

[12] Alam, K. and Saxena, K.M.L., Positive dependence in multivariate distributions, *Communications in Statistics – Theory and Methods*, **10**(1981), 1183–1196.

[13] Joag-Dev, K. and Proschan, F., Negative association of random variables with application, *The Annals of Statistics*, **11**(1983), 286–295.

[14] Ko, B. and Tang, Q., Sums of dependent nonnegative random variables with subexponential tails, *Journal of Applied Probability*, **45**(2008), 85–94.

# Estimates and Numerical Simulations for the Finite-Time Ruin Probability in the Extended Negatively Dependent General Risk Model

Yang Yang[1,2] Lin Jinguan[2]

([1] *School of Mathematics and Statistics, Nanjing Audit University, Nanjing, 210029*)

([2] *Department of Mathematics, Southeast University, Nanjing, 210096*)

This paper investigates a dependent heavy-tailed risk model with constant interest rate, where the claim sizes are a sequence of upper extended negatively dependent random variables; the claim arrival process is a general nonnegative integer-valued counting process, which is independent of the claim sizes; and the premium process is a general nonnegative and nondecreasing stochastic process. We obtain an asymptotic result on the finite-time ruin probability of an insurance company in two cases, where, one is the claim sizes, the claim arrival process and the premium process are mutually independent; the other is the tail probability of the total discounted amount of premiums can be highly dominated by that of the claim size. Besides, we conduct some numerical simulations to verify the accuracy of the asymptotic relation in the obtained result.

**Keywords:** Finite-time ruin probability, extended negative dependence, heavy-tailed distribution, numerical simulation.

**AMS Subject Classification:** 62P05, 62E20, 60F10.