应用概率统计　第二十八卷
第五期　2012年10月

Chinese Journal of Applied Probability
and Statistics Vol.28 No.5 Oct. 2012

《应用概率统计》版权所用

负债情形下效用投资组合选择的最优控制 *

常　浩

(天津工业大学数学系, 天津, 300387;　天津大学管理学院, 天津, 300072)

荣喜民

(天津大学理学院, 天津, 300072)

摘　要

应用随机最优控制理论研究负债情形下基于效用最大化的动态投资组合. 假设负债是服从几何布朗运动的随机过程且与股票价格完全相关, 应用动态规划原理得到值函数满足的HJB方程, 并对幂效用、指数效用和对数效用函数下的最优投资策略进行系统研究. 文章首先通过变量替换方法求解相应的HJB方程得到幂效用和指数效用函数下最优投资策略的显示表达式, 然后通过Legendre变换–对偶方法得到对数效用函数下最优投资策略的显示表达式. 最后给出算例解释本文所得结论, 并分析市场参数对最优投资组合的影响.

关键词:　负债过程, 动态投资组合, 动态规划原理, Legendre变换, 幂效用, 指数效用, 对数效用.

学科分类号:　F830.48, O211.6.

§1. 引　　言

资产–负债管理问题是以研究负债情形下组合证券投资问题的最优投资策略和风险控制为目标, 以实现资产的最优配置和套期保值为目的的一种现代金融管理方法. 目前, 已经受到理论界和许多金融机构的重视, 国内许多金融机构已将它视为提高企业核心竞争力的象征. 1990年, Sharpe和Tint (1990)首先建立了负债情形下投资组合选择问题的均值–方差模型, 为从投资组合选择的角度研究资产–负债管理问题奠定了理论基础. 从那以后, 资产–负债管理在理论与应用上取得了一些研究成果[2–6]. Leippold, Trojani和Vanini (2004)对多周期环境下的资产–负债管理问题进行了研究, 并提供了一种几何方法; Chiu和Li (2006)考虑了多种风险资产情形下当负债与股票价格都服从几何布朗运动时资产–负债管理的风险控制问题; Xie和Li等人(2008)建立了负债与股票价格服从不同的布朗运动情形下的均值–方差模型, 得到了最优投资策略和有效前沿的显示表达式, 并分析了负债对最优投资策略和有效前沿的影响; 金秀和黄小原(2005)将资产–负债管理理论应用到辽宁省养老基金管理的实际问题中, 解决了辽宁省养老基金管理的最佳资产配置问题; 吉小东和汪寿阳

*教育部人文社会科学研究青年基金(11YJC790006)、天津市高等学校科技发展基金(20100821)和天津市自然科学基金(09JCYBJC01800)资助.

本文2011年2月18日收到, 2011年5月5日收到修改稿.

《应用概率统计》版权所用

(2005)探讨了养老金的资产–负债管理问题, 为解决我国养老保险体制面临的困境及拓宽养老金融资渠道提出了若干政策建议. 上述模型或者从均值–方差意义下讨论资产负债管理问题[1–4], 或者将资产–负债管理理论方法应用到实际问题中[5, 6]. 效用最大模型与均值–方差模型是解决投资组合选择问题的两种常用工具, 都可以度量投资者对风险的偏好程度, 且效用最大意义下的最优投资策略一般不是均值方差意义下的最优投资策略(二次效用函数除外). 因此解决效用最大意义下的资产–负债管理问题就很有意义, 一方面可丰富和发展负债情形下的投资组合选择理论方法, 寻找该模型下的最优投资策略, 为负债情形下的科学投资决策与规避风险提供理论依据; 另一方面, 可丰富和发展资产–负债管理的理论方法, 对存有负债的金融机构实行动态的最优化管理, 实现资产套期保值与风险控制提供理论依据.

本文在Xie和Li等人(2008)工作的基础上进一步研究了效用最大意义下带有负债过程的投资组合选择问题, 并假设负债服从几何布朗运动, 且与股票价格完全相关. 文章应用动态规划原理[9]得到值函数满足的HJB方程, 对于幂效用和指数效用函数, 可以通过变量替换方法拟合值函数的表达式得到最优投资组合的显示表达式, 而对于对数效用函数, 需要应用Legendre变换–对偶理论[7, 8]得到对偶方程, 通过求解对偶方程得到了最优投资组合的显示表达式. 算例解释了本文所得结论, 并分析了市场参数对最优投资组合的影响.

§2. 问题框架

文中$(\cdot)'$表示矩阵或向量的转置, $\|x\| = \sqrt{x'x} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$表示向量$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)'$的范数, $\mathsf{E}(\cdot)$表示随机变量的数学期望, $[0, T]$是固定的有限投资周期. 假设$(W_t^1, W_t^2, \ldots, W_t^n)'$是定义在完备概率空间$(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P}, \{\mathcal{F}_t\}_{0\le t\le T})$上相互独立的$n$维适应标准布朗运动, 其中$\{\mathcal{F}_t\}_{0\le t\le T}$是由$(W_t^1, W_t^2, \ldots, W_t^n)'$所产生的信息流. $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$是均方可积的随机变量构成的Hilbert空间.

假设在$[0, T]$内金融市场中有$n+1$中可连续交易的资产, 其中一种资产是无风险资产, 可视为债券, 其t时刻的价格记为P_t^0, 则P_t^0满足下列微分方程:

$$\mathrm{d}P_t^0 = P_t^0 r_t \mathrm{d}t, \qquad P_0^0 = p_0 > 0, \tag{2.1}$$

其中$r_t > 0$是t时刻债券的无风险利率. 其它n种资产是风险资产, 可视为股票, t时刻第i种股票价格记为P_t^i, $i = 1, 2, \ldots, n$, 则P_t^i满足下列随机微分方程:

$$\mathrm{d}P_t^i = P_t^i\Big[b_t^i \mathrm{d}t + \sum_{j=1}^{n} \sigma_t^{ij} \mathrm{d}W_t^j\Big], \qquad P_0^i = p_i > 0, \tag{2.2}$$

其中$b_t = (b_t^1, b_t^2, \ldots, b_t^n)'$和$\sigma_t = (\sigma_{ij})_{n\times n}$分别表示股票的收益率向量和波动率矩阵. 此外, 假设矩阵$\sigma_t = (\sigma_{ij})_{n\times n}$满足非退化条件: $\sigma_t\sigma_t' > 0$, $\forall\, t \in [0, T]$, 且r_t, b_t, σ_t在$[0, T]$是Borel-可测的有界确定函数.

《应用概率统计》版权所用

假设投资者在时刻$t=0$有初始财富$w>0$与初始负债$l\,(l\in R)$, 那么投资者在时刻$t=0$有净初始财富$x_0=w-l>0$. 记L_t为时刻t投资者的累积负债, 假设L_t满足几何布朗运动

$$\mathrm{d}L_t=L_t[u_t\mathrm{d}t+v_t\mathrm{d}\overline{W}_t],$$

其中$\overline{W}_t$是定义在完备概率空间$(\Omega,\mathcal{F},\mathsf{P},\{\mathcal{F}_t\}_{0\leq t\leq T})$上的一维标准布朗运动, 且$u_t,v_t$是时间$t$的有界确定函数. 假定$\overline{W}_t$与$W_t^j$存在相关关系, 其相关系数记为$\rho_t^j$, $j=1,2,\ldots,n$, 记$\rho_t=(\rho_t^1,\rho_t^2,\ldots,\rho_t^n)'$, $W_t=(W_t^1,W_t^2,\ldots,W_t^n)'$且满足$\rho_t'\rho_t=1$, 则$L_t$满足下列随机微分方程:

$$\mathrm{d}L_t=L_t[u_t\mathrm{d}t+v_t\rho_t'\mathrm{d}W_t],\qquad L_0=l_0>0. \tag{2.3}$$

假设t时刻投资者投资于第i种股票的资金数额记为π_t^i, $i=1,2,\ldots,n$, $t\in[0,T]$, 记$\pi_t=(\pi_t^1,\pi_t^2,\ldots,\pi_t^n)'$, X_t表示t时刻投资者的净财富, 则t时刻投资于债券的资金数额为$\pi_t^0=X_t-\sum\limits_{i=1}^n\pi_t^i$. 假设不考虑卖空限制和借贷利率限制的情形, 也不考虑交易成本和消费的情形, 则在交易策略π_t下财富过程X_t满足下列随机微分方程:

$$\mathrm{d}X_t=\Big(X_t-\sum_{i=1}^n\pi_t^i\Big)\frac{\mathrm{d}P_t^0}{P_t^0}+\sum_{i=1}^n\pi_t^i\frac{\mathrm{d}P_t^i}{P_t^i}-\frac{\mathrm{d}L_t}{L_t}.$$

即

$$\mathrm{d}X_t=[r_tX_t+B_t'\pi_t-u_t]\mathrm{d}t+(\pi_t'\sigma_t-v_t\rho_t')\mathrm{d}W_t,\qquad X_0=x_0>0, \tag{2.4}$$

其中$B_t=(b_t^1-r_t,b_t^2-r_t,\ldots,b_t^n-r_t)'$.

市场的风险价格θ_t可定义为

$$\theta_t=\sigma_t^{-1}B_t.$$

所有可行投资组合策略π_t所形成的集合记为$\Gamma=\{\pi_t:\ 0\leq t\leq T\}$. 假设投资者总是希望最大化其终端财富的期望效用, 即求解下列优化问题:

$$\max_{\pi_t\in\Gamma}\mathsf{E}(U(X_T)), \tag{2.5}$$

其中效用函数$U(\cdot)$是定义在$(-\infty,+\infty)$上的严格凹的连续可微函数, 由凹函数的性质可知存在唯一的最优投资策略$\pi_t=(\pi_t^1,\pi_t^2,\ldots,\pi_t^n)'$使得投资者的终端财富的期望效用最大.

由于不同的投资人对风险的承受能力和偏好程度不同, 因此满足不同的效用函数. 本文系统的考察如下三类效用函数: 第一类是常系数相对风险厌恶效用函数, 即幂效用函数, 其函数表达式为$U(x)=x^\beta/\beta$, $\beta<1$, $\beta\neq0$; 第二类是常系数绝对风险厌恶效用函数, 即指数效用函数, 其函数表达式为$U(x)=-e^{-\beta x}$, $\beta>0$; 第三类是对数效用函数, 其函数表达式为$U(x)=\ln x$.

注记 1 本文的主要创新点有: (i)本文研究的是基于效用最大化的最优投资策略问题, 并假设负债服从几何布朗运动且与股票价格完全相关, 而Xie和Li等人(2008)研究的是均值–方差问题; (ii)本文应用动态规划、HJB方程和Legendre变换–对偶解法相结合的方法, 而Xie和Li等人(2008)应用的是随机线性二次控制方法.

§3. 最优投资组合

根据动态规划原理[9], 值函数$H(t,x)$可定义为

$$H(t,x)=\sup_{\{\pi_t\in\Gamma\}}\mathsf{E}(U(X_T)|X_t=x),$$

且$H(t,x)$可以看作下列HJB方程的解:

$$H_t+\sup_{\pi_t}\Big\{(r_tx+B_t'\pi_t-u_t)H_x+\frac{1}{2}(\pi_t'\sigma_t-v_t\rho_t')^2H_{xx}\Big\}=0.$$

边界条件为$H(T,x)=U(x)$, 其中H_t,H_x,H_{xx}分别表示$H(t,x)$对t的一阶偏导数、对x的一阶偏导数与对x的二阶偏导数.

上述HJB方程的最优解为

$$\pi_t^*=(\sigma_t\sigma_t')^{-1}\Big(-\frac{H_x}{H_{xx}}B_t+\sigma_t\rho_tv_t\Big).\tag{3.1}$$

代入上述HJB方程和财富方程可得

$$H_t+(r_tx-u_t+\theta_t'\rho_tv_t)H_x-\frac{1}{2}\|\theta_t\|^2\frac{H_x^2}{H_{xx}}=0,\tag{3.2}$$

$$\mathrm{d}X_t^*=\Big(r_tX_t-u_t-\|\theta_t\|^2\frac{H_x}{H_{xx}}+\theta_t'\rho_tv_t\Big)\mathrm{d}t-\theta_t'\frac{H_x}{H_{xx}}\mathrm{d}W_t.\tag{3.3}$$

3.1 幂效用函数

幂效用函数下, 可假设HJB方程(3.2)具有如下形式的解:

$$H(t,x)=\frac{(x-g(t))^\beta}{\beta}f(t),\tag{3.4}$$

其中边界条件为$g(T)=0$, $f(T)=1$.

求得各阶偏导数如下:

$$H_t=\frac{(x-g(t))^\beta}{\beta}\dot f(t)-(x-g(t))^{\beta-1}\dot g(t)f(t),$$
$$H_x=(x-g(t))^{\beta-1}f(t),\qquad H_{xx}=(\beta-1)(x-g(t))^{\beta-2}f(t).$$

《应用概率统计》版权所用

《应用概率统计》版权所用

代入方程(3.2)可得

$$\begin{aligned}&\frac{(x-g(t))^{\beta}}{\beta}\Big[\dot{f}(t)+\beta r_t f(t)-\frac{\beta}{2(\beta-1)}\|\theta_t\|^2 f(t)\Big]-\\&(x-g(t))^{\beta-1}[\dot{g}(t)f(t)-(r_t g(t)-u_t+\theta_t'\rho_t v_t)f(t)] \quad = \quad 0.\end{aligned}$$

于是有

$$\begin{aligned}&\dot{f}(t)+\beta r_t f(t)-\frac{\beta}{2(\beta-1)}\|\theta_t\|^2 f(t)=0, \qquad f(T)=1,\\&\dot{g}(t)f(t)-(r_t g(t)-u_t+\theta_t'\rho_t v_t)f(t)=0, \qquad g(T)=0.\end{aligned}$$

解方程可得

$$f(t)=\exp\Big\{\int_t^T\Big(\beta r_s-\frac{\beta}{2(\beta-1)}\|\theta_s\|^2\Big)\mathrm{d}s\Big\}, \tag{3.5}$$

$$g(t)=\int_t^T\exp\Big\{\int_s^t r_z\mathrm{d}z\Big\}(u_s-\theta_s'\rho_s v_s)\mathrm{d}s. \tag{3.6}$$

因此, 幂效用函数下, 问题(2.5)的最优投资策略可总结如下:

定理 3.1　当效用函数为$U(x)=x^{\beta}/\beta$, $\beta<1$且$\beta\neq 0$时, 则问题(2.5)的最优投资策略为

$$\pi_t^*=(\sigma_t\sigma_t')^{-1}\Big(\frac{X_t-g(t)}{1-\beta}B_t+\sigma_t\rho_t v_t\Big), \tag{3.7}$$

其中$g(t)$由式(3.6)所确定.

将最优投资策略(3.7)代入式(3.3)并取期望, 通过解方程可得

$$\begin{aligned}\mathsf{E}X_t^* \quad = \quad & X_0 e^{\int_0^t[r_z-[1/(\beta-1)]\cdot\|\theta_z\|^2]\mathrm{d}z}\\&+\int_0^t e^{\int_s^t[r_z-[1/(\beta-1)]\cdot\|\theta_z\|^2]\mathrm{d}z}\Big[(\theta_s'\rho_s v_s-u_s)+\frac{g(s)}{\beta-1}\|\theta_s\|^2\Big]\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

因此, 终端时刻的期望财富为

$$\begin{aligned}\mathsf{E}X_T^* \quad = \quad & X_0 e^{\int_0^T[r_z-[1/(\beta-1)]\cdot\|\theta_z\|^2]\mathrm{d}z}\\&+\int_0^T e^{\int_s^T[r_z-[1/(\beta-1)]\cdot\|\theta_z\|^2]\mathrm{d}z}\Big[(\theta_s'\rho_s v_s-u_s)+\frac{g(s)}{\beta-1}\|\theta_s\|^2\Big]\mathrm{d}s.\end{aligned} \tag{3.8}$$

推论 3.1　假设效用函数为$U(x)=x^{\beta}/\beta$, $\beta<1$且$\beta\neq 0$时, 且负债不存在时, 即$u_t=v_t=\rho_t=0$, 则问题(2.5)的最优投资策略和相应的终端财富期望值分别为

$$\pi_t^*=\frac{X_t}{1-\beta}(\sigma_t\sigma_t')^{-1}B_t, \qquad \mathsf{E}X_T^*=X_0 e^{\int_0^T[r_t-[1/(\beta-1)]\cdot\|\theta_t\|^2]\mathrm{d}t}. \tag{3.9}$$

注记 2 由式(3.7)可见, 幂效用函数下问题(2.5)的最优投资策略由两部分组成, 第一部分是$[X_t/(1-\beta)](\sigma_t\sigma_t')^{-1}B_t$, 正是不考虑负债时的最优投资策略, 第二部分是$(\sigma_t\sigma_t')^{-1}\cdot\{[-g(t)/(1-\beta)]B_t+\sigma_t\rho_t v_t\}$, 正是由负债过程所确定的, 是为了对冲负债所引起的风险而进行的投资. 另一方面, 式(3.7)与财富过程X_t有关, 这说明幂效用函数下的最优投资策略随t时刻投资人的财富值的变化而变化.

3.2 指数效用函数

指数效用函数下, 方程(3.2)的解可假设为

$$H(t,x)=-\exp\big\{-\beta x e^{\int_t^T r_z\mathrm{d}z}+h(t)\big\},\qquad h(T)=0.$$

求得各阶偏导数如下:

$$H_t=H\big(\beta x r_t e^{\int_t^T r_z\mathrm{d}z}+\dot h(t)\big),\qquad H_x=H\big(-\beta e^{\int_t^T r_z\mathrm{d}z}\big),\qquad H_{xx}=H\big(\beta e^{\int_t^T r_z\mathrm{d}z}\big)^2.$$

代入方程(3.2)可得

$$H(t,x)\Big[\dot h(t)-\frac{1}{2}\|\theta_t\|^2+(u_t-\theta_t'\rho_t v_t)\beta e^{\int_t^T r_z\mathrm{d}z}\Big]=0.$$

于是有

$$\dot h(t)-\frac{1}{2}\|\theta_t\|^2+(u_t-\theta_t'\rho_t v_t)\beta e^{\int_t^T r_z\mathrm{d}z}=0,\qquad h(T)=0.$$

解方程可得

$$h(t)=\int_t^T(u_s-\theta_s'\rho_s v_s)\beta e^{\int_s^T r_z\mathrm{d}z}\mathrm{d}s-\int_t^T\frac{1}{2}\|\theta_s\|^2\mathrm{d}s.$$

因此, 指数效用函数下我们有如下结论:

定理 3.2 当效用函数为$U(x)=-e^{-\beta x}$, $\beta>0$, 则问题(2.5)的最优投资策略为

$$\pi_t^*=(\sigma_t\sigma_t')^{-1}\Big(\frac{1}{\beta}B_t e^{-\int_t^T r_z\mathrm{d}z}+\sigma_t\rho_t v_t\Big).\tag{3.10}$$

将最优投资策略代入财富方程(3.3)可得

$$\mathrm{d}X_t^*=\Big(r_tX_t^*-u_t+\frac{1}{\beta}\|\theta_t\|^2e^{-\int_t^T r_z\mathrm{d}z}+\theta_t'\rho_t v_t\Big)\mathrm{d}t+\frac{1}{\beta}\theta_t'e^{-\int_t^T r_z\mathrm{d}z}\mathrm{d}W_t.$$

解方程可得

$$\begin{aligned}X_t^* &= X_0e^{\int_0^t r_z\mathrm{d}z}+\int_0^t(\theta_s'\rho_s v_s-u_s)e^{-\int_t^s r_z\mathrm{d}z}\mathrm{d}s+\int_0^t\frac{1}{\beta}\|\theta_s\|^2e^{-\int_t^T r_z\mathrm{d}z}\mathrm{d}s\\ &\quad+\int_0^t\frac{1}{\beta}\theta_s'e^{-\int_t^T r_z\mathrm{d}z}\mathrm{d}W_s.\end{aligned}$$

因此, 终端时刻财富期望值为

$$\mathsf{E}X_T^*=X_0e^{\int_0^T r_z\mathrm{d}z}+\int_0^T\frac{1}{\beta}\|\theta_s\|^2\mathrm{d}s+\int_0^T(\theta_s'\rho_s v_s-u_s)e^{-\int_T^s r_z\mathrm{d}z}\mathrm{d}s.\tag{3.11}$$

《应用概率统计》版权所用

《应用概率统计》版权所用

推论 3.2　当效用函数为$U(x)=-e^{-\beta x}$, $\beta>0$且没有负债时, 即$u_t=v_t=\rho_t=0$, 则最优投资策略和相应的终端财富期望值分别为

$$\pi_t^*=\frac{1}{\beta}(\sigma_t\sigma_t')^{-1}B_te^{-\int_t^T r_z\mathrm{d}z},\qquad \mathsf{E}X_T^*=X_0e^{\int_0^T r_z\mathrm{d}z}+\int_0^T\frac{1}{\beta}\|\theta_s\|^2\mathrm{d}s. \tag{3.12}$$

注记 3　指数效用函数下, 问题(2.5)的最优投资策略(3.10)也由两部分所构成, 一部分是不考虑负债时所进行的投资策略, 另一部分由负债过程所引起. 但指数效用函数下, 式(3.10)与t时刻财富值X_t无关, 且也与负债过程的参数u_t无关.

3.3　对数效用函数

由于对数效用函数下(3.2)的求解有些困难, 所以我们应用Legendre变换–对偶原理[7, 8], 得到相应的对偶方程, 将(3.2)转变为关于对偶函数的偏微分方程, 从而求得对数效用函数下值函数和最优投资策略的显示表达式, 并求得终端财富最优期望值.

根据值函数的凸函数性质, 定义Legendre变换为

$$\widehat{H}(t,z)=\sup_{x>0}\{H(t,x)-zx\},\qquad g(t,z)=\inf_{x>0}\{x|H(t,x)\geq zx+\widehat{H}(t,z)\},$$

其中$z>0$表示x的对偶变量. $g(t,z)$与$\widehat{H}(t,z)$的关系为$g(t,z)=-\widehat{H}_z(t,z)$, 所以可以选择$g(t,z)$作为值函数$H(t,x)$的对偶函数.

由$H_x(t,x)=z$可得如下函数关系:

$$g(t,z)=x,\qquad \widehat{H}(t,z)=H(t,g)-zg.$$

注意到$H(T,x)=U(x)$, 所以在终端时刻T可定义如下的Legendre变换:

$$\widehat{H}(T,z)=\sup_{x>0}\{U(x)-zx\},\qquad g(T,z)=\inf_{x>0}\{x|U(x)\geq zx+\widehat{H}(T,x)\}.$$

因此可得

$$g(T,z)=(U')^{-1}(z).$$

应用上述函数关系可得如下变换规则:

$$H_x=z,\qquad H_t=\widehat{H}_t,\qquad H_{xx}=-\frac{1}{\widehat{H}_{zz}}. \tag{3.13}$$

将(3.13)代入(3.2), 并对z求偏导, 经化简后可得

$$g_t-(r_tg-u_t+\theta_t'\rho_tv_t)-r_tzg_z+\frac{1}{2}\|\theta_t\|^2z^2g_{zz}+\|\theta_t\|^2zg_z=0, \tag{3.14}$$

其中g_t,g_z,g_{zz}分别表示$g(t,z)$对t的一阶偏导数、对z的一阶偏导数与对z的二阶偏导数.

《应用概率统计》版权所用

对数效用函数下有

$$g(T,z)=\frac{1}{z}.$$

根据对数效用函数的性质, 可假设(3.14)具有如下形式的解:

$$g(t,z)=\frac{1}{z}a(t)+b(t),\qquad a(T)=1,\qquad b(T)=0.$$

对$g(t,z)$求得各阶偏导数如下:

$$g_t(t,z)=\frac{1}{z}\dot{a}(t)+\dot{b}(t),\qquad g_z(t,z)=-\frac{1}{z^2}a(t),\qquad g_{zz}(t,z)=\frac{2}{z^3}a(t).$$

将上述各阶偏导数代入(3.14)经化简后可得

$$\frac{1}{z}\dot{a}(t)+\dot{b}(t)-r_tb(t)+u_t-\theta_t'\rho_tv_t=0.$$

消除对z的依赖可得

$$\begin{aligned}&\dot{a}(t)=0,\qquad a(T)=1,\\&\dot{b}(t)-r_tb(t)+u_t-\theta_t'\rho_tv_t=0,\qquad b(T)=0.\end{aligned}$$

解方程可得

$$a(t)=1,\qquad b(t)=\int_t^T\exp\Big\{\int_s^t r_z\mathrm{d}z\Big\}(u_s-\theta_s'\rho_sv_s)\mathrm{d}s.$$

于是可得

$$\begin{aligned}\pi_t^* &= (\sigma_t\sigma_t')^{-1}\Big[-\frac{H_x}{H_{xx}}B_t+\sigma_t\rho_tv_t\Big]=(\sigma_t\sigma_t')^{-1}[z\widehat{H}_{zz}B_t+\sigma_t\rho_tv_t]\\&= (\sigma_t\sigma_t')^{-1}[-zg_zB_t+\sigma_t\rho_tv_t]=(\sigma_t\sigma_t')^{-1}\Big[\frac{1}{z}a(t)B_t+\sigma_t\rho_tv_t\Big]\\&= (\sigma_t\sigma_t')^{-1}[(g-b(t))B_t+\sigma_t\rho_tv_t]=(\sigma_t\sigma_t')^{-1}[(x-b(t))B_t+\sigma_t\rho_tv_t].\end{aligned}$$

因此对数效用函数下有下列结论:

定理 3.3 当效用函数为$U(x)=\ln x$时, 则问题(2.5)的最优投资策略为

$$\pi_t^*=(\sigma_t\sigma_t')^{-1}\Big[\Big(X_t-\int_t^T\exp\Big\{\int_s^t r_z\mathrm{d}z\Big\}(u_s-\theta_s'\rho_sv_s)\mathrm{d}s\Big)B_t+\sigma_t\rho_tv_t\Big].\tag{3.15}$$

于是, 最优投资策略(3.15)下, 财富过程X_t满足

$$\mathrm{d}X_t^*=[r_tX_t-u_t+\|\theta_t\|^2(X_t-b(t))+\theta_t'\rho_tv_t]\mathrm{d}t-\theta_t'\frac{H_x}{H_{xx}}\mathrm{d}W_t.$$

取期望并解方程可得

$$\begin{aligned}\mathsf{E}X_t^* &= X_0\exp\Big\{\int_0^t(r_s+\|\theta_s\|^2)\mathrm{d}s\Big\}\\&\quad+\int_0^t\exp\Big\{\int_s^t(r_z+\|\theta_z\|^2)\mathrm{d}z\Big\}\cdot(\theta_s'\rho_sv_s-u_s-\|\theta_s\|^2b(s))\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

《应用概率统计》版权所用

因此, 终端时刻的期望财富为

$$\begin{aligned}\mathsf{E}X_T^* &= X_0\exp\Big\{\int_0^T(r_s+\|\theta_s\|^2)\mathrm{d}s\Big\}\\ &\quad+\int_0^T\exp\Big\{\int_s^T(r_z+\|\theta_z\|^2)\mathrm{d}z\Big\}\cdot(\theta_t'\rho_s v_s-u_s-\|\theta_s\|^2 b(s))\mathrm{d}s. \qquad (3.16)\end{aligned}$$

推论 3.3　当负债不存在时, 即$u_t=v_t=\rho_t=0$, 则对数效用函数下问题(2.5)的最优投资策略和相应的终端财富期望值分别为

$$\pi_t^*=X_t(\sigma_t\sigma_t')^{-1}B_t,\qquad \mathsf{E}X_T^*=X_0\exp\Big\{\int_0^T(r_s+\|\theta_s\|^2)\mathrm{d}s\Big\}. \qquad (3.17)$$

注记 4　由式(3.15)可以看出, 负债情形下, 对数效用函数下问题(2.5)的最优投资策略与幂效用函数下当参数$\beta=0$时的最优投资策略是一致的.

§4. 算例分析

为了解释本文所得结论, 本节我们给出算例分别计算三种效用函数下问题(2.5)的最优投资策略, 并分析市场参数对最优投资组合的影响.

例 1　假设现有一投资人拥有初始资金$x_0=1000$元, 欲将此资金投向一种无风险资产和三种股票, 投资期限$T=1$年. 假设投资过程存在负债, 参数$u_t=0.25$, $v_t=0.5$, 且与股票价格的相关系数分别为$\rho_t^1=0.3$, $\rho_t^2=0.5$, $\rho_t^3=0.81$. 假设无风险利率$r_t=0.02$, 三种股票的收益率向量为$b_t=\{0.12,0.22,0.18\}$, 波动率矩阵为

$$\sigma_t=\begin{pmatrix}0.23 & 0.34 & -0.46\\ 0.34 & 0.58 & 0.61\\ -0.46 & 0.61 & 0.25\end{pmatrix}.$$

假设投资人对风险的承受能力和厌恶程度满足幂效用函数, 风险厌恶因子$\beta=0.2$. 下面分别分析参数β,u_t,v_t对最优投资组合的影响.

表1　幂效用函数下, 参数β对最优投资组合的影响分析

β	-0.5	-0.2	0.2	0.3	0.35	0.4
π_t^1	180.50	225.67	338.59	386.99	416.77	451.52
π_t^2	119.02	148.64	222.69	254.43	273.96	296.75
π_t^3	104.62	130.78	196.17	224.20	241.45	261.57
$\sum_{i=1}^3\pi_t^i$	404.15	505.10	757.47	865.62	932.18	1009.83
π_t^0	595.85	494.90	242.53	134.37	67.82	-9.83
$\mathsf{E}X_T$	1081.50	1097.44	1138.31	1156.29	1167.50	1180.71

《应用概率统计》版权所用

表2 幂效用函数下, 参数u_t对最优投资组合的影响分析

u_t	-0.5	-0.2	0.25	0.5	3.0	5.0
π_t^1	338.85	338.75	338.59	338.51	337.67	337.00
π_t^2	222.86	222.79	222.69	222.64	222.09	221.65
π_t^3	196.32	196.27	196.18	196.13	195.64	195.25
$\sum_{i=1}^{3}\pi_t^i$	758.03	757.80	757.47	757.28	755.40	753.90
π_t^0	241.97	242.20	242.53	242.72	244.60	246.10
$\mathsf{E}X_T$	1139.2	1138.85	1138.31	1138.02	1135.06	1132.69

表3 幂效用函数下, 参数v_t对最优投资组合的影响分析

v_t	-2.5	-0.2	0.25	2.5	5.0	8.0
π_t^1	339.43	338.79	338.66	338.03	337.33	336.49
π_t^2	219.32	221.91	222.41	224.94	227.75	231.12
π_t^3	196.13	196.17	196.17	196.20	196.24	196.28
$\sum_{i=1}^{3}\pi_t^i$	754.90	756.87	757.25	759.18	761.32	763.89
π_t^0	245.11	243.13	242.75	240.82	238.68	236.11
EX_T	1137.68	1138.16	1138.26	1138.74	1139.27	1139.91

结果分析: (a1) 由表1可以看出, 幂效用函数下投资于风险资产数量$\sum_{i=1}^{3}\pi_t^i$随参数β的增大而递增; 相应地, 投资于无风险资产的数量π_t^0随参数β的增大而递减; 终端财富$\mathsf{E}X_T$随参数β的增大而递增; 表1中, 当$\beta=0.4$时, 投资于三种股票的数量分别为$\{451.52, 296.75, 261.57\}$, 而投资于无风险资产数量$\pi_t^0=-9.83<0$, 表明投资人需从银行借9.83元投资于风险资产.

(a2) 从表2可以看出, 幂效用函数下$\sum_{i=1}^{3}\pi_t^i$随参数u_t的增大而缓慢递减; π_t^0随参数u_t的增大而缓慢递增; $\mathsf{E}X_T$随参数u_t的增大而缓慢递减.

(a3) 从表3可以看出, $\sum_{i=1}^{3}\pi_t^i$对v_t递增; π_t^0对v_t递减; $\mathsf{E}X_T$对v_t递增, 但幅度都比较小.

例 2 假设参数$x_0, T, r_t, b_t, \sigma_t, u_t, v_t, \rho_t^1, \rho_t^2, \rho_t^3$的取值同例1所示, 下面分析当投资人对风险的承受能力和厌恶程度满足指数效用函数时, 取$\beta=0.001$, 下面分析参数β, u_t, v_t对最优投资组合的影响.

结果分析: (b1) 从表4可以看出, 指数效用函数下投资于风险资产的数量$\sum_{i=1}^{3}\pi_t^i$随参数β的增大而递减; 相应地, 投资于无风险资产的数量π_t^0随参数β的增大而递增; 终端财富$\mathsf{E}X_T$

《应用概率统计》版权所用

表4 指数效用函数下, 参数β对最优投资组合的影响分析

β	1/2000	1/1500	1/1200	0.001	0.003	0.01
π_t^1	531.26	398.42	318.71	265.57	88.45	26.45
π_t^2	349.03	261.92	209.65	174.80	58.65	17.99
π_t^3	307.66	230.73	184.57	153.80	51.22	15.32
$\sum_{i=1}^{3}\pi_t^i$	1187.96	891.06	712.93	594.17	198.32	59.77
π_t^0	-187.96	108.94	287.07	405.83	801.69	940.23
$\mathsf{E}X_T$	1195.58	1151.7	1125.37	1107.81	1049.30	1028.82

表5 指数效用函数下, 参数u_t对最优投资组合的影响分析

u_t	-2.0	-0.25	0.25	1.0	5.0	10.0
π_t^1	265.57	265.57	265.57	265.57	265.57	265.57
π_t^2	174.80	174.80	174.80	174.80	174.80	174.80
π_t^3	153.80	153.80	153.80	153.80	153.80	153.80
$\sum_{i=1}^{3}\pi_t^i$	594.17	594.17	594.17	594.17	594.17	594.17
π_t^0	405.83	405.83	405.83	405.83	405.83	405.83
$\mathsf{E}X_T$	1110.09	1108.32	1107.81	1107.06	1103.02	1097.96

表6 指数效用函数下, 参数v_t对最优投资组合的影响分析

v_t	-10	-2	0.5	3.0	5.0	10.0
π_t^1	267.98	266.15	265.57	264.10	264.54	263.39
π_t^2	162.80	171.94	174.80	177.66	179.95	185.66
π_t^3	155.26	154.15	153.80	153.45	153.17	152.47
$\sum_{i=1}^{3}\pi_t^i$	586.04	592.24	594.17	596.11	597.66	601.53
π_t^0	413.96	407.76	405.83	403.89	402.34	398.47
$\mathsf{E}X_T$	1105.87	1107.35	1107.81	1108.28	1108.65	1109.57

随参数β的增大而递减; 当$\beta = 1/2000$时, 投资于无风险资产数量$\pi_t^0 = -187.96 < 0$, 表明投资者需从银行借入187.96元投资于风险资产.

(b2) 从表5可以看出, 指数效用函数下, $\sum_{i=1}^{3}\pi_t^i$和π_t^0不受u_t的影响; $\mathsf{E}X_T$对u_t递减, 但幅度比较小.

(b3) 从表6可以看出, 指数效用函数下, $\sum_{i=1}^{3}\pi_t^i$对v_t递增; π_t^0对v_t递减; $\mathsf{E}X_T$对v_t递增.

《应用概率统计》版权所用

例 3 假设参数$x_0, T, r_t, b_t, \sigma_t, u_t, v_t, \rho_t^1, \rho_t^2, \rho_t^3$的取值同例1所示, 下面分析对数效用函数下, 参数u_t, v_t, T对最优投资组合的影响.

表7 对数效用函数下, 参数u_t对最优投资组合的影响分析

u_t	-10.0	-5.0	0.25	3.0	5.0	10.0
π_t^1	273.64	272.31	270.90	270.16	269.62	268.28
π_t^2	180.10	179.22	178.29	177.81	177.46	176.58
π_t^3	158.47	157.70	156.88	156.45	156.14	155.37
$\sum_{i=1}^{3}\pi_t^i$	612.22	609.22	606.07	604.42	603.22	600.22
π_t^0	387.78	390.78	393.93	395.58	396.78	399.77
$\mathsf{E}X_T$	1125.37	1119.64	1113.61	1110.46	1108.16	1102.42

表8 对数效用函数下, 参数v_t对最优投资组合的影响分析

v_t	-10	-5	0.5	2	5	10
π_t^1	272.79	271.90	270.90	270.63	270.09	269.18
π_t^2	165.95	171.83	178.29	180.06	183.58	189.46
π_t^3	158.04	157.49	156.88	156.72	156.38	155.83
$\sum_{i=1}^{3}\pi_t^i$	596.79	601.21	606.07	607.40	610.05	614.47
π_t^0	403.21	398.79	393.93	392.60	389.95	385.53
$\mathsf{E}X_T$	1111.4	1112.45	1113.61	1113.93	1114.56	1115.61

表9 对数效用函数下, 参数T对最优投资组合的影响分析

T	0.25	0.5	1	2	5	10
π_t^1	270.93	270.92	270.90	270.86	270.73	270.55
π_t^2	178.32	178.31	178.29	178.27	178.19	178.07
π_t^3	156.90	156.89	156.88	156.86	156.79	156.68
$\sum_{i=1}^{3}\pi_t^i$	606.14	606.12	606.07	605.98	605.71	605.30
π_t^0	393.86	393.88	393.93	394.02	394.29	394.70
$\mathsf{E}X_T$	1027.27	1055.28	1113.61	1240.12	1712.56	2932.85

结果分析: (c1) 从表7可以看出, 对数效用函数下投资于风险资产的数量$\sum_{i=1}^{3}\pi_t^i$随参数u_t增大而递减; 相应地, 投资于无风险资产的数量π_t^0随u_t增大而递增; 终端财富期望值$\mathsf{E}X_T$随参数u_t增大而递减.

表10　对数效用函数下, 无风险利率r_t对最优投资组合的影响分析

r_t	0.001	0.01	0.02	0.05	0.10	0.14
π_t^1	321.82	297.67	270.90	190.35	56.19	-51.13
π_t^2	191.82	185.40	178.29	156.85	121.17	92.62
π_t^3	180.05	169.11	156.88	120.44	59.62	10.96
$\sum_{i=1}^{3}\pi_t^i$	693.70	652.18	606.07	467.64	236.98	52.45
π_t^0	306.3	347.82	393.93	532.36	763.02	947.55
$\mathsf{E}X_T$	1119.96	1116.48	1113.61	1111.16	1127.72	1160.25

(c2) 从表8可以看出, 对数效用函数下$\sum_{i=1}^{3}\pi_t^i$对参数v_t递增; π_t^0对参数v_t递减; $\mathsf{E}X_T$对参数v_t递增.

(c3) 从表9可以看出, $\sum_{i=1}^{3}\pi_t^i$和π_t^0几乎不受投资期限T的影响, 但$\mathsf{E}X_T$随投资期限T的增大而递增.

(c4) 从表10可以看出, 参数r_t对最优投资组合存在很大的影响. $\sum_{i=1}^{3}\pi_t^i$随着无风险利率r_t增大而递减; 相应地, π_t^0随着r_t增大而递增; $\mathsf{E}X_T$随着r_t增大而先递减后递增.

§5. 结　　论

金融实务中, 投资过程往往带有负债, 本文假设负债服从几何布朗运动并从效用最大化角度对负债情形下的投资组合选择问题进行了研究, 应用动态规划原理、HJB方程和Lengdre变换得到了幂效用、指数效用和对数效用下最优投资策略的显示表达式, 进一步扩展了Xie和Li等人(2008)的工作. 文章最后给出算例分析了不同效用函数下市场参数对最优投资组合的影响, 从而对满足不同效用函数的投资者进行科学决策提供理论依据. 进一步可研究借贷利率限制或者卖空限制下的资产–负债管理问题, 也可研究随机利率模型或者随机波动率模型下的资产–负债管理问题.

致谢　衷心感谢匿名审稿人提出的创造性修改意见!

参 考 文 献

[1] Sharpe, W.F. and Tint, L.G., Liabilities - A new approach, *The Journal of Portfolio Management*, **16(2)**(1990), 5–10.

[2] Leippold, M., Trojani, F. and Vanini, P., A geometric approach to multiperiod mean variance optimization of assets and liabilities, *Journal of Economic Dynamics and Control*, **28(6)**(2004), 1079–1113.

《应用概率统计》版权所用

[3] Chiu, M.C. and Li, D., Asset and liability management under a continuous-time mean-variance optimization framework, *Insurance: Mathematics and Economics*, **39(3)**(2006), 330–355.

[4] Xie, S., Li, Z. and Wang, S., Continuous-time portfolio selection with liability: Mean-variance model and stochastic LQ approach, *Insurance: Mathematics and Economics*, **42(3)**(2008), 943–953.

[5] 金秀, 黄小原, 资产–负债管理问题及在辽宁养老金问题中的应用, 系统工程理论与实践, **25(9)**(2005), 42–48.

[6] 吉小东, 汪寿阳, 中国养老金动态资产负债管理的优化模型与分析, 系统工程理论与实践, **25(8)**(2005), 50–54.

[7] Xiao, J., Zhai, H. and Qin, C., The constant elasticity of variance (CEV) model and the Legendre transform-dual solution for annuity contracts, *Insurance: Mathematics and Economics*, **40(2)**(2007), 302–310.

[8] Gao, J.W., Stochastic optimal control of DC pension funds, *Insurance: Mathematics and Economics*, **42(3)**(2008), 1159–1164.

[9] Yong, J. and Zhou, X.Y., *Stochastic Controls: Hamiltonian Systems and HJB Equations*, New York: Springer-Verlag, 1999.

《应用概率统计》版权所用

Optimal Control for Utility Portfolio Selection with Liability

Chang Hao

(*Department of Mathematics, Tianjin Polytechnic University, Tianjin, 300387*)

(*School of Management, Tianjin University, Tianjin, 300072*)

Rong Ximin

(*School of Science, Tianjin University, Tianjin, 300072*)

In this paper we use stochastic optimal control theory to investigate a dynamic portfolio selection problem with liability process, in which the liability process is assumed to be a geometric Brownian motion and completely correlated with stock prices. We apply dynamic programming principle to obtain Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB) equations for the value function and systematically study the optimal investment strategies for power utility, exponential utility and logarithm utility. Firstly, the explicit expressions of the optimal portfolios for power utility and exponential utility are obtained by applying variable change technique to solve corresponding HJB equations. Secondly, we apply Legendre transform and dual approach to derive the optimal portfolio for logarithm utility. Finally, numerical examples are given to illustrate the results obtained and analyze the effects of the market parameters on the optimal portfolios.

Keywords: Liability process, dynamic portfolio selection, dynamic programming principle, Legendre transform, power utility, exponential utility, logarithm utility.

AMS Subject Classification: 93E20, 91B28, 60H30.