基于W, LR和LM检验的预检验两参数估计 *

常新锋[1,2]　　杨　虎[2]

([1]江苏大学财经学院统计系, 镇江, 212013; [2]重庆大学数学与统计学院, 重庆, 401331)

摘　要

本文讨论带等式约束的线性模型, 随机误差向量服从多元正态分布, 当附加的约束条件不确定时, 提出了基于W检验, LR检验和LM检验的预检验两参数估计, 并对估计优良性进行分析.

关 键 词:　两参数估计, 预检验估计, 均方误差.

学 科 分 类 号:　O212.1.

§1.　引　　言

考虑附加信息为等式约束的线性模型

$$\begin{cases} y = X\beta + \varepsilon; \\ r = R\beta, \end{cases} \tag{1.1}$$

其中y是$n\times 1$的响应向量, X是$n\times p$的列满秩矩阵, β是$p\times 1$的未知参数向量, r为$q\times 1$的已知向量, R为$q\times p$的行满秩矩阵, 且$q<p$, ε是$n\times 1$的服从正态分布的随机误差向量, ε的期望为$\mathsf{E}(\varepsilon)=0$, 方差为$\mathsf{Var}\,(\varepsilon\varepsilon')=\sigma^2 I$, $\sigma^2>0$, I是$n\times n$的单位矩阵.

当研究者不能确定关于样本信息的约束条件$r=R\beta$是否成立时, 我们考虑参数的假设检验问题: 原假设$H_0: r=R\beta$和备择假设$H_1: r\neq R\beta$. 对于以上的假设检验问题, 除了常用的F检验统计量, 在计量经济学中还有Wald (W), Likelihood Ration (LR)和Lagrangian Multiplier (LM)检验统计量. 文献[1–3]对W, LR和LM检验统计量做了许多研究. 对附加信息为等式约束的线性模型(1.1), 文献[4]得到基于F检验的预检验估计. 结合预检验估计和岭估计, 文献[5]提出了基于F检验的预检验岭估计. 文献[6]得到了基于F检验的预检验Liu估计. 进一步地, 文献[7]提出了基于W, LR和LM检验的预检验岭估计, 并对估计的偏差和均方误差等性质做了研究. 本文结合两参数估计和预检验估计, 提出基于W, LR和LM检验的预检验两参数估计, 并在平方偏差和均方误差准则下对估计的优良性进行分析.

*中央高校基本科研业务费(CDJXS10100002)、江苏大学高级技术人才科研启动基金(11JDG179)和江苏省统计应用研究基地资助.

本文2010年12月18日收到, 2012年8月16日收到修改稿.

§2. 估计的提出

上述的W, LR和LM检验统计量分别为

$$\zeta_{\rm W}=\frac{(R\widehat{\beta}-r)'(RC^{-1}R')^{-1}(R\widehat{\beta}-r)}{\widehat{\sigma}^2}=\frac{nqF}{n-p},$$
$$\zeta_{\rm LR}=n[\ln(\widetilde{\sigma}^2)-\ln(\widehat{\sigma}^2)]=n\ln\Big(1+\frac{qF}{n-p}\Big),$$
$$\zeta_{\rm LM}=\frac{(R\widehat{\beta}-r)'(RC^{-1}R')^{-1}(R\widehat{\beta}-r)}{\widetilde{\sigma}^2}=\frac{nqF}{n-p+qF},$$

其中$\widehat{\sigma}^2=n^{-1}(y-X\widehat{\beta})'(y-X\widehat{\beta})$和$\widetilde{\sigma}^2=n^{-1}(y-X\widetilde{\beta})'(y-X\widetilde{\beta})$分别为$\sigma^2$所对应的极大似然估计和约束极大似然估计, $F=(R\beta-r)'(RC^{-1}R')^{-1}(R\beta-r)/(qS_e^2)$为常用的F统计量.

为了克服线性模型中的复共线性, 综合岭估计和Liu估计, 文献[8]提出的两参数估计为

$$\widehat{\beta}(k,d)=F_d\widehat{\beta}(k)=F_dW\widehat{\beta}=(X'X+I)^{-1}(X'X+dI)(X'X+kI)^{-1}X'y, \tag{2.1}$$

其中$F_d=(X'X+I)^{-1}(X'X+dI)$, $W=(I_p+kC^{-1})^{-1}$, $C=X'X$, 可以看到两参数估计是最小二乘估计, 岭估计和Liu估计的推广.

考虑带约束条件的线性模型(1.1), 结合文献[9]提出约束最小二乘估计的方法, 我们得到约束两参数估计为

$$\widetilde{\beta}(k,d)=F_dW\widetilde{\beta}=F_dW\widehat{\beta}-F_dWC^{-1}R'(RC^{-1}R')^{-1}(R\widehat{\beta}-r), \tag{2.2}$$

其中$\widetilde{\beta}$为约束最小二乘估计.

结合两参数估计, 约束两参数估计和预检验估计的思想, 得到基于W, LR和LM检验的预检验两参数估计为

$$\widehat{\beta}_*^{\rm PT}(k,d)=\widetilde{\beta}(k,d)I(\zeta_*\le\chi_q^2(\alpha))+\widehat{\beta}(k,d)I(\zeta_*\ge\chi_q^2(\alpha))=F_d\widehat{\beta}_*^{\rm PT}(k), \tag{2.3}$$

其中$I(A)$为事件A的示性函数, $\chi_q^2(\alpha)$为自由度为q的χ^2分布的上α分位数, ζ_*分别表示$\zeta_{\rm W}$, $\zeta_{\rm LR}$和$\zeta_{\rm LM}$统计量.

根据估计$\widehat{\beta}_*^{\rm PT}(k,d)$的定义我们可得其偏差和均方误差分别为

$$\begin{aligned}{\rm Bias}(\widehat{\beta}_*^{\rm PT}(k,d)) &= -B\beta-F_dW\eta G_{q+2,n-p}(l_1^*;\Delta), && (2.4)\\ {\rm MSE}(\widehat{\beta}_*^{\rm PT}(k,d)) &= \sigma^2[{\rm tr}(F_dWC^{-1}W'F_d')-{\rm tr}(F_dWAW'F_d')G_{q+2,n-p}(l_1^*;\Delta)]\\ &\quad +\eta'W'F_d'F_dW\eta[2G_{q+2,n-p}(l_1^*;\Delta)-G_{q+4,n-p}(l_2^*;\Delta)]\\ &\quad +2\beta'B'F_dW\eta G_{q+2,n-p}(l_1^*;\Delta)+\beta'B'B\beta,. && (2.5)\end{aligned}$$

其中$\eta = C^{-1}R'(RC^{-1}R')^{-1}(R\beta - r)$, $A = C^{-1}R'(RC^{-1}R')^{-1}RC^{-1}$, $C(k) = X'X + kI_p$, $\Delta = (R\beta - r)'(RC^{-1}R')^{-1}(R\beta - r)/\sigma^2$, 且$l_1^*$分别表示

$$l_1^{\rm W} = \frac{n-p}{n(q+2)}\chi_q^2(\alpha),\quad l_1^{\rm LR} = \Big(\frac{n-p}{q+2}\Big)(e^{\chi_q^2(\alpha)/n} - 1),\quad l_1^{\rm LM} = \frac{(n-p)\chi_q^2(\alpha)}{(q+2)(n-\chi_q^2(\alpha))},$$

l_2^*分别表示

$$l_2^{\rm W} = \frac{n-p}{n(q+4)}\chi_q^2(\alpha),\quad l_2^{\rm LR} = \Big(\frac{n-p}{q+4}\Big)(e^{\chi_q^2(\alpha)/n} - 1),\quad l_2^{\rm LM} = \frac{(n-p)\chi_q^2(\alpha)}{(q+4)(n-\chi_q^2(\alpha))},$$

$G_{m,n}(\cdot;\Delta)$表示自由度为(m,n)非中心参数为$(1/2)\Delta$的非中心F分布的累计分布函数.

§3. 平方偏差准则下的优良性

定义 3.1 对于参数向量β的估计$\widehat{\beta}$, 其平方偏差为

$$\mathrm{QB}(\widehat{\beta}) = \mathrm{Bias}(\widehat{\beta})'\mathrm{Bias}(\widehat{\beta}).$$

根据平方偏差的定义和(2.4), 可得估计$\widehat{\beta}_*^{\rm PT}(k,d)$的平方偏差为

$$\begin{aligned}\mathrm{QB}(\widehat{\beta}_*^{\rm PT}(k,d)) &= \eta'W'F_d'F_dW\eta[G_{q+2,n-p}(l_1^*;\Delta)]^2\\ &\quad + \beta'B'B\beta + 2\eta'W'F_d'B\beta G_{q+2,n-p}(l_1^*;\Delta).\end{aligned}$$

定理 3.1 在平方偏差准则下, 估计$\widehat{\beta}_{\rm W}^{\rm PT}(k,d)$, $\widehat{\beta}_{\rm LR}^{\rm PT}(k,d)$和$\widehat{\beta}_{\rm LM}^{\rm PT}(k,d)$三者之间的关系为: $\mathrm{QB}(\widehat{\beta}_{\rm W}^{\rm PT}(k,d)) \le \mathrm{QB}(\widehat{\beta}_{\rm LR}^{\rm PT}(k,d)) \le \mathrm{QB}(\widehat{\beta}_{\rm LM}^{\rm PT}(k,d))$.

证明: 在平方偏差准则下, 先对估计$\widehat{\beta}_{\rm W}^{\rm PT}(k,d)$和$\widehat{\beta}_{\rm LR}^{\rm PT}(k,d)$做比较. 估计$\widehat{\beta}_{\rm W}^{\rm PT}(k,d)$和$\widehat{\beta}_{\rm LR}^{\rm PT}(k,d)$的平方偏差之差为

$$\begin{aligned}&\mathrm{QB}(\widehat{\beta}_{\rm LR}^{\rm PT}(k,d)) - \mathrm{QB}(\widehat{\beta}_{\rm W}^{\rm PT}(k,d))\\ =\ &\eta'W'F_d'F_dW\eta[G_{q+2,n-p}(l_1^{\rm LR};\Delta) + G_{q+2,n-p}(l_1^{\rm W};\Delta)]\Lambda_1 + 2\eta'W'F_d'B\beta\Lambda_1,\end{aligned}\tag{3.1}$$

其中$\Lambda_1 = G_{q+2,n-p}(l_1^{\rm LR};\Delta) - G_{q+2,n-p}(l_1^{\rm W};\Delta)$. 由于$l_1^{\rm W} \le l_1^{\rm LR}$, 因此$\Lambda_1 \ge 0$. 故$\mathrm{QB}(\widehat{\beta}_{\rm LR}^{\rm PT}(k,d)) - \mathrm{QB}(\widehat{\beta}_{\rm W}^{\rm PT}(k,d)) \ge 0$显然成立.

同理可得$\mathrm{QB}(\widehat{\beta}_{\rm LM}^{\rm PT}(k,d)) - \mathrm{QB}(\widehat{\beta}_{\rm LR}^{\rm PT}(k,d)) \ge 0$. □

§4. 均方误差准则下的优良性

下面在均方误差准则下, 对基于W, LR和LM检验的预检验两参数估计进行比较. 由(2.5)可以看到预检验两参数估计的均方误差值与非中心参数Δ和参数k,d均有关, 因此这部分的讨论我们分为两部分, 首先令$k>0$和$0<d<1$固定, 把预检验两参数估计的均方误差值看做非中心参数Δ的函数; 接下来令Δ固定, 把预检验两参数估计的均方误差值看做参数k和d的函数.

4.1　估计的均方误差值为Δ的函数

引理 4.1　设矩阵A, B均为$n\times n$的实对称阵, 且B为正定矩阵, 对任意$n\times 1$的非零向量x, 有$\lambda_n(AB^{-1})\leq(x'Ax)/(x'Bx)\leq\lambda_1(AB^{-1})$成立, 其中$\lambda_1(AB^{-1})$和$\lambda_n(AB^{-1})$分别表示矩阵$AB^{-1}$的最大特征值和最小特征值.

证明过程见文献[4].

定理 4.1　在均方误差准则下, 对$k>0$和$0<d<1$固定, 当$0\leq\Delta\leq\min(\Delta_1,\Delta_3)$, 估计$\widehat{\beta}_{\rm W}^{\rm PT}(k,d)$, $\widehat{\beta}_{\rm LR}^{\rm PT}(k,d)$和$\widehat{\beta}_{\rm LM}^{\rm PT}(k,d)$三者之间的关系为

$$\mathrm{MSE}(\widehat{\beta}_{\rm W}^{\rm PT}(k,d))\geq\mathrm{MSE}(\widehat{\beta}_{\rm LR}^{\rm PT}(k,d))\geq\mathrm{MSE}(\widehat{\beta}_{\rm LM}^{\rm PT}(k,d));$$

当$\Delta>\max(\Delta_2,\Delta_4)$, 估计$\widehat{\beta}_{\rm W}^{\rm PT}(k,d)$, $\widehat{\beta}_{\rm LR}^{\rm PT}(k,d)$和$\widehat{\beta}_{\rm LM}^{\rm PT}(k,d)$三者之间的关系为

$$\mathrm{MSE}(\widehat{\beta}_{\rm W}^{\rm PT}(k,d))\leq\mathrm{MSE}(\widehat{\beta}_{\rm LR}^{\rm PT}(k,d))\leq\mathrm{MSE}(\widehat{\beta}_{\rm LM}^{\rm PT}(k,d)).$$

证明:　估计$\widehat{\beta}_{\rm W}^{\rm PT}(k,d)$和$\widehat{\beta}_{\rm LR}^{\rm PT}(k,d)$的均方误差值之差为

$$\begin{aligned}&\mathrm{MSE}(\widehat{\beta}_{\rm W}^{\rm PT}(k,d))-\mathrm{MSE}(\widehat{\beta}_{\rm LR}^{\rm PT}(k,d))\\=\;&\sigma^2\mathrm{tr}(F_dWAW'F_d')\Lambda_1-2\beta'B'F_dW\eta\Lambda_1-\eta'W'F_d'F_dW\eta(2\Lambda_1-\Lambda_3),\end{aligned}\tag{4.1}$$

其中$\Lambda_3=G_{q+4,n-p}(l_2^{\rm LR};\Delta)-G_{q+4,n-p}(l_2^{\rm W};\Delta)$. 显然$\Lambda_1$和$\Lambda_3$皆为正数, 故$\mathrm{MSE}(\widehat{\beta}_{\rm W}^{\rm PT}(k,d))-\mathrm{MSE}(\widehat{\beta}_{\rm LR}^{\rm PT}(k,d))\geq 0$当且仅当

$$\frac{\mathrm{tr}(F_dWAW'F_d')\Lambda_1-2\sigma^{-2}\beta'B'F_dW\eta\Lambda_1}{2\Lambda_1-\Lambda_3}\geq\sigma^{-2}\eta'W'F_d'F_dW\eta.$$

根据引理4.1有$\sigma^2\Delta\lambda_p(W'F_d'F_dWC^{-1})\leq\eta'W'F_d'F_dW\eta\leq\sigma^2\Delta\lambda_1(W'F_d'F_dWC^{-1})$, 其中$\lambda_1(W'F_d'F_dWC^{-1})$和$\lambda_p(W'F_d'F_dWC^{-1})$分布表示矩阵$(W'F_d'F_dWC^{-1})C^{-1}$的最大特征值和最小特征值, $\Delta=\sigma^{-2}\eta'C\eta$. 因此

$$\mathrm{MSE}(\widehat{\beta}_{\rm W}^{\rm PT}(k,d))-\mathrm{MSE}(\widehat{\beta}_{\rm LR}^{\rm PT}(k,d))\geq 0\text{ 成立的一个充分条件为 }\Delta\leq\Delta_1,$$

其中

$$\Delta_1=\frac{\mathrm{tr}(F_dWAW'F_d')\Lambda_1-2\sigma^{-2}\beta'B'F_dW\eta\Lambda_1}{(2\Lambda_1-\Lambda_3)\lambda_1(W'F_d'F_dWC^{-1})}.$$

根据以上叙述, 在均方误差准则下估计$\widehat{\beta}_{\rm W}^{\rm PT}(k,d)$优于$\widehat{\beta}_{\rm LR}^{\rm PT}(k,d)$, 即

$$\mathrm{MSE}(\widehat{\beta}_{\rm LR}^{\rm PT}(k,d))-\mathrm{MSE}(\widehat{\beta}_{\rm W}^{\rm PT}(k,d))\geq 0\text{ 的一个充分条件为 }\Delta\geq\Delta_2,$$

其中

$$\Delta_2=\frac{\mathrm{tr}(F_dWAW'F_d')\Lambda_1-2\sigma^{-2}\beta'B'F_dW\eta\Lambda_1}{(2\Lambda_1-\Lambda_3)\lambda_p(W'F_d'F_dWC^{-1})}.$$

同理我们得在均方误差准则下, 估计$\widehat{\beta}_{\rm LM}^{\rm PT}(k,d)$优于$\widehat{\beta}_{\rm LR}^{\rm PT}(k,d)$, 即

$$\mathrm{MSE}(\widehat{\beta}_{\rm LR}^{\rm PT}(k,d))-\mathrm{MSE}(\widehat{\beta}_{\rm LM}^{\rm PT}(k,d))\geq 0\text{ 成立的一个充分条件为 }\Delta\leq\Delta_3,$$

其中

$$\Delta_3=\frac{\mathrm{tr}(F_dWAW'F_d')\Lambda_2-2\sigma^{-2}\beta'B'F_dW\eta\Lambda_2}{(2\Lambda_2-\Lambda_4)\lambda_1(W'F_d'F_dWC^{-1})},$$

且$\Lambda_2=G_{q+2,n-p}(l_1^{\mathrm{LM}};\Delta)-G_{q+2,n-p}(l_1^{\mathrm{LR}};\Delta)$, $\Lambda_4=G_{q+4,n-p}(l_2^{\mathrm{LM}};\Delta)-G_{q+4,n-p}(l_2^{\mathrm{LR}};\Delta)$. 在均方误差准则下估计$\widehat{\beta}_{\mathrm{LR}}^{\mathrm{PT}}(k,d)$优于$\widehat{\beta}_{\mathrm{LM}}^{\mathrm{PT}}(k,d)$, 即

$$\mathrm{MSE}(\widehat{\beta}_{\mathrm{LM}}^{\mathrm{PT}}(k,d))-\mathrm{MSE}(\widehat{\beta}_{\mathrm{LR}}^{\mathrm{PT}}(k,d))\geq 0 \text{ 的一个充分条件为 } \Delta\geq\Delta_4,$$

其中

$$\Delta_4=\frac{\mathrm{tr}(F_dWAW'F_d')\Lambda_2-2\sigma^{-2}\beta'B'F_dW\eta\Lambda_2}{(2\Lambda_2-\Lambda_4)\lambda_p(W'F_d'F_dWC^{-1})}. \qquad \square$$

4.2 估计的均方误差值为参数k和d的函数

为了计算方便, 我们引入以下记号. 矩阵P为正交阵, 且满足$P'CP=\mathrm{diag}(\lambda_1,\ldots,\lambda_p)$, 其中$\lambda_1\geq\cdots\geq\lambda_p>0$为矩阵$C$的顺序特征根. 因此可以得到估计$\widehat{\beta}_{\mathrm{W}}^{\mathrm{PT}}(k,d)$和$\widehat{\beta}_{\mathrm{LR}}^{\mathrm{PT}}(k,d)$的均方误差值之差为

$$\mathrm{MSE}(\widehat{\beta}_{\mathrm{W}}^{\mathrm{PT}}(k,d))-\mathrm{MSE}(\widehat{\beta}_{\mathrm{LR}}^{\mathrm{PT}}(k,d))=\sum_{i=1}^{p}\frac{\lambda_i(\lambda_i+d)}{(\lambda_i+1)^2(\lambda_i+k)^2}\times f_1(k,d), \tag{4.2}$$

其中$f_1(k,d)=\Lambda_1\sigma^2\widetilde{a}_{ii}\lambda_i(\lambda_i+d)-(2\Lambda_1-\Lambda_3)\lambda_i\widetilde{\eta}_i^2(\lambda_i+d)-2\Lambda_1\theta_i\widetilde{\eta}_i^2[(k+1-d)\lambda_i+k]$, $\theta=P'\beta=(\theta_1,\ldots,\theta_p)'$, $\widetilde{\eta}=P'\eta=(\eta_1,\ldots,\eta_p)'$, $\widetilde{a}_{ii}\geq 0$为矩阵$\widetilde{A}=P'AP$的第i个对角元.

定理 4.2 在均方误差准则下, 对Δ和$0<d<1$固定, 当$0<k<\min(k_1,k_3)$, 估计$\widehat{\beta}_{\mathrm{W}}^{\mathrm{PT}}(k,d)$, $\widehat{\beta}_{\mathrm{LR}}^{\mathrm{PT}}(k,d)$和$\widehat{\beta}_{\mathrm{LM}}^{\mathrm{PT}}(k,d)$三者之间的关系为

$$\mathrm{MSE}(\widehat{\beta}_{\mathrm{W}}^{\mathrm{PT}}(k,d))\geq\mathrm{MSE}(\widehat{\beta}_{\mathrm{LR}}^{\mathrm{PT}}(k,d))\geq\mathrm{MSE}(\widehat{\beta}_{\mathrm{LM}}^{\mathrm{PT}}(k,d));$$

当$k>\max(k_2,k_4)$, 估计$\widehat{\beta}_{\mathrm{W}}^{\mathrm{PT}}(k,d)$, $\widehat{\beta}_{\mathrm{LR}}^{\mathrm{PT}}(k,d)$和$\widehat{\beta}_{\mathrm{LM}}^{\mathrm{PT}}(k,d)$三者之间的关系为

$$\mathrm{MSE}(\widehat{\beta}_{\mathrm{W}}^{\mathrm{PT}}(k,d))\leq\mathrm{MSE}(\widehat{\beta}_{\mathrm{LR}}^{\mathrm{PT}}(k,d))\leq\mathrm{MSE}(\widehat{\beta}_{\mathrm{LM}}^{\mathrm{PT}}(k,d)).$$

证明: 由(4.2)我们看到, $\mathrm{MSE}(\widehat{\beta}_{\mathrm{W}}^{\mathrm{PT}}(k,d))-\mathrm{MSE}(\widehat{\beta}_{\mathrm{LR}}^{\mathrm{PT}}(k,d))\geq 0$当且仅当$f_1(k,d)\geq 0$. 令$0<d<1$固定, 把$f_1(k,d)$作为参数$k$的函数, $f_1(k,d)$可化为

$$\begin{aligned} f_1(k,d) &= [\Lambda_1\sigma^2\widetilde{a}_{ii}\lambda_i(\lambda_i+d)-(2\Lambda_1-\Lambda_3)\lambda_i\widetilde{\eta}_i^2(\lambda_i+d)-2\Lambda_1\theta_i\widetilde{\eta}_i^2(1-d)\lambda_i] \\ &\quad -[2\Lambda_1\theta_i\widetilde{\eta}_i^2(\lambda_i+1)]k. \end{aligned} \tag{4.3}$$

我们得到

$$\mathrm{MSE}(\widehat{\beta}_{\mathrm{W}}^{\mathrm{PT}}(k,d))-\mathrm{MSE}(\widehat{\beta}_{\mathrm{LR}}^{\mathrm{PT}}(k,d))\geq 0 \text{ 的一个充分条件为 } k\leq k_1,$$

其中

$$k_1=\frac{\min\limits_{1\leq i\leq p}[\Lambda_1\sigma^2\widetilde{a}_{ii}\lambda_i(\lambda_i+d)-(2\Lambda_1-\Lambda_3)\lambda_i\widetilde{\eta}_i^2(\lambda_i+d)-2\Lambda_1\theta_i\widetilde{\eta}_i^2(1-d)\lambda_i]}{\max\limits_{1\leq i\leq p}[2\Lambda_1\theta_i\widetilde{\eta}_i^2(\lambda_i+1)]}.$$

相反地, 估计$\widehat{\beta}_{\mathrm{W}}^{\mathrm{PT}}(k,d)$在均方误差准则下优于估计$\widehat{\beta}_{\mathrm{LR}}^{\mathrm{PT}}(k,d)$, 即

$$\mathrm{MSE}(\widehat{\beta}_{\mathrm{LR}}^{\mathrm{PT}}(k,d))-\mathrm{MSE}(\widehat{\beta}_{\mathrm{W}}^{\mathrm{PT}}(k,d))\geq 0 \text{ 的一个充分条件为 } k>k_2,$$

其中

$$k_2=\frac{\max\limits_{1\leq i\leq p}[\Lambda_1\sigma^2\widetilde{a}_{ii}\lambda_i(\lambda_i+d)-(2\Lambda_1-\Lambda_3)\lambda_i\widetilde{\eta}_i^2(\lambda_i+d)-2\Lambda_1\theta_i\widetilde{\eta}_i^2(1-d)\lambda_i]}{\min\limits_{1\leq i\leq p}[2\Lambda_1\theta_i\widetilde{\eta}_i^2(\lambda_i+1)]}.$$

同理可得估计$\widehat{\beta}_{\mathrm{LM}}^{\mathrm{PT}}(k,d)$在均方误差准则下优于估计$\widehat{\beta}_{\mathrm{LR}}^{\mathrm{PT}}(k,d)$, 即

$$\mathrm{MSE}(\widehat{\beta}_{\mathrm{LR}}^{\mathrm{PT}}(k,d))-\mathrm{MSE}(\widehat{\beta}_{\mathrm{LM}}^{\mathrm{PT}}(k,d))\geq 0 \text{ 的一个充分条件为 } k\leq k_3,$$

其中

$$k_3=\frac{\min\limits_{1\leq i\leq p}[\Lambda_2\sigma^2\widetilde{a}_{ii}\lambda_i(\lambda_i+d)-(2\Lambda_2-\Lambda_4)\lambda_i\widetilde{\eta}_i^2(\lambda_i+d)-2\Lambda_2\theta_i\widetilde{\eta}_i^2(1-d)\lambda_i]}{\max\limits_{1\leq i\leq p}[2\Lambda_2\theta_i\widetilde{\eta}_i^2(\lambda_i+1)]}.$$

相反地, 估计$\widehat{\beta}_{\mathrm{LR}}^{\mathrm{PT}}(k,d)$在均方误差准则下优于估计$\widehat{\beta}_{\mathrm{LM}}^{\mathrm{PT}}(k,d)$, 即

$$\mathrm{MSE}(\widehat{\beta}_{\mathrm{LM}}^{\mathrm{PT}}(k,d))-\mathrm{MSE}(\widehat{\beta}_{\mathrm{LR}}^{\mathrm{PT}}(k,d))\geq 0 \text{ 的一个充分条件为 } k>k_4,$$

其中

$$k_4=\frac{\max\limits_{1\leq i\leq p}[\Lambda_2\sigma^2\widetilde{a}_{ii}\lambda_i(\lambda_i+d)-(2\Lambda_2-\Lambda_4)\lambda_i\widetilde{\eta}_i^2(\lambda_i+d)-2\Lambda_2\theta_i\widetilde{\eta}_i^2(1-d)\lambda_i]}{\min\limits_{1\leq i\leq p}[2\Lambda_2\theta_i\widetilde{\eta}_i^2(\lambda_i+1)]}. \qquad \square$$

定理 4.3　在均方误差准则下, 对Δ和$k>0$固定, 当$\max(d_1,d_3)\leq d<1$, 估计$\widehat{\beta}_{\mathrm{W}}^{\mathrm{PT}}(k,d)$, $\widehat{\beta}_{\mathrm{LR}}^{\mathrm{PT}}(k,d)$和$\widehat{\beta}_{\mathrm{LM}}^{\mathrm{PT}}(k,d)$三者之间的关系为

$$\mathrm{MSE}(\widehat{\beta}_{\mathrm{W}}^{\mathrm{PT}}(k,d))\geq\mathrm{MSE}(\widehat{\beta}_{\mathrm{LR}}^{\mathrm{PT}}(k,d))\geq\mathrm{MSE}(\widehat{\beta}_{\mathrm{LM}}^{\mathrm{PT}}(k,d));$$

当$0<d\leq\min(d_2,d_4)$, 估计$\widehat{\beta}_{\mathrm{W}}^{\mathrm{PT}}(k,d)$, $\widehat{\beta}_{\mathrm{LR}}^{\mathrm{PT}}(k,d)$和$\widehat{\beta}_{\mathrm{LM}}^{\mathrm{PT}}(k,d)$三者之间的关系为

$$\mathrm{MSE}(\widehat{\beta}_{\mathrm{W}}^{\mathrm{PT}}(k,d))\leq\mathrm{MSE}(\widehat{\beta}_{\mathrm{LR}}^{\mathrm{PT}}(k,d))\leq\mathrm{MSE}(\widehat{\beta}_{\mathrm{LM}}^{\mathrm{PT}}(k,d)).$$

证明:　对$k>0$固定, 把$f_1(k,d)$作为参数d的函数, $f_1(k,d)$可化为

$$\begin{aligned}f_1(k,d)\;&=\;[\Lambda_1\sigma^2\widetilde{a}_{ii}\lambda_i-(2\Lambda_1-\Lambda_3)\lambda_i\widetilde{\eta}_i^2+2\Lambda_1\theta_i\widetilde{\eta}_i^2\lambda_i]d\\&\quad-[(2\Lambda_1-\Lambda_3)\lambda_i^2\widetilde{\eta}_i^2+2\Lambda_1\theta_i\widetilde{\eta}_i^2((k+1)\lambda_i+k)-\Lambda_1\sigma^2\widetilde{a}_{ii}\lambda_i^2].\end{aligned}\tag{4.4}$$

我们得到

$$\mathrm{MSE}(\widehat{\beta}_{\mathrm{W}}^{\mathrm{PT}}(k,d))-\mathrm{MSE}(\widehat{\beta}_{\mathrm{LR}}^{\mathrm{PT}}(k,d))\geq 0 \text{ 的一个充分条件为 } d\geq d_1,$$

其中

$$d_1=\frac{\max\limits_{1\le i\le p}[(2\Lambda_1-\Lambda_3)\lambda_i^2\widetilde{\eta}_i^2+2\Lambda_1\theta_i\widetilde{\eta}_i^2((k+1)\lambda_i+k)-\Lambda_1\sigma^2\widetilde{a}_{ii}\lambda_i^2]}{\min\limits_{1\le i\le p}[\Lambda_1\sigma^2\widetilde{a}_{ii}\lambda_i-(2\Lambda_1-\Lambda_3)\lambda_i\widetilde{\eta}_i^2+2\Lambda_1\theta_i\widetilde{\eta}_i^2\lambda_i]}.$$

相反地, 估计$\widehat{\beta}_{\rm W}^{\rm PT}(k,d)$在均方误差准则下优于估计$\widehat{\beta}_{\rm LR}^{\rm PT}(k,d)$, 即

$$\mathrm{MSE}(\widehat{\beta}_{\rm LR}^{\rm PT}(k,d))-\mathrm{MSE}(\widehat{\beta}_{\rm W}^{\rm PT}(k,d))\ge 0 \text{ 的一个充分条件为 } 0<d\le d_2,$$

其中

$$d_2=\frac{\min\limits_{1\le i\le p}[(2\Lambda_1-\Lambda_3)\lambda_i^2\widetilde{\eta}_i^2+2\Lambda_1\theta_i\widetilde{\eta}_i^2((k+1)\lambda_i+k)-\Lambda_1\sigma^2\widetilde{a}_{ii}\lambda_i^2]}{\max\limits_{1\le i\le p}[\Lambda_1\sigma^2\widetilde{a}_{ii}\lambda_i-(2\Lambda_1-\Lambda_3)\lambda_i\widetilde{\eta}_i^2+2\Lambda_1\theta_i\widetilde{\eta}_i^2\lambda_i]}.$$

同理可得估计$\widehat{\beta}_{\rm LM}^{\rm PT}(k,d)$在均方误差准则下优于估计$\widehat{\beta}_{\rm LR}^{\rm PT}(k,d)$, 即

$$\mathrm{MSE}(\widehat{\beta}_{\rm LR}^{\rm PT}(k,d))-\mathrm{MSE}(\widehat{\beta}_{\rm LM}^{\rm PT}(k,d))\ge 0 \text{ 的一个充分条件为 } d\ge d_3,$$

其中

$$d_3=\frac{\max\limits_{1\le i\le p}[(2\Lambda_2-\Lambda_4)\lambda_i^2\widetilde{\eta}_i^2+2\Lambda_2\theta_i\widetilde{\eta}_i^2((k+1)\lambda_i+k)-\Lambda_2\sigma^2\widetilde{a}_{ii}\lambda_i^2]}{\min\limits_{1\le i\le p}[\Lambda_2\sigma^2\widetilde{a}_{ii}\lambda_i-(2\Lambda_2-\Lambda_4)\lambda_i\widetilde{\eta}_i^2+2\Lambda_2\theta_i\widetilde{\eta}_i^2\lambda_i]}.$$

相反地, 估计$\widehat{\beta}_{\rm LR}^{\rm PT}(k,d)$在均方误差准则下优于估计$\widehat{\beta}_{\rm LM}^{\rm PT}(k,d)$, 即

$$\mathrm{MSE}(\widehat{\beta}_{\rm LM}^{\rm PT}(k,d))-\mathrm{MSE}(\widehat{\beta}_{\rm LR}^{\rm PT}(k,d))\ge 0 \text{ 的一个充分条件为 } 0<d\le d_4,$$

其中

$$d_4=\frac{\min\limits_{1\le i\le p}[(2\Lambda_2-\Lambda_4)\lambda_i^2\widetilde{\eta}_i^2+2\Lambda_2\theta_i\widetilde{\eta}_i^2((k+1)\lambda_i+k)-\Lambda_2\sigma^2\widetilde{a}_{ii}\lambda_i^2]}{\max\limits_{1\le i\le p}[\Lambda_2\sigma^2\widetilde{a}_{ii}\lambda_i-(2\Lambda_2-\Lambda_4)\lambda_i\widetilde{\eta}_i^2+2\Lambda_2\theta_i\widetilde{\eta}_i^2\lambda_i]}. \qquad \square$$

根据以上分析, 令$0<d<1$固定, 我们同时考虑参数Δ和k, 即综合定理4.1和定理4.2有如下推论:

推论 4.1 均方误差准则下, 对$0<d<1$固定, 当$(\Delta,k)\in[0,\min(\Delta_1,\Delta_3)]\times[0,\min(k_1,k_3)]$, 估计$\widehat{\beta}_{\rm W}^{\rm PT}(k,d)$, $\widehat{\beta}_{\rm LR}^{\rm PT}(k,d)$和$\widehat{\beta}_{\rm LM}^{\rm PT}(k,d)$三者之间的关系为

$$\mathrm{MSE}(\widehat{\beta}_{\rm W}^{\rm PT}(k,d))\ge\mathrm{MSE}(\widehat{\beta}_{\rm LR}^{\rm PT}(k,d))\ge\mathrm{MSE}(\widehat{\beta}_{\rm LM}^{\rm PT}(k,d));$$

当$(\Delta,k)\in[\max(\Delta_2,\Delta_4),\infty)\times[\max(k_2,k_4),\infty)$, 估计$\widehat{\beta}_{\rm W}^{\rm PT}(k,d)$, $\widehat{\beta}_{\rm LR}^{\rm PT}(k,d)$和$\widehat{\beta}_{\rm LM}^{\rm PT}(k,d)$三者之间的关系为

$$\mathrm{MSE}(\widehat{\beta}_{\rm W}^{\rm PT}(k,d))\le\mathrm{MSE}(\widehat{\beta}_{\rm LR}^{\rm PT}(k,d))\le\mathrm{MSE}(\widehat{\beta}_{\rm LM}^{\rm PT}(k,d)).$$

令$k>0$固定, 我们同时考虑参数Δ和d, 即综合定理4.1和定理4.3有如下推论:

推论 4.2　均方误差准则下, 对$k>0$固定, 当$(\Delta,d)\in[0,\min(\Delta_1,\Delta_3)]\times[\max(d_1,d_3),1)$, 估计$\widehat{\beta}_{\mathrm{W}}^{\mathrm{PT}}(k,d)$, $\widehat{\beta}_{\mathrm{LR}}^{\mathrm{PT}}(k,d)$和$\widehat{\beta}_{\mathrm{LM}}^{\mathrm{PT}}(k,d)$三者之间的关系为

$$\mathrm{MSE}(\widehat{\beta}_{\mathrm{W}}^{\mathrm{PT}}(k,d))\ge\mathrm{MSE}(\widehat{\beta}_{\mathrm{LR}}^{\mathrm{PT}}(k,d))\ge\mathrm{MSE}(\widehat{\beta}_{\mathrm{LM}}^{\mathrm{PT}}(k,d));$$

当$(\Delta,d)\in[\max(\Delta_2,\Delta_4),\infty)\times[\min(d_2,d_4),1)$, 估计$\widehat{\beta}_{\mathrm{W}}^{\mathrm{PT}}(k,d)$, $\widehat{\beta}_{\mathrm{LR}}^{\mathrm{PT}}(k,d)$和$\widehat{\beta}_{\mathrm{LM}}^{\mathrm{PT}}(k,d)$三者之间的关系为

$$\mathrm{MSE}(\widehat{\beta}_{\mathrm{W}}^{\mathrm{PT}}(k,d))\le\mathrm{MSE}(\widehat{\beta}_{\mathrm{LR}}^{\mathrm{PT}}(k,d))\le\mathrm{MSE}(\widehat{\beta}_{\mathrm{LM}}^{\mathrm{PT}}(k,d)).$$

§5.　模拟分析

上述两部分从理论上分析了基于W, LR和LM检验的预检验两参数估计$\widehat{\beta}_{*}^{\mathrm{PT}}(k,d)$的优良性, 下面考虑估计在模拟方面的表现. 根据文献[6]中介绍的方法, 令$X'X=I_p$, $R'R=I_p$, $RR'=I_q$, $r=0$. 取$n=20$, $p=5$, $q=3$, 在图1中我们刻画了基于W, LR和LM检验的预检验两参数估计在不同的检验显著水平下其平方偏差的变化情况.

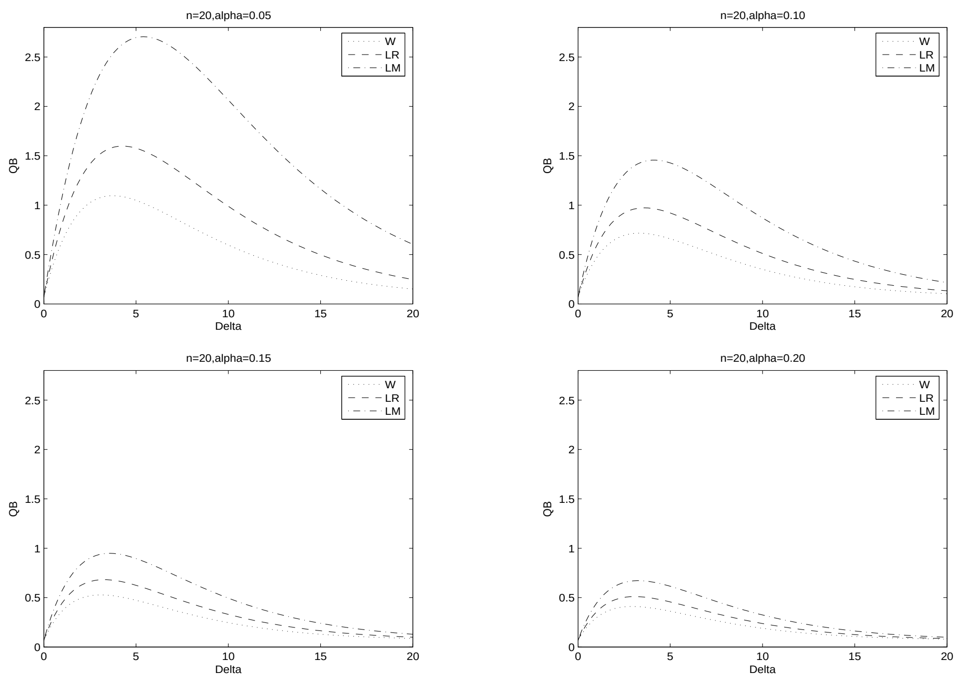

图1　$k=0.2$和$d=0.9$时基于W, LR和LM检验的预检验两参数估计在不同显著水平下的平方偏差

从图1可以看到, 在不同的显著水平下, 基于W, LR和LM检验的预检验两参数估计的均方误差值随着Δ的增大而变化, 但三个估计的平方偏差值从大到小均为: 基于LM检验的预检验两参数估计、基于LR检验的预检验两参数估计、基于W检验的预检验两参数估计. 这一现象符合我们得到的定理3.1.

接下来, 考虑新的估计在均方误差准则下的优良性. 我们取$n=20$, $p=9$, $q=6$. 在图2中令$k=0.2$和$d=0.9$固定, 得到了不同检验显著性水平下对应估计的均方误差值随参数Δ的变化情况; 在图3中令$\Delta=2$和$d=0.5$固定, 画出了不同检验显著性水平下对应估计的均方误差值随参数k的变化情况; 在图4中令$\Delta=2$和$k=0.2$固定, 画出了不同检验显著性水平下对应估计的均方误差值随参数d的变化情况.

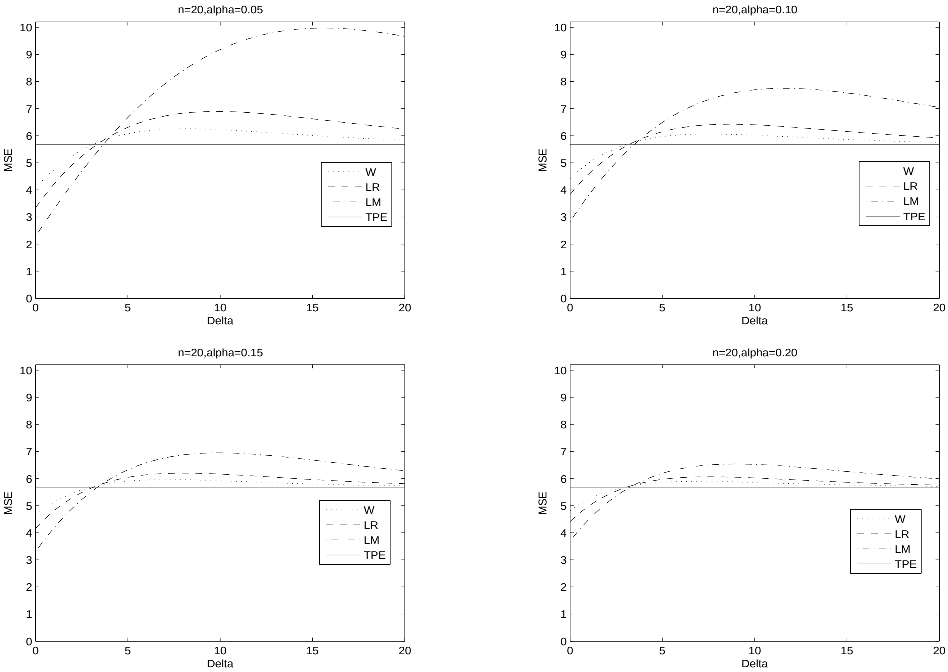

图2 $k=0.2$和$d=0.9$时基于W, LR和LM检验的预检验两参数估计在不同显著水平下的均方误差

从图2可以看出, 对$k=0.2$和$d=0.9$固定, 在不同的显著水平下, 基于W, LR和LM检验的预检验两参数估计的均方误差值随着Δ的增大而增大. 但是, 当Δ取值较小时, 三个估计的均方误差值从大到小依次为: 基于W检验的预检验两参数估计、基于LR检验的预检验两参数估计、基于LM检验的预检验两参数估计. 当Δ取值较大时, 三个估计的均方误差值从大到小与上述正好相反. 这一现象符合我们得到的定理4.1.

从图3可以看出, 对$\Delta=2$和$d=0.5$固定, 在不同的显著水平下, 基于W, LR和LM检验的预检验两参数估计的均方误差值随着k的增大而减小. 但是, 当k取值较小时, 三个估计的均方误差值从大到小依次为: 基于W检验的预检验两参数估计、基于LR检验的预检验两参数估计、基于LM检验的预检验两参数估计. 当k取值较大时, 三个估计的均方误差值从大到小与上述正好相反. 这一现象符合我们得到的定理4.2.

从图4可以看出, 对$\Delta=2$和$k=0.2$固定, 在不同的显著水平下, 基于W, LR和LM检验的预检验两参数估计的均方误差值随着d的增大而增大. 但是, 当d取值较小时, 三个估计的均方误差值从大到小依次为: 基于LM检验的预检验两参数估计、基于LR检验的预检验两参数估计、基于W检验的预检验两参数估计. 当d取值较大时, 三个估计的均方误差值从大

到小与上述正好相反. 这一现象符合我们得到的定理4.3.

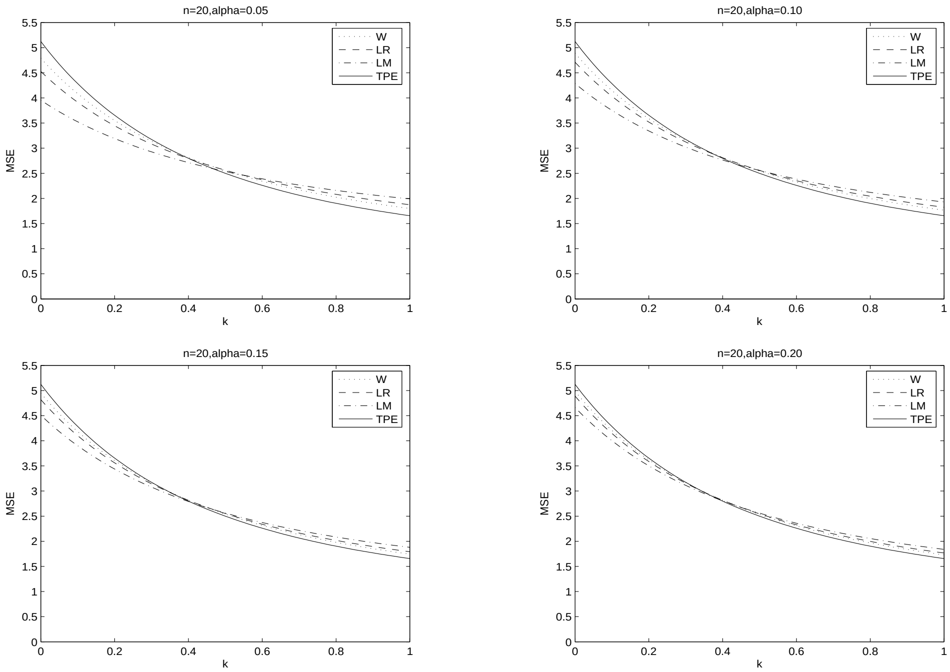

图3 $\Delta=2$和$d=0.5$时基于W, LR和LM检验的预检验两参数估计在不同显著水平下的均方误差

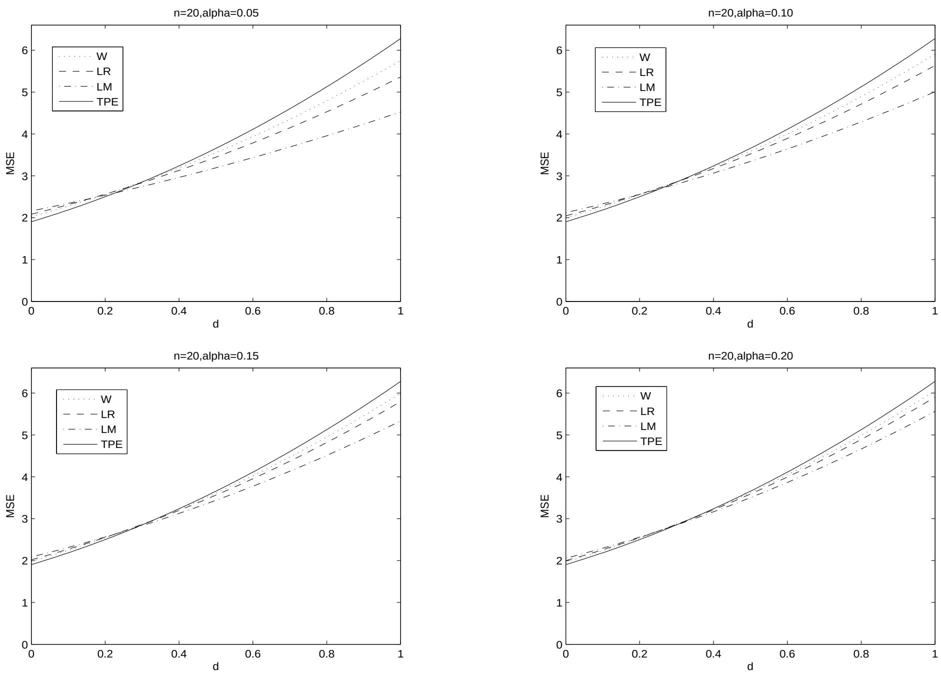

图4 $\Delta=2$和$k=0.2$时基于W, LR和LM检验的预检验两参数估计在不同显著水平下的均方误差

参 考 文 献

[1] Wald, A., Tests of statistical hypotheses concerning several parameters when the number of observations is large, *Transactions of the American Mathematical Society*, **54**(1943), 426–482.

[2] Aitchison, J. and Silvey, S.D., Maximum-likelihood estimation of parameters subject to restraints, *The Annals of Mathematical Statistics*, **29**(1958), 813–828.

[3] Rao, C.R., Large sample tests of statistical hypotheses concerning several parameters with applications to problems of estimation, *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, **44**(1948), 50–57.

[4] Judge, G.G. and Bock, M.E., *The Statistical Implications of Pre-Test and Stein-Rule Estimators in Econometrics*, Amsterdam: North-Holland Publishing Company, 1978.

[5] Saleh, A.K.Md.E. and Kibria, B.M.G., Performance of some new preliminary test ridge regression estimators and their properties, *Communications in Statistics - Theory and Method*, **22**(1993), 2747–2764.

[6] Yuksel, G. and Akdeniz, F., Properties of some new preliminary test Liu estimators and comparisons with the usual preliminary test estimators, *Journal of Statistical Research*, **35**(2001), 45–56.

[7] Kibria, B.M.G. and Saleh, A.K.Md.E., Effect of W, LR, and LM tests on the performance of preliminary test ridge regression estimators, *Journal of the Japan Statistical Society*, **33**(2003), 119–136.

[8] Yang, H. and Chang, X., A new two-parameter estimator in linear regression, *Communications in Statistics - Theory and Method*, **39**(2010), 923–934.

[9] Sarkar, N., A new estimator combining the ridge regression and the restricted least squares methods of estimation, *Communications in Statistics - Theory and Methods*, **21**(1992), 1987–2000.

Preliminary Test Two-Parameter Estimators Based on W, LR and LM Test-Statistics in a Regression Model

Chang Xinfeng[1,2] Yang Hu[2]

([1] *Department of Statistics, Jiangsu University, Zhenjiang, 212013*)

([2] *College of Mathematics and Statistics, Chongqing University, Chongqing, 401331*)

In this paper, we proposed the preliminary test two-parameter estimators based on the Wald (W), the Likelihood Ration (LR) and the Lagrangian Multiplier (LM) tests, when it is suspected that the regression parameter may be restricted to a subspace. The bias and the mean square error (MSE) of the proposed estimators are derived and compared. The conditions of superiority of the proposed estimators are obtained.

Keywords: Two-parameter estimator, preliminary test estimator, mean square error.

AMS Subject Classification: 62J07.