带常值利息力的更新模型下绝对破产概率的渐近估计 *

王晶晶
(宿州学院数学与统计学院, 宿州, 234000)

祝东进　钱文英
(安徽师范大学数学计算机科学学院, 芜湖, 241003)

摘　要

本文研究一类具有常值利息力的更新风险模型. 对于理赔分布为重尾族类的若干情形, 考虑理赔来到时刻的盈余, 并将盈余过程离散化, 进而利用更新函数和卷积, 得到该模型当盈余趋向于无穷大时有限时间内绝对破产概率的渐近表达式.

关键词:　绝对破产概率, 常值利息力, 更新风险模型, 渐近估计.

学科分类号:　O212.3.

§1.　引　言

破产理论是金融和保险领域中的风险理论的重要组成部分, 是当前精算和数学界研究的热门课题. 自Lundberg-Crámer的经典风险模型提出以来, 不少学者对其模型进行了改进, 出于实际需要和理论研究的兴趣, 对于带有常值利息力, 投资回报, 可变保费以及理赔为重尾分布情形下各种模型的破产问题都得到了广泛的关注和充分的研究. 国内学者在此领域做出了许多杰出的工作, 如吴荣等(2002)、郭军义等(2003)、胡太忠(2000)、汪荣明等(2001)、王过京等(2000)的工作都使得破产理论研究不断深入, 风险模型更加完善.

破产理论中的核心问题之一就是对保险公司的破产概率进行估计, 其原因在于一般情况下很难得到破产概率的解析表达式. 通常将盈余过程小于0的时刻定义为破产时刻, 进而考虑其终极破产概率或Gerber-Shiu罚金函数等破产问题. 但有文献考虑到, 当盈余小于0的时刻出现后, 保险公司未必真的就破产停止营业, 保险公司可以以一定的利率借入资金以维持经营. 与此同时, 保险公司用其保费收入来偿还债务.

设保险公司盈余过程为$\{U(t), t > 0\}$, 银行贷款利息力为$\delta > 0$, 且假设公司的贷款是连续动态的. 如果公司t时刻盈余$U(t) < 0$, 需要贷款$|U(t)|$来弥补赤字经营. 假设在$(0, \Delta t)$内无索赔发生, 则公司的盈余满足

$$U(t+\triangle t) = U(t) + c\triangle t + U(t)(e^{\delta\triangle t} - 1),$$

*国家自然科学基金(10901003, 11126238)、教育部科学技术研究重点项目(211077)、安徽省自然科学基金(10040606Q30, 1208085MA11)、安徽省杰出青年基金(1108085J08)、安徽高校省级自然科学研究重大项目(KJ2012ZD01)、安徽高校省级自然科学研究重点项目(KJ2011A139)和宿州学院科研开放平台项目(2012YKF32)资助.

本文2011年6月27日收到, 2012年6月27日收到修改稿.

其中是$U(t+\triangle t)$剩余赤字, $U(t)$是原赤字, $c\triangle t$是保费收入, $U(t)(e^{\delta\triangle t}-1)$是利息支出. 令$\triangle t\to 0$, 得到

$$U'(t)=c+\delta U(t).$$

可以看出, 当$U(t)>-c/\delta$时, $U'(t)>0$, 保险公司盈余$U(t)$在没有索赔的情况下严格递增, 还有可能恢复为正值. 当$U(t)<-c/\delta$时, $U'(t)<0$, 保险公司盈余递减, 不会超过$-c/\delta$. 而且在这种情形下, 公司即便借贷也无法是的公司的盈余变成正值, 因为保费收入已经不足以支付借贷所产生的利息, 于是我们将此公司的盈余小于$-c/\delta$绝对破产时刻, $-c/\delta$就是此模型下保险公司的绝对破产界.

§2. 模型、问题以及若干预备知识

本文中, 不具有投资回报的更新模型由$U(t)=x+ct-\sum\limits_{k=1}^{N_t}X_k$, $t\geq 0$给出, 其中$x\geq 0$为保险公司的初始盈余, $c\geq 0$为固定的保险费率, 索赔额序列$\{X_k,k=1,2,\ldots\}$为一列独立同分布的非负随机变量列, 具有共同的分布记为$F(x)$, 称$\overline{F}(x)=1-F(x)$为其尾分布, 设索赔时间间隔$\{\theta_k,k=1,2,\ldots\}$为独立同分布的非负随机变量序列, 与$\{X_k,k=1,2,\ldots\}$独立, 索赔发生时刻$T_0=0$, $T_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\theta_k$, $n=1,2,\ldots$, 令$N_t=\sup\{T_n\leq t,n=1,2,\ldots\}$表示在时间段$[0,t]$中发生的索赔次数, N_t为一个更新计数过程. 复合更新过程$C_t=\sum\limits_{k=1}^{N_t}X_k$表示到时刻$t$为止的索赔总额.

设$\delta>0$为保险公司将盈余投资于固定证券或银行所获得固定的利息力, 这意味着即经过时间t后初始资本x变为$xe^{\delta t}$. 于是, 在这种情形下, 到时刻t为止保险公司的总盈余$W_\delta(t)$为

$$W_\delta(t)=xe^{\delta t}+c\int_0^t e^{\delta(t-y)}\mathrm{d}y-\sum_{k=1}^{N_t}X_ke^{\delta(t-T_k)},\qquad t\geq 0. \tag{2.1}$$

在这个模型之下, 定义有限时间内的绝对破产概率

$$\psi(x,t)=\mathsf{P}\Big(\inf_{0\leq s\leq t}W_\delta(s)<-\frac{c}{\delta}\Big|W_\delta(0)=x\Big),\qquad x\geq 0,\ t\geq 0. \tag{2.2}$$

在索赔发生时刻$T_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\theta_k$, 得到第$n$次索赔发生后的瞬时盈余$W_\delta(T_n)$, $n=1,2,\ldots$, 根据(2.1),

$$\begin{aligned}W_\delta(T_n)&=xe^{\delta T_n}+c\int_0^{T_n}e^{\delta(T_n-y)}\mathrm{d}y-\sum_{k=1}^{n}X_ke^{\delta(T_n-T_k)}\\&=xe^{\delta T_{n-1}}\cdot e^{\delta\theta_n}+c\int_0^{T_{n-1}}e^{\delta(T_n-y)}\mathrm{d}y+c\int_{T_{n-1}}^{T_n}e^{\delta(T_n-y)}\mathrm{d}y-\sum_{k=1}^{n-1}X_ke^{\delta(T_n-T_k)}-X_n\\&=W_\delta(T_{n-1})\cdot e^{\delta\theta_n}+\frac{c}{\delta}(e^{\delta\theta_n}-1)-X_n.\end{aligned}$$

令

$$V_n = W_\delta(T_n) + \frac{c}{\delta}, \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

可得

$$V_0 = W_\delta(T_0) + \frac{c}{\delta} = x + \frac{c}{\delta}, \qquad V_n = V_{n-1}e^{\delta\theta_n} - X_n, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

以及

$$V_n = \Big(x + \frac{c}{\delta}\Big)\prod_{k=1}^{n} e^{\delta\theta_k} - \sum_{k=1}^{n} X_k \prod_{i=k+1}^{n} e^{\delta\theta_i}, \qquad n = 1, 2, \ldots.$$

因为破产只发生在某次索赔发生的时刻, 所以破产概率可以定义为

$$\begin{aligned}\psi(x,t) &= \mathsf{P}\Big(\inf_{0\le s\le t} W_\delta(s) < -\frac{c}{\delta}\Big| W_\delta(0) = x\Big)\\ &= \mathsf{P}\Big(\inf_{1\le n\le N_t} V_n < 0 \Big| V_0 = x + \frac{c}{\delta}\Big)\\ &= \mathsf{P}\Big(\inf_{1\le n\le N_t}\Big(\Big(x+\frac{c}{\delta}\Big) - \sum_{k=1}^{n} X_k\prod_{i=1}^{k} Y_i\Big) < 0\Big).\end{aligned}$$

由于$\inf\limits_{1\le n\le N_t}\Big(\sum\limits_{k=1}^{n} X_k \prod\limits_{i=1}^{k} e^{-\delta\theta_i}\Big)$关于$n$是递减的, 则极限为下确界. 令$Y_i = e^{-\delta\theta_i}$, 有

$$\psi(x,t) = \mathsf{P}\Big(\sum_{k=1}^{N_t} X_k \prod_{i=1}^{k} Y_i > x + \frac{c}{\delta}\Big), \tag{2.3}$$

其中$\prod\limits_{i=1}^{k} Y_i = e^{-\delta T_k} \in [0,1]$. 由此可见我们可以通过模型(2.3)来研究模型(2.2)下的破产概率问题.

下文中, 若无特别说明, 极限均对$x\to\infty$而言.

对于两个非负的实值函数$a(x)$和$b(x)$, 若满足$\limsup\limits_{x\to\infty} a(x)/b(x) \le 1$, 则记作$a(x) \lesssim b(x)$; 若满足$\liminf\limits_{x\to\infty} a(x)/b(x) \ge 1$, 则记作$a(x) \gtrsim b(x)$; 当(i)与(ii)同时成立时, 我们就说$a(x)\sim b(x)$.

对于两个分布函数F_1, F_2, 记$F_1 * F_2$为它们的卷积, 即对每一个$x\ge 0$,

$$F_1 * F_2(x) = \int_{0-}^{x} F_1(x-y)F_2(\mathrm{d}y),$$

以下记

$$F^{1*} = F, \qquad F^{n*} = F^{(n-1)*} * F, \quad n = 2, 3, \ldots.$$

文献[6]是在带有利息力的复合Poisson模型下, 假设索赔额相互独立且其分布属于次指数分布族中子族的条件下, 得到了有限时间破产概率渐近性状的一致性结果, 即

$$\psi(x,t) \sim \frac{\lambda}{\delta}\int_{x}^{xe^{\delta t}} \frac{\overline{F}(y)}{y}\mathrm{d}y,$$

而对于一般的更新模型, 文献[6]只讨论了其有限时间的破产概率. 文献[8]是在复合Poisson风险模型之下, 假设索赔额分布属于$\mathcal{S}(\gamma)$时的有限时间内的绝对破产概率的渐近行为("渐近"意思是初始盈余趋向于无穷大时, 破产概率的渐近行为), 即

$$\psi(x,t)\sim\lambda\exp\left\{\frac{\lambda}{\delta}\int_{\gamma e^{-\delta t}}^{\gamma}\frac{\mathsf{E}e^{sX}-1}{s}\mathrm{d}s-\frac{\gamma c}{\delta}\right\}\int_0^t\overline{F}(xe^{\delta s})\mathrm{d}s,$$

更新模型下的绝对破产问题目前已经引起了广发的关注, 据我们所致, 目前尚无文献对重尾分布情形下, 一般更新模型中有限时间内的绝对破产概率的渐近行为作出研究, 因此本文是在文献[8]的模型之下, 运用更新函数和卷积的方法, 在已有结果的基础之上, 考虑当理赔为一类重尾分布时, 研究带有固定利息力的更新风险模型中的绝对破产概率渐近行为并给出了其有限时间内的绝对破产概率的两个不同的渐近表达式.

经典风险模型中假定调节系数存在, 考虑的是小理赔的情形. 近年来, 理赔为重尾分布的风险模型也受到了极大地关注, 在此种情况下, 调节系数不存在, 研究经典模型中的鞅方法一般不太实用, 需要新的研究方法和思路. 重尾分布族中比较受到关注的次指数分布, 它们很好地解释了保险实务中的大跳原理, 即保险公司的破产主要是由一个大额索赔引起的. 对于具有重尾理赔的模型, 一般情况下用于刻画潜在风险, 对于此类保险业务而言, 初始准备金的数额一般很大, 即模型的初始盈余较大. 于是, 研究具有重尾分布的风险模型下的破产概率当初始盈余值很大时的渐近行为就是很有价值的问题, 文献[8]以及其中的若干参考文献都对于此类问题开展了研究. 再给出本文的主要结果前,先简单介绍几种重尾分布族.

定义 2.1 设F是定义在$[0,\infty)$上的分布函数, 若对所有的$n\geq 2$有$\lim\limits_{x\to\infty}\overline{F^{n*}}(x)/\overline{F}(x)=n$, 则称$F$属于$\Im$族, 记作$F\in\Im$.

定义 2.2 设F是定义在$[0,\infty)$上的分布函数, 称F属于$\mathcal{S}(\gamma)$族, $\gamma\geq 0$, 如果对任意实数y, $\lim\limits_{x\to\infty}\overline{F}(x-y)/\overline{F}(x)=e^{ry}$并且$\lim\limits_{x\to\infty}\overline{F^{2*}}(x)/\overline{F}(x)=2\int_{0-}^{\infty}e^{\gamma y}F(\mathrm{d}y)$极限存在且有限, 记作$F\in\mathcal{S}(\gamma)$.

定义 2.3 设F是定义在$[0,\infty)$上的分布函数, 对任意的$y>1$有$\lim\limits_{x\to\infty}\overline{F}(xy)/\overline{F}(x)=0$, 则称$F$属于$\mathcal{R}_{-\infty}$.

下面引述若干引理:

引理 2.1[9] 设$\{X_k,k=1,2,\ldots\}$为一列独立同分布的非负随机变量列, 具有共同的分布F且$F\in\Im$, $\{\sigma_k,k=1,2,\ldots\}$为一列非负的随机变量序列, 满足对某个$0<a\leq b<\infty$及所有的$1\leq k\leq n$有$\mathsf{P}(a\leq\sigma_k\leq b)=1$, 并且这两个序列之间相互独立, 则有

$$\mathsf{P}\Big(\sum_{k=1}^{n}\sigma_kX_k>x\Big)\sim\sum_{k=1}^{n}\mathsf{P}(\sigma_kX_k>x).$$

引理 2.2[10] 设F,F_1,F_2为定义在$[0,\infty)$上的分布函数, $F\in\mathcal{S}(\gamma)$且$l_i=\lim\limits_{x\to\infty}\overline{F_i}(x)/\overline{F}(x)$

存在并有限, $i=1,2$, 则

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\overline{F_1*F_2}(x)}{\overline{F}(x)}=l_1\int_{0-}^{\infty}e^{\gamma y}F_2(\mathrm{d}y)+l_2\int_{0-}^{\infty}e^{\gamma y}F_1(\mathrm{d}y).$$

引理 2.3[11]　设F为定义在$[0,\infty)$上的分布函数, 如果$F\in\mathcal{S}(\gamma)$, 则对任意的$n=1,2,\ldots$, 有

$$\overline{F^{n*}}(x)\sim n\Big(\int_{0-}^{\infty}e^{\gamma y}F(\mathrm{d}y)\Big)^{n-1}\overline{F}(x).$$

引理 2.4[12]　设$\{N_t,t\geq 0\}$为一更新过程, 对应的来到时间间隔$\{\theta_k,k\geq 1\}$为一列独立同分布的随机变量, 具有共同的分布H, 显然第n个更新发生的时刻$T_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\theta_k$的分布$H_n$就是$H$的自身的$n$重卷积, 令$m(t)=\mathsf{E}N_t$称为更新函数, 则有$m(t)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}H_n(t)$.

§3.　主要结果和证明

如我们在第二节所言, 研究重尾分布下更新风险模型的渐近行为在保险实务操作中具有较大地参考价值, 是值得研究的问题. 同时, 由于对于重尾分布的模型下, 其破产概率的解析表达式是很难得到的, 因此, 在数学上讨论其渐近行为也是非常有意思的. 在本节我们主要给出了带有常值力的更行风险模型在理赔为重尾分布的情况下, 起破产概率的渐近表达式. 这些表达式从理论上为我们研究破产概率的渐近行为提供了可能, 而且利用渐近表达式, 我们可以比较方便地实现我们所研究的破产概率的渐近行为的随机模拟.

定理 3.1　在带有常数利息力的更新风险模型中, 索赔次数$\{N_t,t\geq 0\}$为一更新过程, $m(t)$为其更新函数, 并且索赔额序列$\{X_k,k\geq 1\}$与$\{N_t,t\geq 0\}$相互独立, 如果$F\in\Im\cap\mathcal{S}(\gamma)$, 则对任意的$t>0$, 有

$$\psi(x,t)\sim\int_0^t e^{-\gamma(c/\delta)e^{\delta y}}\mathsf{P}(X_1e^{-\delta y}>x)\mathrm{d}m(y).$$

证明:　由(2.3)式,

$$\begin{aligned}\psi(x,t)&=\mathsf{P}\Big(\sum_{k=1}^{N_t}X_k\prod_{i=1}^{k}Y_i>x+\frac{c}{\delta}\Big)\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\mathsf{P}\Big(\sum_{k=1}^{N_t}X_k\prod_{i=1}^{k}Y_i>x+\frac{c}{\delta}\Big|N_t=n\Big)\mathsf{P}(N_t=n),\end{aligned}$$

因为$\prod\limits_{i=1}^{k}Y_i=e^{-\delta T_k}$, 在给定的$N_t=n$条件下索赔额序列$\{X_k,k\geq 1\}$与来到时刻序列$\{T_k,k\geq 1\}$相互独立, 又注意到对每个$1\leq k\leq n$, 都有$e^{-\delta T_k}\in[e^{-\delta t},1]$, 由引理2.1, 有

$$\begin{aligned}\psi(x,t)&\sim\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{n}\mathsf{P}\Big(X_ke^{-\delta T_k}>x+\frac{c}{\delta}\Big)\mathsf{P}(N_t=n)\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{n}\mathsf{P}\Big(X_ke^{-\delta T_k}>x+\frac{c}{\delta},N_t=n\Big),\end{aligned}$$

注意到第n个索赔在时刻t或之前发生当且仅当时刻t已发生的索赔数目至少是n, 即$\{N_t \geq n\} \Longleftrightarrow T_n \leq t$.

$$
\begin{aligned}
\psi(x,t) &\sim \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=k}^{\infty} \mathsf{P}\Big(X_k e^{-\delta T_k} > x+\frac{c}{\delta}, N_t = n\Big)\\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \mathsf{P}\Big(X_k e^{-\delta T_k} > x+\frac{c}{\delta}, N_t \geq k\Big)\\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \mathsf{P}\Big(X_k e^{-\delta T_k} > x+\frac{c}{\delta}, T_k < t\Big)\\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^t \mathsf{P}\Big(Xe^{-\delta y} > x+\frac{c}{\delta}\Big)\mathrm{d}H_k(y)\\
&= \int_0^t \mathsf{P}\Big(Xe^{-\delta y} > x+\frac{c}{\delta}\Big)\mathrm{d}\Big(\sum_{k=1}^{\infty} H_k(y)\Big)\\
&= \int_0^t \mathsf{P}\Big(Xe^{-\delta y} > x+\frac{c}{\delta}\Big)\mathrm{d}m(y),
\end{aligned}
$$

又$F \in \mathcal{S}(\gamma)$,

$$
\lim_{x\to\infty} \mathsf{P}\Big(X > xe^{\delta y} + \frac{c}{\delta}e^{\delta y}\Big)\Big/\mathsf{P}(X > xe^{\delta y}) = e^{-\gamma(c/\delta)e^{\delta y}}.
$$

所以有

$$
\psi(x,t) \sim \int_0^t e^{-\gamma(c/\delta)e^{\delta y}}\mathsf{P}(Xe^{-\delta y} > x)\mathrm{d}m(y). \qquad \Box
$$

定理3.2给出了文献[8]所没有提到的有限时间内的绝对破产概率的渐近表达式.

定理 3.2 在带有常数利息力的更新风险模型中, 索赔额序列$\{X_k, X, k=1,2,\ldots\}$为一列独立同分布的非负随机变量列, 具有共同的分布$F(x)$, 如果$F \in \mathcal{S}(\gamma)\cap\mathcal{R}_{-\infty}$, 则

$$
\psi(x,t) \sim \mathsf{E}e^{\gamma\sum\limits_{k=2}^{N_t} X_k \prod\limits_{i=2}^{k} Y_i}\mathsf{P}\Big(X_1Y_1 > x+\frac{c}{\delta}\Big),
$$

其中$Y_i = e^{-\delta\theta_i}$, $\{Y_i, Y, i=1,2,\ldots\}$为独立同分布的非负随机变量列且共同的分布为G.

证明: 由(2.3)式,

$$
\begin{aligned}
\psi(x,t) &= \mathsf{P}\Big(\sum_{k=1}^{N_t} X_k\prod_{i=1}^{k} Y_i > x+\frac{c}{\delta}\Big)\\
&= \mathsf{P}\Big(X_1Y_1 + \sum_{k=2}^{N_t} X_k\prod_{i=2}^{k} Y_iY_1 > x+\frac{c}{\delta}\Big)\\
&= \mathsf{P}\Big(\Big(X_1 + \sum_{k=2}^{N_t} X_k\prod_{i=2}^{k} Y_i\Big)Y_1 > x+\frac{c}{\delta}\Big)\\
&= \int_0^1 \mathsf{P}\Big(X_1 + \sum_{k=2}^{N_t} X_k\prod_{i=2}^{k} Y_i > \Big(x+\frac{c}{\delta}\Big)\Big/y\Big)G(\mathrm{d}y),
\end{aligned}
$$

又

$$\mathsf{P}\Big(\sum_{k=2}^{N_t} X_k \prod_{i=2}^{k} Y_i > x\Big) \leq \mathsf{P}\Big(\sum_{k=2}^{N_t} X_k Y > x\Big) = \int_0^1 \mathsf{P}\Big(\sum_{k=2}^{N_t} X_k > \frac{x}{y}\Big) G(\mathrm{d}y),$$

由引理2.3,

$$\begin{aligned}\mathsf{P}\Big(\sum_{k=2}^{N_t} X_k > \frac{x}{y}\Big) &\sim (N_t-1)\Big(\int_{0-}^{\infty} e^{\gamma y} F(\mathrm{d}y)\Big)^{N_t-2} \overline{F}\Big(\frac{x}{y}\Big)\\ &= (N_t-1)(\mathsf{E}e^{\gamma X})^{N_t-2}\overline{F}\Big(\frac{x}{y}\Big),\end{aligned}$$

又$F \in \mathcal{R}_{-\infty}$, 所以$\lim\limits_{x\to\infty} \overline{F}(xy)/\overline{F}(x) = 0$, $y > 1$, 即$\overline{F}(xy) = \circ(\overline{F}(x))$, 可以得到$\overline{F}(x/y) = \circ(\overline{F}(x))$. 所以

$$\mathsf{P}\Big(\sum_{k=2}^{N_t} X_k \prod_{i=2}^{k} Y_i > x\Big) \lesssim (N_t-1)(\mathsf{E}e^{\gamma X})^{N_t-2} \int_0^1 \mathsf{P}\Big(X > \frac{x}{y}\Big) G(\mathrm{d}y) = \circ(\overline{F}(x)),$$

可以推出

$$\lim_{x\to\infty} \mathsf{P}\Big(\sum_{k=2}^{N_t} X_k \prod_{i=2}^{k} Y_i > x\Big)\Big/\overline{F}(x) = 0, \qquad \lim_{x\to\infty} \mathsf{P}(X_1 > x)/\overline{F}(x) = 1,$$

应用引理2.2

$$\begin{aligned}&\mathsf{P}\Big(X_1 + \sum_{k=2}^{N_t} X_k \prod_{i=2}^{k} Y_i > \Big(x+\frac{c}{\delta}\Big)\Big/y\Big)\\ \sim\ & \Big(1\cdot\int_{0-}^{\infty} e^{\gamma y} F_2(\mathrm{d}y) + 0\cdot\int_{0-}^{\infty} e^{\gamma y} F_1(\mathrm{d}y)\Big)\overline{F}\Big(\Big(x+\frac{c}{\delta}\Big)\Big/y\Big)\\ =\ & \int_{0-}^{\infty} e^{\gamma y} F_2(\mathrm{d}y)\overline{F}\Big(\Big(x+\frac{c}{\delta}\Big)\Big/y\Big) = \mathsf{E}e^{\gamma\sum\limits_{k=2}^{N_t} X_k \prod\limits_{i=2}^{k} Y_i}\,\overline{F}\Big(\Big(x+\frac{c}{\delta}\Big)\Big/y\Big),\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}\psi(x,t) &\sim \mathsf{E}e^{\gamma\sum\limits_{k=2}^{N_t} X_k \prod\limits_{i=2}^{k} Y_i}\int_0^1 \overline{F}\Big(\Big(x+\frac{c}{\delta}\Big)\Big/y\Big) G(\mathrm{d}y)\\ &= \mathsf{E}e^{\gamma\sum\limits_{k=2}^{N_t} X_k \prod\limits_{i=2}^{k} Y_i}\,\mathsf{P}\Big(XY > x+\frac{c}{\delta}\Big). \qquad\square\end{aligned}$$

特别地, 假设索赔额序列$\{X_k, k=1,2,\ldots\}$服从参数为λ的指数分布, 时间间隔θ_k为单位时间, $k=1,2,\ldots$, 则$Y_i = e^{-\delta\theta_i} = e^{-\delta}$, 我们有

$$\mathsf{P}\Big(X_1Y_1 > x+\frac{c}{\delta}\Big) = \mathsf{P}\Big(X_1 > e^{\delta}\Big(x+\frac{c}{\delta}\Big)\Big) = e^{-\lambda e^{\delta}(x+c/\delta)}.$$

也就是说$\psi(x,t)$是符合Lundberg-Crámer经典风险模型中的L-C近似.

致谢 作者衷心感谢匿名审稿人的修改意见和写作指导, 他们的意见大大地提高了本文的语言表达和数学规范.

参 考 文 献

[1] 吴荣, 杜勇宏, 常利率下的更新风险模型, 工程数学学报, **19(1)**(2002), 46–54.

[2] 郭军义, 张春生, 具有时间相依索赔的破产概率, 南开大学学报(自然科学版), **36(1)**(2003), 28–32.

[3] 胡太忠, 随机变量的负超可加相依及其应用, 应用概率统计, **16(2)**(2000), 133–144.

[4] 汪荣明, 程宗毛, 王静龙, 破产时刻罚金折现期望值的更新方程及应用, 华东师范大学学报(自然科学版), **3**(2001), 25–32.

[5] 王过京, 吴荣, 带干扰风险模型中破产概率的Feller表示及可微性, 应用数学学报, **23(3)**(2000), 337–341.

[6] 陈昱, 苏淳, 有利息力情形下的有限时间破产概率, 中国科学技术大学学报, **36(9)**(2006), 909–916.

[7] Hou, Z.T., Markov skeleton processes and applications to queueing systems, *Acta Mathematicae Applicatae Sinica, English Series*, **18(4)**(2002), 537–552.

[8] Konstantinides, D.G., Ng, K.W. and Tang, Q., The probabilities of absolute ruin in the renewal risk model with constant force of interest, *Journal of Applied Probability*, **47(2)**(2010), 323–334.

[9] Tang, Q. and Tsitsiashvili, G., Randomly weighted sums of subexponential random variables with application to ruin theory, *Extremes*, **6(3)**(2003), 171–188.

[10] Rogozin, B.A. and Sgibnev, M.S., Banach algebras of measures on the real axis with the given asymptotics of distributions at infinity, *Siberian Mathematical Journal*, **40(3)**(1999), 565–576.

[11] Chover, J., Ney, P. and Wainger, S., Degeneracy properties of subcritical branching processes, *The Annals of Probability*, **1(4)**(1973), 663–673.

[12] 严颖, 成世学, 程侃, 运筹学随机模型, 中国人民大学出版社, 1995.

The Asymptotic Estimate of Absolute Ruin Probabilities in the Renewal Risk Model with Constant Force of Interest

Wang Jingjing

(*School of Mathematics and Statistics, Suzhou Univeristy, Suzhou, 234000*)

Zhu Dongjing　　Qian Wenying

(*School of Mathematics and Computer Science, Anhui Normal Univeristy, Wuhu, 241003*)

In this paper, absolute ruin problems for a kind of renewal risk model with constant interest force are studied. For certain situations of the claim distribution with heavy tail, consider the surplus of the arrival time, and discrete the surplus process, then use the method of renewal function and convolution, we present the asymptotic properties of absolute ruin probability when the initial surplus tends to infinity.

Keywords: Absolute ruin probability, constant force of interest, renewal risk model, asymptotic estimate.

AMS Subject Classification: 60K05, 62P05, 90A46.