生灭过程的轨道结构

赵晓晶
(安阳工学院数理学院, 安阳, 450007)

阎国军
(郑州大学数学系, 郑州, 450001)

摘　要

本文中我们给出了生灭过程的轨道结构, 指出轨道结构与构造理论之间的一一对应关系, 并且利用Ito游程理论说明构造理论中各个参数的概率含义.

关键词: 生灭过程, Martin流出边界, Ray-Knight紧化, 右过程, 正则点, Ito游程理论.

学科分类号: O211.62.

§1. 引　　言

设$E=\{0,1,2,\ldots\}$, $b_0,b_1,\ldots$, $a_1,a_2,\ldots$都是正数, $a_0\geq 0$,

$$q_{ij}=\begin{cases} b_i, & \text{如果 } j=i+1;\\ -(a_i+b_i), & \text{如果 } j=i;\\ a_i, & \text{如果 } j=i-1,\ i\geq 1;\\ 0, & \text{其它情形,}\end{cases}$$

E上的矩阵$Q=(q_{ij})$称为生灭矩阵. 如果$a_0=0$, 则Q是保守的, 如果$a_0>0$, 则Q有一个非保守状态. 密度矩阵为Q的过程称为生灭过程.

由于$\lambda I-Q$是三对角阵, 所以方程组$(\lambda I-Q)u=0$最多只有一个线性无关解, 从而Q最多只有一个Martin积极流出边界. 同样, 由于$v(\lambda-Q)=0$最多只有一个线性无关解, Q最多只有一个Martin积极流入边界.

令

$$\begin{cases} z_0=\begin{cases}\dfrac{1}{a_0}, & \text{if } a_0>0;\\ 0, & \text{if } a_0=0,\end{cases}\\ z_1=z_0+\dfrac{1}{b_0},\\ \cdots\cdots\\ z_n=z_0+\dfrac{1}{b_0}+\cdots\dfrac{a_1a_2\cdots a_{n-1}}{b_0b_1\cdots b_{n-1}}.\end{cases} \tag{1.1}$$

本文2010年10月9日收到, 2012年9月3日收到修改稿.

z_n, $n=0,1,2,\ldots$称为Q的自然尺度. 令

$$\mu_0=1,\qquad \mu_n=\frac{b_0b_1\cdots b_{n-1}}{a_1\cdots a_{n-1}a_n}, \tag{1.2}$$

μ_n, $n=0,1,2,\ldots$称为Q的标准测度. 令

$$z=\lim_{n\to\infty}z_n,\qquad R=\sum_{k=0}^{\infty}\mu_k(z-z_k),\qquad S=\sum_{k=0}^{\infty}z_k\mu_k. \tag{1.3}$$

定义 1.1 称Q是流出的, 如果$R<\infty$, $S=\infty$; 称Q是流入的, 如果$R=\infty$, $S<\infty$; 称Q是正则的, 如果$R<\infty$, $S<\infty$; 称Q是自然的, 如果$R=\infty$, $S=\infty$.

按照W. Feller的看法, 如果把E的一点紧化$E\cup\{\infty\}$看成半直线$[0,\infty]$, 把生灭过程看成是一维扩散, 流出指的是从任意的$i\in E$出发, 在有限时间内可以达到∞, 但不能从∞流入E中; 流入指的是从∞出发, 可以"连续地"流入E中(参考3.2节中的图形), 但从$i\in E$出发, 不可能在有限时间内到达∞; 自然指的是既不能从∞出发"连续地"流入E中, 又不能从$i\in E$出发在有限时间内到达∞; 正则指的是既能从∞出发"连续地"流入E中, 又能从$i\in E$出发在有限时间内到达∞.

在[1]中, 王梓坤教授用"极限过渡法"系统论述了$a_0=0$情形下的生灭过程的构造问题, 并且给出了特征数等概率参数. 在[2]中杨向群教授用分析法系统论述了一般情况下生灭过程的构造问题, 并讨论了它的飞跃区间, U-区间, 遍历性等概率性质. 但对于生灭过程的轨道结构, 尤其是对于生灭矩阵Q不满足Q-过程唯一性准则时的轨道结构, 一直没有系统和完整的叙述. 在本文中, 我们利用他们的结果和Markov过程的一般理论来刻画生灭过程的轨道结构, 并且说明轨道结构与构造理论之间的联系, 并且用Ito游程理论来说明构造理论中各个量的概率意义.

§2. Markov链的Ray-Knight方法

设E如上, $p_{ij}(t)$是E上诚实的转移函数, $R_{ij}(\lambda)$是$p_{ij}(t)$的预解式. E上所有有界函数组成的集合记作$\mathcal{M}$, $\mathcal{M}$上的范数定义为

$$\|f\|=\sup_{i\in E}|f(i)|.$$

对于任意的$f\in\mathcal{M}$, 函数$i\mapsto\sum\limits_{k\in E}R_{ik}(\lambda)f(k)$记作$R_\lambda f$, 显然$R_\lambda$是$\mathcal{M}$上的线性算子并且$\|R_\lambda\|=1/\lambda$.

对于任意的$\mathcal{G}\subset\mathcal{M}$, 令

$$\mathcal{U}(\mathcal{G})=\Big\{\sum_{i=1}^{n}a_iR_{\lambda_i}f_i\Big|n\in\mathbb{N},\ \lambda_i>0,\ a_i\geq0,\ f_i\in\mathcal{G},\ \forall i\leq n\Big\},$$
$$\bigwedge(\mathcal{G})=\{f_1\wedge\cdots\wedge f_n|n\in\mathbb{N},\ f_1,\ldots,f_n\in\mathcal{G}\}.$$

取$\mathcal{G}$的可数子集$\mathcal{H}=\{I_{\{k\}}(\cdot)|k\in E\}\cup\{1\}$, 令

$$\mathcal{R}^{(1)}=\mathcal{U}(\mathcal{H}),\qquad \mathcal{R}^{(n+1)}=\bigwedge(\mathcal{R}^{(n)}+\mathcal{U}(\mathcal{R}^{(n)})),\qquad \mathcal{R}=\bigcup_{n=1}^{\infty}\mathcal{R}^{(n)}.$$

取$\mathcal{R}$的稠密子集$\{g_m\}_{m=1}^{\infty}$, 令

$$d(x,y)=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{2^m}\cdot[|g_m(x)-g_m(y)|\wedge 1],\qquad \forall x,y\in S, \tag{2.1}$$

则$d(\cdot,\cdot)$是E上的度量, E在$d(\cdot,\cdot)$下的完备化记作$\overline{E}$, 显然E是一个紧度量空间, 称为E的Ray-Knight紧化.

由[6] p.303-320, $R_{ij}(\lambda)$可以扩张成$\overline{E}$上的Ray预解式$U^{\alpha}(x,\mathrm{d}y)$, $U^{\alpha}(x,\mathrm{d}y)$对应的Ray半群记作$P_t(x,\mathrm{d}y)$. 令

$$D=\{x|x\in\overline{E},P_0(x,\cdot)=\delta_x(\cdot)\},$$

D称为非分支点集, D中的点称为非分支点.

$E_R=\{x|x\in\overline{E},U^1(x,E)=1\}$, $E^+=E_R\cap D$. E^+上的Borel代数记作$\mathcal{E}$, 由[6] p.303-320, 我们有

定理 2.1 存在取值于$(E^+,\mathcal{E})$的强Markov过程$X=(\Omega,\mathcal{F},\mathcal{F}_t,X_t,\theta_t,\mathsf{P}^x)$, 使得

(1) $\{\mathcal{F}_t\}$和$\{X_t\}$都是右连续的, $\{X_t\}$在E_R中有左极限;

(2) X的转移函数为$P_t(x,\mathrm{d}y)$;

(3) 对于任意的$x\in E^+$, $\mathsf{P}^x\{X_0=x\}=1$;

(4) 任给$(E^+,\mathcal{E})$上的概率测度μ, $\Gamma\in\mathcal{E}$以及一列$\{\mathcal{F}_t\}$停时T, $T^{(n)}$, $n=1,2,\ldots$, $T^{(n)}\uparrow T$, 并且在$\{T<\infty\}$上$T^{(n)}<T$,

$$\mathsf{P}^{\mu}\Big\{X_T\in\Gamma\Big|\bigvee_n\mathcal{F}_{T^{(n)}}\Big\}I_{\{T<\infty\}}=P_0(X_{T-},\Gamma)I_{\{T<\infty\}},$$

这里$\mathsf{P}^{\mu}\{\cdot\}=\displaystyle\int_{E^+}\mu(\mathrm{d}x)\mathsf{P}^x\{\cdot\}$;

(5) 对于任意$\alpha>0$以及$(P_t)_{t\geq0}$的α-过分函数f, $\{f(X_t)\}$是几乎必然右连续的.

$X=(\Omega,\mathcal{F},\mathcal{F}_t,X_t,\theta_t,\mathsf{P}^x)$称为$p_{ij}(t)$对应的*右过程*.

注记 1 在Markov链的一些经典著作中, 对于给定的E上的转移函数$p_{ij}(t)$, 通常的做法是构造取值于$E\cup\{\infty\}$的典范链. 典范链的状态空间非常简单, 但它的轨道却只具有右下半连续性, 而且仅仅保持部分的强Markov性(参考[1]第三章第二节定理5以及第三节定理1). 应用Ray-Knight方法所得到的$X=(\Omega,\mathcal{F},\mathcal{F}_t,X_t,\theta_t,\mathsf{P}^x)$能够克服典范链的这些缺陷, 但缺点是状态空间的结构可能非常复杂.

注记 2 设$Q=(q_{ij})$是$p_{ij}(t)$的密度矩阵, $q_i=-q_{ii}$. 如果i是稳定态, 即$q_i<\infty$, 则对于右过程$X=(\Omega,\mathcal{F},\mathcal{F}_t,X_t,\theta_t,\mathsf{P}^x)$来说, $\mathsf{P}^i\{T>t\}=e^{-q_it}$, $\mathsf{P}^i\{X_T=j\}=q_{ij}/q_i$, 其中$T=\inf\{s|X_s\neq X_0\}$.

§3. Ray-Knight方法在生灭过程方面的应用

生灭矩阵Q对应的最小转移函数记作$p_{ij}^{\min}(t)$, 最小预解式记作$R_{ij}^{\min}(\lambda)$. 设$X^{\min}=\{X_t^{\min},t<\sigma\}$是$p_{ij}^{\min}(t)$对应的最小过程, σ为中断时间, 条件概率$\mathsf{P}\{\cdot|X_0^{\min}=i\}$记作$\mathsf{P}^i\{\cdot\}$. 对于任意的$k\in E$, 令$\sigma_k=\inf\{t|X_t^{\min}=k,t<\sigma\}$.

在本文中, $i\to\infty$表示通常的极限, 即非负整数列$i=0,1,2,3,\ldots$的极限, 而$i\Rightarrow x$表示在Ray-Knight拓扑下i收敛于x, 请读者注意这种区别. 由于$i=0,1,2,3,\ldots$通常也是Ray-Knight拓扑下的Cauchy列, 所以$i\to\infty$和$i\Rightarrow x$是等价的.

在Ray-Knight拓扑下的极限我们记作$R-\lim$.

3.1 $a_0=0$, Q是自然或流入的情形

设$a_0=0$. 由[1]第四章§1可知生灭过程唯一的充分必要条件是$R=\infty$, 即流入和自然情形. 这时最小转移函数$p_{ij}^{\min}(t)$是诚实的.

对于任意的$i\in E$, 令$x_i=\mathsf{E}^i\{e^{-\lambda\sigma_0}\}$. 由[3] p.123定理9.3.1, $x=(x_i,i\in E)^T$是方程组$(\lambda I-Q)u=0$使得$u_0=1$的最小非负解. 当$i>k$时, 在$\mathsf{P}^i\{\cdot\}$下, 由于$X_\cdot^{\min}$在σ_0之前必须经过k,

$$x_i=\mathsf{E}^i\{e^{-\lambda\sigma_0}\}=\mathsf{E}^i\{e^{-\lambda(\sigma_0\circ\theta_{\sigma_k}+\sigma_k)}\}=\mathsf{E}^i\{e^{-\lambda\sigma_k}\}\mathsf{E}^k\{e^{-\lambda\sigma_0}\}=\mathsf{E}^i\{e^{-\lambda\sigma_k}\}x_k\le x_k,$$

所以u_i随着i的减小而增大, 并且$\mathsf{E}^i\{e^{-\lambda\sigma_k}\}=x_i/x_k$.

(一) 当Q自然时, 由[2] p.110定理2, $\lim\limits_{i\to\infty}x_i=0$, 所以

$$\lim_{i\to\infty}R_{i0}^{\min}(\lambda)=\lim_{i\to\infty}\mathsf{E}^i\{e^{-\sigma_0}\}R_{00}^{\min}(\lambda)=0,$$

同理对于任意的$k\in E$, $\lim\limits_{i\to\infty}R_{ik}^{\min}(\lambda)=0$.

容易看出, 对于E上任意的函数$f(i)$, $\lim\limits_{i\to\infty}f(i)=0$, 皆有$\lim\limits_{i\to\infty}\sum\limits_{k\in E}R_{ik}^{\min}(\lambda)f(k)=0$, 因此$E$在$p_{ij}^{\min}(t)$下的Ray-Knight紧化为一点紧化$E\cup\{\partial\}$,

$$U^\lambda(\partial,\{k\})=\lim_{i\Rightarrow\partial}R_{ik}^{\min}(\lambda)=\lim_{i\to\infty}R_{ik}^{\min}(\lambda)=0,$$

即$E_R=E$. 从定理2.1可知右过程$X=(\Omega,\mathcal{F},\mathcal{F}_t,X_t,\theta_t,\mathsf{P}^x)$即为在通常意义下$p_{ij}^{\min}(t)$所决定的Markov链.

(二) 当Q流入时, 由[2] p.110定理2, $x_\infty=\lim\limits_{i\to\infty}x_i>0$, 所以

$$\lim_{i\to\infty}R_{ik}^{\min}(\lambda)=\lim_{i\to\infty}\mathsf{E}^i\{e^{-\sigma_k}\}R_{kk}^{\min}(\lambda)=\frac{x_\infty}{x_k}R_{kk}^{\min}(\lambda)>0.$$

对于E上任意的函数$f(i)$, $\lim\limits_{i\to\infty}f(i)=c$, 皆有$\lim\limits_{i\to\infty}\sum\limits_{k\in E}R_{ik}^{\min}(\lambda)f(k)=c$, 因此$E$在$p_{ij}^{\min}(t)$下的Ray-Knight紧化为一点紧化$E\cup\{\partial\}$.

对于任意的$k\in E$,

$$U^\lambda(\partial,\{k\})=\lim_{i\Rightarrow\partial}R_{ik}^{\min}(\lambda)=\lim_{i\to\infty}R_{ik}^{\min}(\lambda)=\frac{x_\infty}{x_k}R_{kk}^{\min}(\lambda)>0.$$

另外, 对于任意的$i,j,k\in E$, $i>j$, 由于

$$\begin{aligned}R_{ik}^{\min}(\lambda)&=\mathsf{E}^i\Big[\int_0^\infty e^{-\lambda t}I_{\{k\}}(X_t)\mathrm{d}t\Big]\ge\mathsf{E}^i\Big[\int_{\sigma_j}^\infty e^{-\lambda t}I_{\{k\}}(X_t)\mathrm{d}t\Big]\\&=\mathsf{E}^i\Big\{e^{-\lambda\sigma_i}\Big[\int_0^\infty e^{-\lambda t}I_{\{k\}}(X_t)\mathrm{d}t\Big]\circ\theta_{\sigma_j}\Big\}=\mathsf{E}^i[e^{-\lambda\sigma_j}]R_{jk}^{\min}(\lambda)\\&=\frac{u_i}{u_j}R_{jk}^{\min}(\lambda),\end{aligned}$$

令$i\to\infty$, 立得$U^\lambda(\partial,\{k\})\ge(u_\infty/u_j)R_{jk}^{\min}(\lambda)$. 所以

$$\sum_{k\in E}U^\lambda(\partial,\{k\})\ge\frac{u_\infty}{u_j}\sum_{k\in E}R_{jk}^{\min}(\lambda)=\frac{u_\infty}{\lambda u_j}.$$

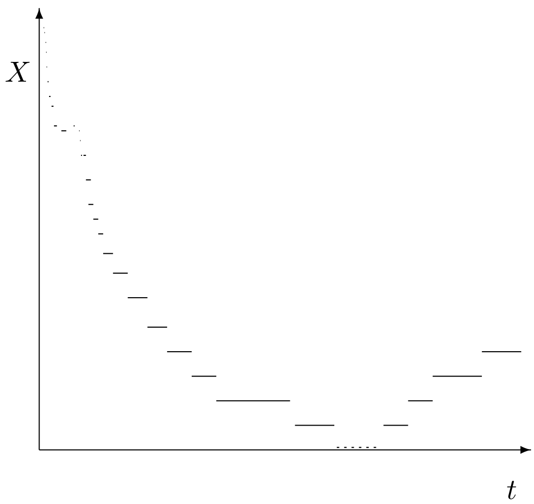
令$j\to\infty$, 立得$\sum\limits_{k\in E}U^\lambda(\partial,\{k\})\ge1/\lambda$. 从而有$\sum\limits_{k\in E}U^1(\partial,\{k\})=1$, 即$\partial\in E_R$. 此外, 对于任意的$k\in E$, 取$m>k$, 由于

$$U^\lambda(\partial,\{k\})=\frac{x_\infty}{x_k}R_{kk}^{\min}(\lambda)=\frac{x_\infty}{x_m}\mathsf{E}^m\{e^{-\lambda\sigma_k}\}R_{kk}^{\min}(\lambda)\le\mathsf{E}^m\{e^{-\lambda\sigma_k}\}R_{kk}^{\min}(\lambda)=R_{mk}^{\min}(\lambda),$$

所以

$$P_0(\partial,\{k\})=\lim_{\lambda\to\infty}\lambda U^\lambda(\partial,\{k\})\le\lim_{\lambda\to\infty}\lambda R_{mk}^{\min}(\lambda)=0,$$

即∞不是分支点, $E^+=E\cup\{\partial\}$. 由于Ray半群$P_t(x,\mathrm{d}y)$限制在E上即为$p_{ij}^{\min}(t)$, 所以当$x\in E$时, 在$\mathsf{P}^x\{\cdot\}$下, $\{X_t\}$永远停留在E中, $\{X_t\}$即为通常意义下$p_{ij}^{\min}(t)$决定的Markov链. 在$\mathsf{P}^\partial\{\cdot\}$下, $\{X_t\}$自∂很快"流入"E中, 然后永远停留在E中, 又因为$X_\cdot$是右连续的, 由定理2.1中的(3), 所以$R-\lim\limits_{t\downarrow0}X_t=\partial$.



在$\mathsf{P}^\partial\{\cdot\}$下$\{X_t\}_{t\ge0}$的轨道如上图所示.

3.2 $a_0 = 0$, Q是流出或正则的情形

这时$R < \infty$.

令$u_i = \mathsf{E}^i\{e^{-\sigma}\}$, 由[2] p.36定理5可知$u = (u_i, i \in E)^T$是方程组$(\lambda I - Q)u = 0$的最大围1解. 当$i < k$时, 在$\mathsf{P}^i\{\cdot\}$下, 由于$X^{\min}_{\cdot}$在$\sigma$之前必须经过$k$,

$$u_i = \mathsf{E}^i\{e^{-\lambda\sigma}\} = \mathsf{E}^i\{e^{-\lambda(\sigma\circ\theta_{\sigma_k}+\sigma_k)}\} = \mathsf{E}^i\{e^{-\lambda\sigma_k}\}\mathsf{E}^k\{e^{-\lambda\sigma}\} = \mathsf{E}^i\{e^{-\lambda\sigma_k}\}u_k \leq u_k,$$

所以u_i随着i的增大而增大.

由[2] p.110定理1, 这时$u_i = \mathsf{E}^i\{e^{-\sigma}\} > 0$, 即方程组$(\lambda I - Q)u = 0$有非平凡解, 此外, 由于$u = (u_i, i \in E)^T$是方程组$(\lambda I - Q)u = 0$的最大围1解, 所以$\lim\limits_{i\to\infty} u_i = 1$. 由于$(\lambda I - Q)$是三对角阵, 所以这时$(\lambda I - Q)u = 0$只有一个线性无关解, 由[2] p.188定理3, Q的Martin积极流出边界只有一个, 即Q是单流出的.

由[1], $R = \mathsf{E}^0\{\sigma\} < \infty$, $X^{\min}_{\cdot}$从0出发必须经过其它状态才能达到∞, 故$X^{\min}_{\cdot}$以概率1在有限时间内"爆炸".

由[2] p.49定理1, 生灭过程的诚实的预解式$R_{ij}(\lambda)$有如下形式:

$$R_{ij}(\lambda) = R^{\min}_{ij}(\lambda) + \mathsf{E}^i\{e^{-\lambda\sigma}\}\frac{\sum\limits_{k\in E} c_k R^{\min}_{kj}(\lambda) + \eta_j(\lambda)}{\lambda\Big[\sum\limits_{m\in E}\Big[\sum\limits_{k\in E} c_k R^{\min}_{km}(\lambda) + \eta_m(\lambda)\Big]\Big]}, \tag{3.1}$$

其中c_k, $k \in E$是一组非负常数, $\eta_k(\lambda)$满足方程组

$$\begin{cases} v(\lambda I - Q) = 0, \\ \sum\limits_{k\in E} v_k < \infty, \end{cases} \tag{3.2}$$

并且$\sum\limits_{m\in E}\Big[\sum\limits_{k\in E} c_k R^{\min}_{km}(1) + \eta_m(1)\Big] = 1$.

如果Q是流出的, 由[2] p.119引理4, 方程组(3.2)只有零解; 当Q是正则时, 方程组(3.2)有非平凡解, 这时取(3.2)的解$\overline{\eta}_j(\lambda)$使得$\sum\limits_{m\in E} \overline{\eta}_m(1) = 1$. 由于$(\lambda I - Q)$是三对角阵, 所以这时$(\lambda I - Q)u = 0$只有一个线性无关解, 从而存在常数$d$使得$\eta_j(\lambda) = d\overline{\eta}_j(\lambda)$.

定理 3.1 设Q是流出或正则的, $k_0 \in E$使得$c_k = 0$, $\forall\, k \neq k_0$, $\eta_j(\lambda) = 0$, 则$R_{ij}(\lambda)$所诱导的Ray-Knight紧化为E, k_0是E在Ray-Knight拓扑下的唯一的聚点. 这时$R_{ij}(\lambda)$是(Q, δ_{k_0})型Doob过程.

证明: 显然对于任意的$j \in E$,

$$R_{k_0j}(\lambda) = R^{\min}_{k_0j}(\lambda) + \mathsf{E}^{k_0}\{e^{-\lambda\sigma}\}\frac{R^{\min}_{k_0j}(\lambda)}{1 - \mathsf{E}^{k_0}\{e^{-\lambda\sigma}\}} = \frac{R^{\min}_{k_0j}(\lambda)}{1 - \mathsf{E}^{k_0}\{e^{-\lambda\sigma}\}}.$$

由于

$$R_{ij}^{\min}(\lambda)=\mathsf{E}^i\Big[\int_0^\sigma e^{-\lambda t}I_{\{j\}}(X_t^{\min})\mathrm{d}t\Big]\le \mathsf{E}^i\{1-e^{-\lambda\sigma}\}=1-u_i,$$

所以 $\lim\limits_{i\to\infty}R_{ij}^{\min}(\lambda)=0$, $\lim\limits_{i\to\infty}\mathsf{E}^i\{e^{-\lambda\sigma}\}=1$, 从而

$$\lim_{i\to\infty}R_{ij}(\lambda)=\frac{R_{k_0j}^{\min}(\lambda)}{1-\mathsf{E}^{k_0}\{e^{-\lambda\sigma}\}}=R_{k_0j}(\lambda).$$

对于E上任意的函数$f(i)$, $\lim\limits_{i\to\infty}f(i)=f(k_0)$, 易知皆有$\lim\limits_{i\to\infty}\sum\limits_{k\in E}R_{ik}^{\min}(\lambda)f(k)=f(k_0)$, 因此$E$在$p_{ij}^{\min}(t)$下的Ray-Knight紧化为$E$只是$k_0$是聚点. 由[2] p.266定理1, $R_{ij}(\lambda)$是不中断的(Q,δ_{k_0})型Doob过程. □

定理 3.2 设Q是流出或正则的, $\eta_j(\lambda)=0$, $\sum\limits_{k\in E}c_k<\infty$并且存在两个以上$k$使得$c_k>0$, 则$R_{ij}(\lambda)$所诱导的Ray-Knight紧化为一点紧化$E\cup\{\partial\}$, 这时$R_{ij}(\lambda)$是$(Q,\pi)$型Doob过程, 其中$\pi=(\pi_k,k\in E)$, $\pi_k=c_k\Big/\Big[\sum\limits_{m\in E}c_m\Big]$.

证明: 仿照定理3.1, 可以证明对于任意的$j\in E$,

$$\lim_{i\to\infty}R_{ij}(\lambda)=\frac{\sum\limits_{k\in E}c_kR_{kj}^{\min}(\lambda)}{\lambda\Big[\sum\limits_{m\in E}\sum\limits_{k\in E}c_kR_{km}^{\min}(\lambda)\Big]},$$

对于E上任意的函数$f(i)$, $\lim\limits_{i\to\infty}f(i)=c$, 易知皆有$\lim\limits_{i\to\infty}\sum\limits_{k\in E}R_{ik}^{\min}(\lambda)f(k)=c$. 所以$0,1,2,\ldots$在Ray-Knight拓扑下Cauchy列, 设它在Ray-knight拓扑下的极限为x. 对于每个$j\neq x$, 由于j在Ray-Knight拓扑下是孤立点, 所以

$$U^\lambda(x,\{j\})=\lim_{i\Rightarrow x}R_{ij}(\lambda)=\lim_{i\to\infty}R_{ij}(\lambda)=\frac{\sum\limits_{k\in E}c_kR_{kj}^{\min}(\lambda)}{\lambda\Big[\sum\limits_{m\in E}\sum\limits_{k\in E}c_kR_{km}^{\min}(\lambda)\Big]}.$$

如果$x=k\in E$, 则$\overline{E}=E$,

$$U^\lambda(x,\{k\})=U^\lambda(x,\overline{E})-\sum_{m\neq k}U^\lambda(x,\{m\})=\frac{1}{\lambda}-\sum_{m\neq k}R_{km}(\lambda)=R_{kk}(\lambda),$$

从而

$$1>\frac{c_k}{\sum\limits_{m\in E}c_m}=\lim_{\lambda\to\infty}\lambda U^\lambda(x,\{k\})=\lim_{\lambda\to\infty}\lambda R_{kk}(\lambda)=1,$$

矛盾! 故$x\notin E$, x记作∂. 由于E中的点在Ray-Knight拓扑下是孤立点, 所以对于每个$j\in E$,

$$U^\lambda(\infty,\{j\})=\frac{\sum\limits_{k\in E}c_kR_{kj}^{\min}(\lambda)}{\lambda\Big[\sum\limits_{m\in E}\sum\limits_{k\in E}c_kR_{km}^{\min}(\lambda)\Big]},$$

所以$\sum\limits_{j\in E} U^1(\partial,\{j\})=1$, 即$\partial\in E_R$. 上式两端乘以$\lambda$, 再让$\lambda\to\infty$, 则有$\pi_j=P_0(\partial,\{j\})$. 由$\pi$的定义, 容易看出

$$R_{ij}(\lambda)=R_{ij}^{\min}(\lambda)+\mathsf{E}^i\{e^{-\lambda\sigma}\}\frac{\sum\limits_{k\in E}\pi_k R_{kj}^{\min}(\lambda)}{\sum\limits_{m\in E}\pi_k(1-\mathsf{E}^m\{e^{-\lambda\sigma}\})},$$

由[2] p.266定理1, $R_{ij}(\lambda)$是不中断的(Q,π)型Doob过程. □

Doob过程的轨道相对来说比较简单, 过程X_t从某个状态i出发, 经过有限时间发生“爆炸”, 然后以概率π_k回到状态k, 经过有限时间再次“爆炸”, 如此循环往复.

定理 3.3 设Q是流出或正则的, $\sum\limits_{k\in E} c_k=\infty$或$\eta_j(\lambda)\neq 0$, 则$R_{ij}(\lambda)$所诱导的Ray-Knight紧化为一点紧化$E\cup\{\partial\}$, 并且$E^+=E\cup\{\partial\}$,

$$U^\lambda(i,\{j\})=R_{ij}(\lambda), \tag{3.3}$$

$$U^\lambda(\partial,\{j\})=\frac{\sum\limits_{k\in E}c_k R_{kj}^{\min}(\lambda)+\eta_j(\lambda)}{\lambda\Big[\sum\limits_{m\in E}\sum\limits_{k\in E}c_k R_{km}^{\min}(\lambda)+\eta_m(\lambda)\Big]}, \tag{3.4}$$

这里$U^\lambda(x,\{j\})$是$R_{ij}(\lambda)$诱导的Ray预解式.

证明: 仿照定理3.1, 可以证明对于任意的$j\in E$,

$$\lim_{i\to\infty}R_{ij}(\lambda)=\frac{\sum\limits_{k\in E}c_k R_{kj}^{\min}(\lambda)+\eta_j(\lambda)}{\lambda\Big[\sum\limits_{m\in E}\sum\limits_{k\in E}c_k R_{km}^{\min}(\lambda)+\eta_m(\lambda)\Big]},$$

对于E上任意的函数$f(i)$, $\lim\limits_{i\to\infty}f(i)=c$, 易知皆有$\lim\limits_{i\to\infty}\sum\limits_{k\in E}R_{ik}^{\min}(\lambda)f(k)=c$. 所以$0,1,2,\ldots$在Ray-Knight拓扑下Cauchy列, 设它的极限为x. 对于每个$j\neq x$, 由于j在Ray-Knight拓扑下是孤立点, 所以

$$U^\lambda(x,\{j\})=\lim_{i\Rightarrow x}R_{ij}(\lambda)=\lim_{i\to\infty}R_{ij}(\lambda)=\frac{\sum\limits_{k\in E}c_k R_{kj}^{\min}(\lambda)+\eta_j(\lambda)}{\lambda\Big[\sum\limits_{m\in E}\sum\limits_{k\in E}c_k R_{km}^{\min}(\lambda)+\eta_m(\lambda)\Big]}. \tag{3.5}$$

如果$x=k\in E$, 则$\overline{E}=E$,

$$U^\lambda(x,\{k\})=U^\lambda(x,\overline{E})-\sum_{m\neq k}U^\lambda(x,\{m\})=\frac{1}{\lambda}-\sum_{m\neq k}R_{km}(\lambda)=R_{kk}(\lambda),$$

由于$\sum\limits_{k\in E}c_k R_{kj}^{\min}(\lambda)+\eta_j(\lambda)$是流入族, 由[2] p.41引理3, 对于每个$j\in E$,

$$\lim_{\lambda\to\infty}\lambda\Big[\sum_{k\in E}c_k R_{kj}^{\min}(\lambda)+\eta_j(\lambda)\Big]=c_j.$$

如果$\sum\limits_{k\in E} c_k=\infty$, 则

$$\lim_{\lambda\to\infty}\lambda\Big[\sum_{m\in E}\sum_{k\in E}c_kR_{km}^{\min}(\lambda)+\eta_m(\lambda)\Big]\geq\sum_{m\in E}\sum_{k\in E}\lim_{\lambda\to\infty}\lambda c_kR_{km}^{\min}(\lambda)=\sum_{k\in E}c_k=\infty,$$

如果Q是正则的, 并且$\eta_j(\lambda)\neq 0$, 由[2] p.120引理5,

$$\lim_{\lambda\to\infty}\lambda\Big[\sum_{m\in E}\sum_{k\in E}c_kR_{km}^{\min}(\lambda)+\eta_m(\lambda)\Big]\geq\lim_{\lambda\to\infty}\lambda\sum_{k\in E}\eta_m(\lambda)=d\lim_{\lambda\to\infty}\lambda\sum_{k\in E}\overline{\eta}_m(\lambda)=\infty,$$

从而根据(3.5),

$$0=\lim_{\lambda\to\infty}\lambda U^{\lambda}(x,\{k\})=\lim_{\lambda\to\infty}\lambda R_{kk}(\lambda)=1,$$

矛盾! 故$x\notin E$, x记作∂. 由于E中的点在Ray-Knight拓扑下是孤立点, 所以对于每个$j\in E$,

$$U^{\lambda}(\partial,\{j\})=\frac{\sum\limits_{k\in E}a_kR_{kj}^{\min}(\lambda)+\eta_j(\lambda)}{\lambda\Big[\sum\limits_{m\in E}\sum\limits_{k\in E}a_kR_{km}^{\min}(\lambda)+\eta_m(\lambda)\Big]},$$

所以$\sum\limits_{k\in E}U^1(\partial,\{j\})=1$, 即$\partial\in E_R$. 另外由于$P_0(\partial,\{j\})=\lim\limits_{\lambda\to\infty}\lambda U^{\lambda}(\partial,\{j\})=0$, 所以$\partial$不是分支点, 即$\partial\in E$, 故$E^+=E\cup\{\partial\}$. □

定义 3.1 设$X=(\Omega,\mathcal{F},\mathcal{F}_t,X_t,\theta_t,\mathsf{P}^x)$是一个右过程, x是一个状态, $\tau_x=\inf\{t|t>0,X_t=x\}$, 如果$\mathsf{P}^x\{\tau_x=0\}=1$, 则称$x$是正则点.

由Blumenthal 0-1律, 如果x不是正则点, 则$\mathsf{P}^x\{\tau_x>0\}=1$.

定理 3.4 设Q是流出或正则的, $R_{ij}(\lambda)$是(3.1)中的预解式, $\sum\limits_{k\in E}c_k=\infty$或$\eta_j(\lambda)\neq 0$, $U^{\lambda}(x,\mathrm{d}y)$是(3.3)和(3.4)中的Ray预解式, $X=(\Omega,\mathcal{F},\mathcal{F}_t,X_t,\theta_t,\mathsf{P}^x)$是$U^{\lambda}(x,\mathrm{d}y)$对应的右过程, 则$\partial$是正则点.

证明: 设∂不是正则点, 则$\mathsf{P}^{\partial}\{\tau_\partial>0\}=1$. 令

$$\psi_j(\lambda)=\mathsf{E}^{\partial}\Big[\int_0^{\tau_\partial}e^{-\lambda t}I_{\{j\}}(X_t)\mathrm{d}t\Big],$$

$\psi_j(\lambda)$表示$\mathsf{P}^{\partial}\{X_t=j,t<\tau_\partial\}$的Laplace变换. 由$X$的Markov性易得,

$$\mathsf{P}^{\partial}\{X_{t+s}=j,t<\tau_\partial\}=\sum_{k\in E}\mathsf{P}^{\partial}\{X_t=k,t<\tau_\partial\}p_{kj}^{\min}(s),$$

所以

$$\psi_j(\lambda)-\psi_j(\mu)+(\lambda-\mu)\sum_{k\in E}\psi_k(\lambda)R_{kj}^{\min}(\mu)=0,$$

即$\psi_j(\lambda)$是$R_{ij}^{\min}(\lambda)$的流入族. 令$\sigma_j=\inf\{t|X_t=j\}$, 由X_t的右连续性,

$$\lim_{\lambda\to\infty}\lambda\psi_j(\lambda)=\lim_{\lambda\to\infty}\lambda\mathsf{E}^{\partial}\{e^{-\lambda\sigma_j}\}R_{jj}^{\min}(\lambda)=\mathsf{P}^{\partial}\{\sigma_j=0\}=0,$$

$$\lim_{\lambda\to\infty}\sum_{j\in E}\lambda\psi_j(\lambda)=\lim_{\lambda\to\infty}\mathsf{E}^{\partial}\{1-e^{\lambda\tau_\partial}\}=\mathsf{P}^{\infty}\{\tau_\partial>0\}=1.$$

由[2] p.41引理3, $\psi_j(\lambda)$满足方程组(3.2). 如果Q是流出的, 则与(3.2)没有非平凡解矛盾, 若果Q是正则的, 则存在常数$c>0$使得$\psi_j(\lambda)=c\overline{\eta}_j(\lambda)$, 但由[2] p.120引理5,

$$\lim_{\lambda\to\infty}\sum_{j\in E}\lambda\psi_j(\lambda)=c\lim_{\lambda\to\infty}\lambda\sum_{j\in E}\overline{\eta}_j(\lambda)=\infty,$$

仍然矛盾, 所以∂是正则点. $\square$

由于这时E_R中没有分支点, 由定理2.1中的(4), X是拟左连续的. 此外, 由于$\{X_t,t<\tau_\partial\}$的转移概率仍是$p_{ij}^{\min}(t)$, 所以$\{X_t,t<\tau_\partial\}$的分布和$X^{\min}$相同, 从而从任何有限状态i出发, $X.$在有限时间内“爆炸”, 即∂是X的常返态. 由X的拟左连续性, 容易推出

命题 3.1 几乎必然地集合$\{t|X_t(\omega)=\partial\}$是闭集.

命题 3.2 几乎必然地集合$\{t|X_t(\omega)=\partial\}$的Lebesgue测度为0.

证明: 对于任意的$x\in E^+$, 由于

$$\begin{aligned}\mathsf{E}^x\Big[\int_0^\infty e^{-t}I_E(X_t)\mathrm{d}t\Big] &= \sum_{k\in E}\mathsf{E}^x\Big[\int_0^\infty e^{-t}I_{\{k\}}(X_t)\mathrm{d}t\Big]=\sum_{k\in E}\int_0^\infty e^{-t}\mathsf{P}^x\{X_t=k\}\mathrm{d}t\\ &= \sum_{k\in E}\int_0^\infty e^{-t}P_t(x,\{k\})\mathrm{d}t=\sum_{k\in E}U^1(x,\{k\})\\ &= U^1(x,E)=1,\end{aligned}$$

所以

$$\mathsf{E}^x\Big\{\int_0^\infty e^{-t}I_{\{\partial\}}(X_t)\mathrm{d}t\Big\}=0,$$

即几乎必然地集合$\{t|X_t(\omega)=\partial\}$的Lebesgue测度为0. $\square$

命题 3.3 几乎必然地集合$\{t|X_t(\omega)=\partial\}$是自稠密的.

证明: 由[5]第3章第3(b)节, 存在X的连续可加泛函L_t使得

$$\mathsf{E}^x\{e^{-\tau_\partial}\}=\mathsf{E}^x\Big[\int_0^\infty e^{-t}\mathrm{d}L_t\Big],\qquad \forall x\in E^+,$$

$\lim\limits_{t\to\infty}L_t=\infty$, 并且Lebesgue-Stieltjes测度dL的支撑几乎必然为$\{t|X_t(\omega)=\partial\}$, 如果$\{t|X_t(\omega)=\partial\}$有孤立点, 则d$L$必有原子, 即$L_t$有不连续点, 故几乎必然地集合$\{t|X_t(\omega)=\partial\}$是自稠密的. $\square$

集合$\{t|X_t(\omega)=\partial\}$记作$\mathcal{S}_\partial(\omega)$. 令$\sigma=\inf\{t|X_t=\partial\}$, 因为$\infty$是正则点, 所以$\sigma$与$\tau_\partial$几乎必然相等.

$(\sigma,\infty)\setminus\mathcal{S}_\partial(\omega)$是一列互不相交的开区间, 记作$(g_\alpha,d_\alpha)$, $\alpha=1,2,\ldots$. 每个(g_α,d_α)都称为游程区间. 显然在每个游程区间上, $X.$只能在E中取值.

令$\beta_t=\inf\{s|L_s>t\}$, 则$\beta.(\omega)$的不连续点与$X.$的游程区间是一一对应的.

由[5]第3章第4节, 我们有

定理 3.5 设$X=(\Omega,\mathcal{F},\mathcal{F}_t,X_t,\theta_t,\mathsf{P}^x)$, β_t如上. 令$D_p(\omega)=\{t|\beta_{t-}(\omega)<\beta_t(\omega)\}$. 任给$t\in D_p(\omega)$, 令

$$Y_t(\omega)=X_{\beta_{t-}+\cdot}(\omega),\qquad \cdot\in[0,\infty)$$

(注意, 这时$Y_t(\omega)$是一段轨道, 而不是一个状态), 在$\mathsf{P}^{\partial}\{\cdot\}$下, $\{Y_t;t\in D_p\}$是一个取值于$(\Omega,\mathcal{F})$的Possion点过程.

设$n(\cdot)$是$\{Y_t;t\in D_p\}$的特征测度, 即X离开∞的游程测度.

令$g_k(t)=n(\{X_t=k,t<\sigma\})$, $t>0$, 由[5]第3章第4节, $g_k(t)$是$p_{ij}^{\min}(t)$的进入律, 即

$$g_k(t+s)=\sum_{m\in E}g_m(t)p_{mk}^{\min}(s),\qquad s,t>0,\ k\in E.$$

令$\Gamma_k=n(\{X_0=k\})$, $\overline{g}_k(t)=n(\{X_0\notin E,X_t=k,t<\sigma\})$, 则

$$g_k(t)=\sum_{m\in E}\Gamma_m p_{mk}^{\min}(t)+\overline{g}_k(t),\qquad \lim_{t\downarrow 0}\overline{g}_k(t)=0,\qquad \sum_{k\in E}\int_0^\infty e^{-t}g_k(t)\mathrm{d}t=1.$$

令

$$\xi_k(\lambda)=\int_0^\infty e^{-\lambda t}\overline{g}_k(t)\mathrm{d}t,$$

由于$\overline{g}_k(t)$是$p_{ij}^{\min}(t)$的进入律, $\lim\limits_{t\downarrow 0}\overline{g}_k(t)=0$, 所以$\xi_k(\lambda)$是$R_{ij}^{\min}(\lambda)$行协调族, 并且$\lim\limits_{\lambda\to\infty}\lambda\xi_k(\lambda)=0$, 由[2] p.41引理3, $\xi_k(\lambda)$, $k\in E$满足方程组(3.2).

由[4] p.119推论11以及[5] p.107 (3.30),

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}^\infty\Big[\int_0^\infty e^{-\lambda t}I_{\{j\}}(X_t)\mathrm{d}t\Big] &= \mathsf{E}^\infty\Big[\int_0^\infty e^{-\lambda t}\mathrm{d}L_t\Big]\int_0^\infty e^{-\lambda t}n(\{X_t=j,t<\sigma\})\mathrm{d}t\\
&= \mathsf{E}^\infty\Big[\int_0^\infty e^{-\lambda\beta_t}\mathrm{d}t\Big]\Big[\sum_{k\in E}\Gamma_kR_{kj}^{\min}(\lambda)+\xi_j(\lambda)\Big]\\
&= \frac{\sum\limits_{k\in E}\Gamma_kR_{kj}^{\min}(\lambda)+\xi_j(\lambda)}{\int_0^\infty e^{-\lambda t}n(\{\sigma\in\mathrm{d}t\})}=\frac{\sum\limits_{k\in E}\Gamma_kR_{kj}^{\min}(\lambda)+\xi_j(\lambda)}{\lambda\int_0^\infty e^{-\lambda t}n(\{\sigma>t\})\mathrm{d}t}\\
&= \frac{\sum\limits_{k\in E}\Gamma_kR_{kj}^{\min}(\lambda)+\xi_j(\lambda)}{\lambda\sum\limits_{m\in E}\Big[\sum\limits_{k\in E}\Gamma_kR_{km}^{\min}(\lambda)+\xi_m(\lambda)\Big]},
\end{aligned}$$

所以对于任意的$i\in E$,

$$\begin{aligned}
R_{ij}(\lambda) &= R_{ij}^{\min}(\lambda)+\mathsf{E}^i\{e^{-\lambda\sigma}\}\mathsf{E}^\infty\Big[\int_0^\infty e^{-\lambda t}I_{\{j\}}(X_t)\mathrm{d}t\Big]\\
&= R_{ij}^{\min}(\lambda)+\mathsf{E}^i\{e^{-\lambda\sigma}\}\frac{\sum\limits_{k\in E}\Gamma_kR_{kj}^{\min}(\lambda)+\xi_j(\lambda)}{\lambda\sum\limits_{m\in E}\Big[\sum\limits_{k\in E}\Gamma_kR_{km}^{\min}(\lambda)+\xi_m(\lambda)\Big]}.
\end{aligned}\tag{3.6}$$

定理 3.6 设c_k, $\eta_k(\lambda)$, Γ_k, $\xi_k(\lambda)$如上, 则

$$\Gamma_k = c_k, \qquad \xi_k(\lambda) = \eta_k(\lambda). \tag{3.7}$$

证明: 将(3.7))式与(3.1)式相比, 立得

$$\frac{\sum\limits_{k\in E} c_k R_{kj}^{\min}(\lambda) + \eta_j(\lambda)}{\lambda \sum\limits_{m\in E}\Big[\sum\limits_{k\in E} c_k R_{km}^{\min}(t) + \eta_m(\lambda)\Big]} = \frac{\sum\limits_{k\in E} \Gamma_k R_{kj}^{\min}(\lambda) + \xi_j(\lambda)}{\lambda \sum\limits_{m\in E}\Big[\sum\limits_{k\in E} \Gamma_k R_{km}^{\min}(t) + \xi_m(\lambda)\Big]}, \qquad \forall j\in E,\ \lambda>0, \tag{3.8}$$

由于

$$\sum_{m\in E}\Big[\sum_{k\in E} c_k R_{km}^{\min}(1) + \eta_m(1)\Big] = 1 = \sum_{m\in E}\Big[\sum_{k\in E} \Gamma_k R_{km}^{\min}(1) + \xi_m(1)\Big],$$

所以对于每个$j\in E$, $\lambda>0$,

$$\sum_{k\in E} c_k R_{kj}^{\min}(1) + \eta_j(1) = \sum_{k\in E} \Gamma_k R_{kj}^{\min}(1) + \xi_j(1).$$

由于$\sum\limits_{k\in E} c_k R_{kj}^{\min}(\lambda) + \eta_j(\lambda)$和$\sum\limits_{k\in E} \Gamma_k R_{kj}^{\min}(\lambda) + \xi_j(\lambda)$都是关于$R_{ij}^{\min}(\lambda)$的行协调族, 因此对于每个$j\in E$, $\lambda>0$,

$$\sum_{k\in E} c_k R_{kj}^{\min}(\lambda) + \eta_j(\lambda) = \sum_{k\in E} \Gamma_k R_{kj}^{\min}(\lambda) + \xi_j(\lambda).$$

由[2] p.41引理3, 对于每个$j\in E$,

$$c_j = \lim_{\lambda\to\infty} \lambda\Big[\sum_{k\in E} c_k R_{kj}^{\min}(\lambda) + \eta_j(\lambda)\Big] = \lim_{\lambda\to\infty} \lambda\Big[\sum_{m\in E} \Gamma_k R_{kj}^{\min}(\lambda) + \xi_j(\lambda)\Big] = \Gamma_j,$$

这说明(3.7)成立. □

注记 3 (3.7) 说明了 (3.1) 中各个量的概率意义. 利用Ito游程理论, 可以计算如$\mathsf{E}^i\{\sigma_k\}$, $\mathsf{E}^i\{e^{\lambda\sigma_k}\}$等诸多概率量, 进而估计生灭过程在不满足唯一性条件下的指数遍历速度等等.

3.3 $a_0>0$的情形

这时Q有一个非保守状态0.

如果Q是自然的, 由[2] p.113定理4, Q满足唯一性条件, 即Q只有一个转移函数$p_{ij}^{\min}(t)$, 由于Q有非保守状态, 所以$p_{ij}^{\min}(t)$不是诚实的.

如果Q是流入的, 由[2] p.123, Q只有一个诚实的预解式

$$R_{ij}(\lambda) = R_{ij}^{\min}(\lambda) + \mathsf{E}^i\{e^{-\lambda\sigma}\}\frac{\eta_j(\lambda)}{\lambda\sum\limits_{m\in E}\eta_m(\lambda)},$$

仿照3.2和3.3节中的方法可以证明E在$R_{ij}(\lambda)$下的Ray-Knight紧化为一点紧化$E\cup\{\partial\}$, $E^+=E\cup\{\partial\}$. 右过程$X=(\Omega,\mathcal{F},\mathcal{F}_t,X_t,\theta_t,\mathsf{P}^x)$的轨道有以下特征: X.从有限状态出发, 在有限时间内到达0, 然后以概率$a_0/(a_0+b_0)$突然跃到∂, 然后很快流入E中, 然后再次在有限时间内到达0, 以概率$a_0/(a_0+b_0)$突然跃到∂, 如此周而复始.

如果Q是流出或正则的, $R_{ij}(\lambda)$是Q的诚实的预解式, 则E在$R_{ij}(\lambda)$下的Ray-Knight紧化为一点紧化$E\cup\{\partial\}$, 由于Q有一个非保守状态, 所以$\partial\in E^+$. 这时$R_{ij}(\lambda)$的表达式仍为(3.1), 只是$\sum\limits_{k\in E}a_k=\infty$或$\eta_j(\lambda)\neq 0$, 右过程$X=(\Omega,\mathcal{F},\mathcal{F}_t,X_t,\theta_t,\mathsf{P}^x)$的轨道与$a_0=0$的情形相同.

参 考 文 献

[1] 王梓坤, 杨向群, 生灭过程和马尔科夫链, 科学出版社, 北京, 2005.

[2] 杨向群, 可列马尔科夫过程构造论, 湖南科学技术出版社, 1986.

[3] 侯振挺, 郭青峰, 齐次可列马尔科夫过程, 科学出版社, 北京, 1980.

[4] Bertion, J., *Levy Processes*, Cambridge University Press, 2000.

[5] Blumenthal, R.M., *Excursions of Markov Processes*, Birkhäuser, 1992.

[6] Rogers, L.C.G. and Williams, D., *Diffusions, Markov Processes and Martiglaes, Vol I*, Cambridge Math. Library, Cambridge University Press, 2000.

Paths of Birth-Death Processes

Zhao Xiaojing

(*School of Mathematics and Physics, Anyang Institute of Technology, Anyang, 450007*)

Yan Guojun

(*Department of Mathematics, Zhengzhou University, Zhengzhou, 450001*)

In this paper we discuss the paths of birth-death processes, and use Ito's excursion theory to give the probabilistic meaning of parameters of construction of birth-death processes.

Keywords: Birth-death process, Martin exit boundary, Ray-Knight compactification, right process, regular point, Ito's excursion theory.

AMS Subject Classification: 60J10.