

定时截尾样本下三参数Weibull分布修正矩估计 的强相合性 *

孙丽芬

(江苏师范大学数学与统计学院, 徐州, 221116)

汤银才

(华东师范大学金融与统计学院, 上海, 200241)

摘 要

本文讨论了定时截尾样本下三参数Weibull分布修正矩估计(MME)的强相合性. 首先证明了修正样本矩的强相合性. 然后给出了条件 (\mathcal{L}) , 得出结论: 若所研究的分布 $F(x; \theta_1, \theta_2, \theta_3)$ 满足条件 (\mathcal{L}) , 修正矩估计 $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \hat{\theta}_3$ 强相合于参数真值. 最后证明了当形状参数 $\delta \geq 1$, 即失效率增加时, 三参数威布尔分布 $\text{Wei}(x; \beta, \delta, \gamma)$ 满足条件 (\mathcal{L}) , 即MME是强相合的.

关键词: 三参数威布尔分布, 定时截尾样本, 修正矩估计, 强相合.

学科分类号: O213.2.

§1. 引 言

三参数威布尔分布是可靠性中非常重要的寿命分布之一, 其参数估计是一个值得关注的问题. Cohen和Whitten (1982)等讨论了在完全样本下三参数威布尔分布的矩估计. 由于种种原因, 在实践中我们得到的常常是截尾样本, 所以讨论三参数威布尔分布在截尾样本下的参数估计问题就显得尤为重要了. 对于不完全样本, 陈家鼎, 陈迪等先后讨论了极大似然估计和Bayes估计. 但对最经典, 直观的矩估计方法的讨论却很少, 原因在于样本矩很难构造. Sirvanci和Yang (1984)在讨论两参数威布尔分布定时截尾样本下形状参数的估计时, 基于矩的思想并结合极大似然估计得出了形状参数与尺度参数的估计, 并在一定条件下证明了联合渐近正态性. 但三参数威布尔分布由于门限参数的引入, 讨论起来问题较多. 三参数Weibull分布不完全样本矩估计的相关文献非常少.

本文作者已对定数, 定时截尾样本下三参数威布尔分布的矩估计作了一些讨论^[9]. 三参数Weibull分布定时截尾样本的修正矩估计方法如下:

假设某产品的寿命 $X \sim \text{Wei}(x; \beta, \delta, \gamma)$, 即

$$F(x) = \begin{cases} 1 - \exp \left[- \left(\frac{x - \gamma}{\beta} \right)^\delta \right], & x \geq \gamma; \\ 0, & x < \gamma, \end{cases}$$

*国家自然科学基金项目(11271136)资助.

本文2010年10月20日收到, 2012年8月6日收到修改稿.

其中 $\beta > 0$ 为尺度参数, γ 为门限或位置参数, $\delta > 0$ 为形状参数.

将 N 个产品投入试验, 设所得的样本为 X_1, X_2, \dots, X_N , 相应的次序样本记为 $X_{1:N}, X_{2:N}, \dots, X_{N:N}$. 本文考虑定时截尾寿命试验, 试验到时刻 T 停止, 则对应的截尾样本可表示为 $X_{1:N}, X_{2:N}, \dots, X_{r_N:N}$, 其中 r_N 为 T 前产品的失效数.

我们假定定时截尾试验下至少有一个产品失效, 即 $X_{1:N} \leq T, 1 \leq r_N \leq N$. 此时显然 $T > \gamma$. 若令

$$Y = F(X; \beta, \delta, \gamma),$$

则 $Y \sim U(0, 1)$, 其期望与方差分别为 $E(Y) = 1/2, E(Y^2) = 1/3$. 相应的均匀分布样本为 Y_1, Y_2, \dots, Y_N . 令与截尾时间 T 相应的均匀分布的截尾时间为 t . 易知

$$t = 1 - \exp \left[- \left(\frac{T - \gamma}{\beta} \right)^\delta \right].$$

称产品在时刻 t 未失效的条件下, 能继续工作的时间 $X - t$ 为产品在 t 时刻的剩余寿命, 易知其分布函数 $F_t(x)$ 可表示为

$$F_t(x) = P(X - t \leq x | X > t) = \begin{cases} \frac{F(x+t) - F(t)}{1 - F(t)}, & x \geq 0; \\ 0, & x < 0, \end{cases}$$

称之为产品在 t 时刻的剩余寿命分布函数.

令 $m(t)$ 为产品工作到时刻 t 仍能正常工作的条件下继续工作的平均时间(也称为平均剩余寿命), 则

$$m(t) = \int_0^\infty x dF_t(x).$$

特别地, 若 $X \sim U(0, 1)$, 易知

$$m(t) = \frac{1}{2}(1 - t), \quad 0 \leq t \leq 1.$$

令

$$W_1 = \frac{1}{N} \left[\sum_{i=1}^N Y_i I_{[0,t]}(Y_i) + \left(\sum_{i=1}^N I_{[t,\infty]}(Y_i) \right) (t + m_Y(t)) \right],$$

$$W_2 = \frac{1}{N} \left[\sum_{i=1}^N Y_i^2 I_{[0,t]}(Y_i) + \left(\sum_{i=1}^N I_{[t,\infty]}(Y_i) \right) (t + m_Y(t))^2 \right],$$

其中 $m_Y(t)$ 为 Y 在 t 时刻的平均剩余寿命, $I_E(Y)$ 为定义在 E 上的示性函数. 注意到 X_1, X_2, \dots, X_N 独立同分布, 从而 Y_1, Y_2, \dots, Y_N 为独立同分布样本, 由此可得以下结论:

引理 1.1 ^[9] 若 $Y \sim U(0, 1)$, 则

$$E(W_1) = \frac{1}{2}, \quad E(W_2) = \omega' \cdot \frac{1}{3},$$

其中 W_1, W_2 的定义分别同上,

$$\omega' = \frac{1}{4}[t^3 - 3t^2 + 3t + 3].$$

根据上述引理, 并引入第一个次序统计量 $Y_{1:N}$. 对均匀分布, 我们知道

$$E(Y_{1:N}) = \frac{1}{N+1}.$$

由上面介绍的均匀分布随机变量 U 及 $W_1, W_2, Y_{1:N}$ 的性质, 我们建立方程组

$$\begin{cases} E(Y) = W_1, \\ \omega' \cdot E(Y^2) = W_2, \\ E(Y_{1:N}) = Y_{1:N}, \end{cases} \quad (1.1)$$

称之为定时截尾样本下三参数Weibull分布的修正矩方程, 相应的解称为 β, δ 和 γ 的修正矩估计(MME). 用牛顿法模拟计算表明, MME有较好的统计性质.

一般的矩估计都是强相合的, 本文讨论定时截尾样本下三参数Weibull分布修正矩估计的强相合性. 由于这里得到的修正矩估计没有显式表达式, 讨论大样本性质存在着困难. 因所构造的修正样本矩并非真正意义上的样本矩, 所以下面第2节首先证明了一般场合修正样本矩的强相合性. 然后在第3节给出了条件 (\mathcal{L}) , 并得出结论: 若所研究的分布 $F(x; \theta_1, \theta_2, \theta_3)$ 满足条件 (\mathcal{L}) , 则修正矩估计 $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \hat{\theta}_3$ 强相合于参数真值. 最后在第4节证明了当形状参数 $\delta \geq 1$, 即失效率增加时, 三参数威布尔分布 $\text{Wei}(x; \beta, \delta, \gamma)$ 满足条件 (\mathcal{L}) , 即修正矩估计是强相合的.

§2. 修正样本矩的强相合性

我们知道, 完全样本下样本各阶矩是强相合于母体矩的. 对于截尾样本, 这里以平均剩余寿命 $m(t)$ 近似代替未观察到的样品寿命, 构造了修正样本矩, 下面我们讨论这样构造的修正样本矩的强相合性.

设某产品寿命 $X \sim F(x; \theta_1, \theta_2, \theta_3) = F(x; \boldsymbol{\theta})$, $\boldsymbol{\theta} \in \Theta$. 从 $F(x; \theta_1, \theta_2, \theta_3)$ 中抽取容量为 N 的i.i.d.样本为 X_1, X_2, \dots, X_N . 令 $Y = F(X; \boldsymbol{\theta})$, 则相应的 Y_1, Y_2, \dots, Y_N 为来自均匀分布 $U(0, 1)$ 的独立同分布样本. 仍考虑定时截尾寿命试验, X 的截尾时间为 T , 对应的 Y 的截尾时间为 t , $t = F(T; \theta_1, \theta_2, \theta_3)$.

先看第一个方程:

$$W_1 - E(Y) = W_1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N Z_i, \quad (2.1)$$

其中

$$Z_i = \left(Y_i - \frac{1}{2}(1+t) \right) I_{[0,t]}(Y_i) + \frac{1}{2}(1+t) - \frac{1}{2}.$$

易见 $E(Z_i) = 0$, 且 $Z_i, i = 1, 2, \dots, N$ 独立同分布, 又因

$$\sigma^2(Z_i) = \text{Var}(Z_i) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}t - \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{6}t^3 < \infty,$$

由中心极限定理,

$$\sqrt{N}(W_1 - E(Y)) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^N Z_i \xrightarrow{L} N(0, \sigma^2(Z_i)). \quad (2.2)$$

类似的, 可考虑第二个方程:

$$W_2 - \omega' E(Y^2) = W_1 - \omega' \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N V_i, \quad (2.3)$$

其中

$$V_i = \left(Y_i^2 - \frac{1}{4}(1+t)^2 \right) I_{[0,t]}(Y_i) + \frac{1}{4} \left(-\frac{1}{3}t^3 + 2t^2 + t \right).$$

易见 $E(V_i) = 0$, 且 $V_i, i = 1, 2, \dots, N$ 独立同分布, 又因

$$\sigma^2(V_i) = \text{Var}(V_i) = \frac{1}{16}t + \frac{3}{16}t^2 - \frac{1}{24}t^3 - \frac{7}{24}t^4 + \frac{43}{240}t^5 + \frac{1}{24}t^6 < \infty,$$

由中心极限定理,

$$\sqrt{N}(W_2 - \omega' E(Y^2)) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^N V_i \xrightarrow{L} N(0, \sigma^2(V_i)). \quad (2.4)$$

又由柯尔莫哥洛夫强大数定律

$$P\left\{ \lim_{N \rightarrow \infty} W_1 = \frac{1}{2} \right\} = 1, \quad P\left\{ \lim_{N \rightarrow \infty} W_2 = \omega' \cdot \frac{1}{3} \right\} = 1.$$

最后再考虑 $Y_{1:N}$. 由于 $Y \sim U(0, 1)$, 对于 $0 < p = 1/(1+N) < 1$, 由分位数的概念

$$F_Y\left(\frac{1}{1+N}\right) = \frac{1}{1+N},$$

即 $U(0, 1)$ 的 $1/(1+N)$ 总体分位数为 $\xi_p = 1/(1+N)$.

Y_1, Y_2, \dots, Y_N 为随机变量 Y 的i.i.d.样本, $Y_{1:N}, Y_{2:N}, \dots, Y_{N:N}$ 为其次序统计量. 对于 $p = 1/(1+N)$,

$$\xi_p^* = Y_{([N \cdot [1/(N+1)] + 1):N} = Y_{1:N}$$

为其样本的 $1/(1+N)$ 分位数($[a]$ 为不超过 a 的最大整数).

引理 2.1^[10] 设 X_1, X_2, \dots, X_N 为来自分布函数 F 的随机样本, 其总体 p 分位数 ξ_p 由分布唯一决定, 则样本 p 分位数 $\xi_p^* \xrightarrow{P} \xi_p$ 及 $\xi_p^* \xrightarrow{\text{a.e.}} \xi_p$.

由上述讨论可得:

定理 2.1 X 为来自分布函数 $F(x; \theta)$ 的定时截尾样本, 令 $Y = F(X; \theta)$, 则 $\forall \theta \in \Theta$,

$$\begin{aligned} P_{\theta} \left\{ \lim_{N \rightarrow \infty} W_1 = \alpha_1 \right\} &= 1, \\ P_{\theta} \left\{ \lim_{N \rightarrow \infty} W_2 = \omega' \cdot \alpha_2 \right\} &= 1, \\ P_{\theta} \left\{ \lim_{N \rightarrow \infty} Y_{1:N} = 0 \right\} &= 1. \end{aligned} \quad (2.5)$$

§3. 修正矩估计的强相合性

为保证修正矩估计以概率1收敛到未知参数的真值, 我们对分布函数 $F(x; \theta)$ 加一系列条件:

1. $F(x; \theta)$, $f(x; \theta)$, $\partial F(x; \theta)/\partial \theta_i$, $i = 1, 2, 3$ 为 Θ 上的连续函数. $f(x; \theta)$ 关于 x Borel可测.
2. 方程组(1.1)是正规的, 即对一切 $N \geq 2$, $r_N > 1$, 只要 x_i , $i = 1, 2, \dots, r_N$ 不全相等, 方程组(1.1)恰有一个解 $\hat{\theta}_i^N = \hat{\theta}_i^N(X_1, X_2, \dots, X_{r_N})$, $i = 1, 2, 3$.
3. $\forall \theta^0 \in \Theta$, $\exists u_{\theta^0} = \{\theta : \|\theta - \theta^0\| \leq \eta_{\theta^0}\} \subset \Theta$ ($\eta_{\theta^0} > 0$)及函数 $L_{ij}(x)$, $i, j = 1, 2, 3$, 使得一切 $j = 1, 2, 3$, 及 $(x, \theta) \in R \times u_{\theta^0}$, 满足

$$\left| \frac{\partial F(x; \theta)}{\partial \theta_j} \right| \leq L_{1j}(x), \quad \left| \frac{\partial F^2(x; \theta)}{\partial \theta_j} \right| \leq L_{2j}(x),$$

这里

$$\int_0^\infty L_{ij}(x) dF(x, \theta^0) < \infty.$$

4. 记

$$A(\theta^0) = \begin{pmatrix} E_{\theta^0} \frac{\partial F(X; \theta^0)}{\partial \theta_1} & E_{\theta^0} \frac{\partial F(X; \theta^0)}{\partial \theta_2} & E_{\theta^0} \frac{\partial F(X; \theta^0)}{\partial \theta_3} \\ \omega' E_{\theta^0} \frac{\partial F^2(X; \theta^0)}{\partial \theta_1} & \omega' E_{\theta^0} \frac{\partial F^2(X; \theta^0)}{\partial \theta_2} & \omega' E_{\theta^0} \frac{\partial F^2(X; \theta^0)}{\partial \theta_3} \\ E_{\theta^0} \frac{\partial F_1(X; \theta^0)}{\partial \theta_1} & E_{\theta^0} \frac{\partial F_1(X; \theta^0)}{\partial \theta_2} & E_{\theta^0} \frac{\partial F_1(X; \theta^0)}{\partial \theta_3} \end{pmatrix},$$

$\det(A(\theta^0)) \neq 0$.

以上假设统称为条件 (\mathcal{L}) . 这里 $F_1(x)$ 表示最小次序统计量的分布函数.

为讨论 $\hat{\theta}^N$ 的强相合性, 给出以下引理.

引理 3.1 ^[3] 设 X_1, X_2, \dots, X_N 为 (Ω, \mathcal{F}, P) 上的独立同分布随机变量列, 分布函数为 $F(x)$, $\Phi(x; \theta)$ 是 $(-\infty, \infty) \times \Theta$ 上有定义的实值函数, 关于 x Borel可测, 关于 θ 连续(Θ 为 \mathbf{R}^3 中非空有界闭集), 且存在Borel可测函数 $H(x) \geq 0$ 满足:

$$\int_{-\infty}^{\infty} H(x) dF(x) < \infty, \quad |\Phi(x; \theta)| \leq H(x) \quad (x \in (-\infty, \infty), \theta \in \Theta),$$

则对任何 $\epsilon > 0$, 成立

$$\lim_{k \rightarrow \infty} P_{\theta} \left\{ \omega : \sup_{N \geq k} \sup_{\theta \in \Theta} \left| \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \Phi(X_{i:N}; \theta) - E\Phi(X; \theta) \right| > \epsilon \right\} = 0. \quad (3.1)$$

引理 3.2^[3] 设分布 $F(x; \theta)$ 满足条件 (\mathcal{L}) , r_N 为样本大小为 N , 截尾时间为 T 的截尾试验的失效数, 则正整数列 r_N 满足:

$$r_N \leq N, \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{r_N}{N} = p \quad (0 < p < 1).$$

又令

$$\Lambda_k = \{ \omega : \text{对一切 } N > k, r_N > 1 \text{ 且 } X_{1:N}, X_{2:N}, \dots, X_{r_N:N} \text{ 不全相等} \}.$$

则对一切 $\theta^0 \in \Theta$, 成立

$$\lim_{k \rightarrow \infty} P_{\theta^0}(\Lambda_k) = 1. \quad (3.2)$$

定理 3.1 设条件分布 $F(x; \theta)$ 满足条件 (\mathcal{L}) , $\hat{\theta}^N$ 是 θ^0 的 MME, 且 $\forall \theta^0 \in \Theta, \hat{\theta}^N \in u_{\theta^0}$, 则必有

$$P_{\theta^0} \left(\lim_{N \rightarrow \infty} \hat{\theta}^N = \theta^0 \right) = 1.$$

证明: 对于给定的 $\theta^0 \in \Theta$, 由于 $F(X; \theta) \sim U(0, 1)$, 因此 $E_{\theta^0} F(X, \theta^0) = 1/2$.

对确定的 θ^0 , 将方程组(1.1)改写为

$$\begin{cases} [W_1(X; \theta) - E_{\theta^0} F(X; \theta)] + E_{\theta^0} F(X; \theta) = \frac{1}{2}, \\ [W_2(X; \theta) - \omega' E_{\theta^0} F^2(X; \theta)] + \omega' E_{\theta^0} F^2(X; \theta) = \frac{1}{3} \omega', \\ [F_1(X; \theta) - E_{\theta^0} F_1(X; \theta)] + E_{\theta^0} F_1(X; \theta) = \frac{1}{N+1}. \end{cases} \quad (3.3)$$

这里

$$\begin{aligned} W_1(X; \theta) &= \frac{1}{N} \left[\sum_{i=1}^N F(X_i; \theta) I_{[0,t]}(F(X_i; \theta)) + \left(\sum_{i=1}^N I_{[t,1]}(F(X_i; \theta)) \right) (t + m_{F(X_i; \theta)}(t)) \right], \\ W_2(X; \theta) &= \frac{1}{N} \left[\sum_{i=1}^N F^2(X_i; \theta) I_{[0,t]}(F(X_i; \theta)) + \left(\sum_{i=1}^N I_{[t,1]}(F(X_i; \theta)) \right) (t + m_{F(X_i; \theta)}(t))^2 \right], \\ F(X_{1:N}; \theta) &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N F(X_{i:N}; \theta). \end{aligned}$$

对 $\forall \epsilon_1 > 0$, 记

$$\begin{aligned} \Omega_{k1} &= \left\{ \omega : \sup_{N \geq k} \sup_{\theta \in u_{\theta^0}} |W_1(X; \theta) - E_{\theta^0} F(X; \theta)| \leq \frac{\epsilon_1}{\sqrt{3}} \right\}, \\ \Omega_{k2} &= \left\{ \omega : \sup_{N \geq k} \sup_{\theta \in u_{\theta^0}} |W_2(X; \theta) - \omega' E_{\theta^0} F^2(X; \theta)| \leq \frac{\epsilon_1}{\sqrt{3}} \right\}, \\ \Omega_{k3} &= \left\{ \omega : \sup_{N \geq k} \sup_{\theta \in u_{\theta^0}} |F_1(X; \theta) - E_{\theta^0} F_1(X; \theta)| \leq \frac{\epsilon_1}{\sqrt{3}} \right\}, \\ \Lambda_k &= \{ \omega : \text{对一切 } N > k, r_N > 1 \text{ 且 } X_{1:N}, X_{2:N}, \dots, X_{r_N:N} \text{ 不全相等} \}. \end{aligned}$$

令 $H(x) = 2$, 由引理3.1和引理3.2知

$$\lim_{k \rightarrow \infty} P_{\theta^0}(\Omega_{ki}) = 1, \quad i = 1, 2, 3, \quad \text{且} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} P_{\theta^0}(\Lambda_k) = 1.$$

记 $\Omega = \bigcap_{i=1}^3 \Omega_{ki} \cap \Lambda_k$, 可得

$$\lim_{k \rightarrow \infty} P_{\theta^0}(\Omega) = 1.$$

令

$$G(\theta) = \left(E_{\theta^0} F(X; \theta) - \frac{1}{2}, \omega' E_{\theta^0} F^2(X; \theta) - \frac{1}{3}, E_{\theta^0} F_1(X; \theta) - \frac{1}{N+1} \right)^T,$$

显然 $G(\theta^0) = 0$. 这时方程可写为

$$G(\theta) = \begin{pmatrix} E_{\theta^0} F(X; \theta) - W_1(X; \theta) \\ \omega' E_{\theta^0} F^2(X; \theta) - W_2(X; \theta) \\ E_{\theta^0} F_1(X; \theta) - F_1(X; \theta) \end{pmatrix}. \quad (3.4)$$

由条件 (\mathcal{L}) 及隐函数存在定理知: $\exists \delta_1 (\leq \eta_{\theta^0}), \delta_2 > 0$, 使得当 $\|G(\theta) - G(\theta^0)\| \leq \delta_2$ 时,

$$\|\theta - \theta^0\| \leq \delta_1.$$

且这样的反函数 $G^{-1}(\theta)$ 是唯一的, 连续的.

设 θ 为原方程的一个解, 则当 $k \rightarrow \infty$ 时, (3.4) 式右端

$$\left\| \begin{pmatrix} E_{\theta^0} F(X; \theta) - W_1(X; \theta) \\ \omega' E_{\theta^0} F^2(X; \theta) - W_2(X; \theta) \\ E_{\theta^0} F_1(X; \theta) - F_1(X; \theta) \end{pmatrix} \right\| \leq \varepsilon_1,$$

即 $\|G(\theta)\| \leq \varepsilon_1$. 由 $G^{-1}(\theta)$ 的连续性, $\forall \delta > 0, \exists \varepsilon'$, 取 $\varepsilon = \min(\varepsilon_1, \varepsilon')$, 当 $\|G(\theta) - G(\theta^0)\| \leq \varepsilon$ 时, $\|\theta - \theta^0\| < \delta$. 对 $\forall \omega \in \Omega$, 由方程的正规性知 $\|\hat{\theta}^k - \theta^0\| < \delta$. 由 $\Omega, \Omega_{ki}, i = 1, 2, 3$ 的概念易知

$$\sup_{N \geq k} \|\hat{\theta}^N - \theta^0\| < \delta.$$

从而

$$P_{\theta^0} \left\{ \sup_{N \geq k} \|\hat{\theta}^N - \theta^0\| \leq \delta \right\} \geq P_{\theta^0}(\Omega) \rightarrow 1 \quad (k \rightarrow \infty).$$

由 δ 的任意性知

$$P_{\theta^0} \left(\lim_{N \rightarrow \infty} \|\hat{\theta}^N - \theta^0\| = 0 \right) = 1. \quad \square$$

§4. 三参数Weibull分布修正矩估计的强相合性

对于来自三参数Weibull分布 $X \sim \text{Wei}(x; \beta, \delta, \gamma)$ 的定时截尾样本 $X_{1:N}, X_{2:N}, \dots, X_{r_N:N}$, 讨论参数 β, δ, γ 的修正矩估计(MME)的相合性. 这里我们只考虑 $\delta \geq 1$ 的情形, 这时参数空间为 $\Theta = \{(\beta, \delta, \gamma) : \beta > 0, \delta > 1, \gamma > 0\}$. 设 $\hat{\theta}^N = (\hat{\beta}^N, \hat{\delta}^N, \hat{\gamma}^N)$ 为 (β, δ, γ) 的MME, 显然必有 $\hat{\gamma}^N \leq x_{1:N}$, 所以这里我们只考虑 $x - \gamma \geq 0$ 的情况即可, 这时

$$u_{\theta^0} = \{\theta : \gamma \leq x_{1:N}, \theta \in \Theta\}.$$

下面考虑条件(L)是否成立.

条件1: 显然成立;

条件2: 在模拟过程中, 对数十万组数据的计算表明, 对于符合条件2的前提条件的数据, 方程(1.1)都有唯一的解 $\hat{\theta}^N$, 理论上解的存在唯一性还需进一步研究;

条件3: 对于三参数Weibull分布 $\text{Wei}(x; \beta, \delta, \gamma)$,

$$\begin{aligned} F(x; \theta) &= 1 - \exp \left[- \left(\frac{x - \gamma}{\beta} \right)^\delta \right], \\ \frac{\partial F(x; \theta)}{\partial \beta} &= - \exp \left[- \left(\frac{x - \gamma}{\beta} \right)^\delta \right] \cdot \frac{\delta (x - \gamma)^\delta}{\beta^{\delta+1}}, \\ \frac{\partial F(x; \theta)}{\partial \gamma} &= - \exp \left[- \left(\frac{x - \gamma}{\beta} \right)^\delta \right] \cdot \frac{\delta (x - \gamma)^{\delta-1}}{\beta^\delta}, \\ \frac{\partial F(x; \theta)}{\partial \delta} &= \exp \left[- \left(\frac{x - \gamma}{\beta} \right)^\delta \right] \cdot \left(\frac{x - \gamma}{\beta} \right)^\delta \cdot \ln \left(\frac{x - \gamma}{\beta} \right). \end{aligned}$$

易见

$$\left\| \frac{\partial F(x; \theta)}{\partial \beta} \right\| \leq \frac{\delta (x - \gamma)^\delta}{\beta^{\delta+1}} \triangleq L_{11}(x), \quad \left\| \frac{\partial F(x; \theta)}{\partial \gamma} \right\| \leq \frac{\delta (x - \gamma)^{\delta-1}}{\beta^\delta} \triangleq L_{12}(x).$$

$\forall \theta^0 = (\beta^0, \delta^0, \gamma^0) \in \Theta$, 由于Weibull分布各阶矩存在, 显然 $\int_{\lambda}^{\infty} L_{1j}(x) dF(x, \theta^0) < \infty$, $j = 1, 2$.

又知

$$\left\| \frac{\partial F(x; \theta)}{\partial \delta} \right\| \leq \left(\frac{x - \gamma}{\beta} \right)^\delta \cdot \left\| \ln \left(\frac{x - \gamma}{\beta} \right) \right\|.$$

1° 当 $(x - \gamma)/\beta \geq 1$ 时,

$$\left\| \frac{\partial F(x; \theta)}{\partial \delta} \right\| \leq \left(\frac{x - \gamma}{\beta} \right)^{\delta+1}.$$

2° 当 $(x - \gamma)/\beta < 1$ 时,

$$\lim_{x-\gamma \rightarrow 0} \left(\frac{x - \gamma}{\beta} \right)^\delta \cdot \left\| \ln \left(\frac{x - \gamma}{\beta} \right) \right\| = \lim_{x-\gamma \rightarrow 0} \frac{\left\| \ln \left(\frac{x - \gamma}{\beta} \right) \right\|}{\left(\frac{x - \gamma}{\beta} \right)^{-\delta}} = \lim_{x-\gamma \rightarrow 0} \left(\frac{x - \gamma}{\beta} \right)^\delta = 0.$$

则对 $\forall \varepsilon > 0$, 存在常数 a , 使得当 $x - \gamma < \varepsilon$ 时, $\|\partial F(x; \boldsymbol{\theta}) / \partial \delta\| \leq a$. 又当 $x - \gamma \geq \varepsilon$ 时, $\|\partial F(x; \boldsymbol{\theta}) / \partial \delta\| \leq \ln(\varepsilon / \beta)$. 令 $L_{13}(x) = \max\{[(x - \gamma) / \beta]^{\delta+1}, a, \ln(\varepsilon / \beta)\}$, 显然

$$\left\| \frac{\partial F(x; \boldsymbol{\theta})}{\partial \delta} \right\| \leq L_{13}(x), \quad \int_{\lambda}^{\infty} L_{13}(x) dF(x; \boldsymbol{\theta}^0) < \infty.$$

通过以上讨论, 当 $i = 1$ 时, 条件3成立, 由此易得当 $i = 2, 3$ 时, 条件3也成立. 这里不再赘述.

条件4: 令 $z = (x - \gamma^0) / \beta^0$, $y = z^{\delta^0}$, 因

$$f(x, \boldsymbol{\theta}^0) = \exp \left[- \left(\frac{x - \gamma^0}{\beta^0} \right)^{\delta^0} \right] \cdot \frac{\delta^0 (x - \gamma)^{\delta^0 - 1}}{\beta^0 \delta^0},$$

所以

$$\begin{aligned} E_{\boldsymbol{\theta}^0} \frac{\partial F(X; \boldsymbol{\theta}^0)}{\partial \beta} &= \int_0^{\infty} -\exp(-z^{\delta^0}) \frac{\delta^0}{\beta^0} z^{\delta^0} \cdot \exp(-z^{\delta^0}) dz^{\delta^0} \\ &= -\frac{\delta^0}{4\beta^0} \cdot 2^2 \int_0^{\infty} y^{2-1} e^{-2y} dy \\ &= -\frac{\delta^0}{4\beta^0} \Gamma(2). \end{aligned}$$

类似的

$$E_{\boldsymbol{\theta}^0} \frac{\partial F(X; \boldsymbol{\theta}^0)}{\partial \gamma} = -\frac{\delta^0}{4\beta^0} 2^{1/\delta^0} \Gamma\left(2 - \frac{1}{\delta^0}\right).$$

因

$$\Gamma'(s) = \int_0^{\infty} x^{s-1} e^{-x} \ln x dx, \quad s > 0.$$

可算得

$$E_{\boldsymbol{\theta}^0} \frac{\partial F(X; \boldsymbol{\theta}^0)}{\partial \delta} = \frac{1}{4\delta^0} \Gamma'(2) - \frac{\ln 2}{4} \Gamma(2).$$

类似可得

$$\begin{aligned} E_{\boldsymbol{\theta}^0} \frac{\partial F^2(X; \boldsymbol{\theta}^0)}{\partial \beta} &= -\frac{5}{18} \frac{\delta^0}{\beta^0} \Gamma(2). \\ E_{\boldsymbol{\theta}^0} \frac{\partial F^2(X; \boldsymbol{\theta}^0)}{\partial \gamma} &= \frac{2\delta^0}{\beta^0} (-2^{1/\delta^0-2} + 3^{1/\delta^0-2}) \Gamma\left(2 - \frac{1}{\delta^0}\right). \\ E_{\boldsymbol{\theta}^0} \frac{\partial F^2(X; \boldsymbol{\theta}^0)}{\partial \delta} &= \left(\frac{1}{2\delta^0} - \frac{2}{9\delta^0}\right) \Gamma'(2) - \left(\frac{\ln 2}{2} - \frac{2 \ln 3}{9}\right) \Gamma(2). \end{aligned}$$

注意到 $f_1(x, \boldsymbol{\theta}^0) = N[1 - F(x)]^{N-1} f(x)$, 通过计算可得

$$\begin{aligned} E_{\boldsymbol{\theta}^0} \frac{\partial F_1(X; \boldsymbol{\theta}^0)}{\partial \beta} &= -\frac{N}{(N+1)^2} \frac{\delta^0}{\beta^0} \Gamma(2). \\ E_{\boldsymbol{\theta}^0} \frac{\partial F_1(X; \boldsymbol{\theta}^0)}{\partial \gamma} &= -\frac{N}{(N+1)^{2-1/\delta^0}} \frac{\delta^0}{\beta^0} \Gamma\left(2 - \frac{1}{\delta^0}\right). \\ E_{\boldsymbol{\theta}^0} \frac{\partial F_1(X; \boldsymbol{\theta}^0)}{\partial \delta} &= \frac{N}{\delta^0(N+1)^2} \Gamma'(2) - \frac{N \ln(N+1)}{(N+1)^2} \Gamma(2). \end{aligned}$$

又 $\Gamma(2) = 1$, 从而

$$\begin{aligned}
 & \det(A(\theta^0)) \\
 = & \omega' \cdot \begin{vmatrix} -\frac{\delta^0}{4\beta^0}\Gamma(2) & -\frac{\delta^0}{4\beta^0}2^{1/\delta^0}\Gamma\left(2-\frac{1}{\delta^0}\right) & \frac{1}{4\delta^0}\Gamma'(2)-\frac{\ln 2}{4}\Gamma(2) \\ -\frac{5}{18}\frac{\delta^0}{\beta^0}\Gamma(2) & \frac{2\delta^0}{\beta^0}(-2^{1/\delta^0-2}+3^{1/\delta^0-2})\Gamma\left(2-\frac{1}{\delta^0}\right) & \left(\frac{1}{2\delta^0}-\frac{2}{9\delta^0}\right)\Gamma'(2)-\left(\frac{\ln 2}{2}-\frac{2\ln 3}{9}\right)\Gamma(2) \\ -\frac{N}{(N+1)^2}\frac{\delta^0}{\beta^0}\Gamma(2) & -\frac{N}{(N+1)^{2-1/\delta^0}}\frac{\delta^0}{\beta^0}\Gamma\left(2-\frac{1}{\delta^0}\right) & \frac{N}{\delta^0(N+1)^2}\Gamma'(2)-\frac{N\ln(N+1)}{(N+1)^2}\Gamma(2) \end{vmatrix} \\
 = & \frac{\omega'}{18\delta^0}\left(\frac{\delta^0}{\beta^0}\right)^2\Gamma\left(2-\frac{1}{\delta^0}\right)\Gamma'(2)\frac{N}{(N+1)^2}\begin{vmatrix} 1 & 2^{1/\delta^0} & 1 \\ -1 & -3^{1/\delta^0} & -1 \\ 1 & (N+1)^{1/\delta^0} & 1 \end{vmatrix} \\
 & -\frac{\omega'}{18}\left(\frac{\delta^0}{\beta^0}\right)^2\Gamma\left(2-\frac{1}{\delta^0}\right)\frac{N}{(N+1)^2}\begin{vmatrix} 1 & 2^{1/\delta^0} & \ln 2 \\ -1 & -3^{1/\delta^0} & -\ln 3 \\ 1 & (N+1)^{1/\delta^0} & \ln(N+1) \end{vmatrix} \\
 = & -\frac{\omega'}{18}\left(\frac{\delta^0}{\beta^0}\right)^2\Gamma\left(2-\frac{1}{\delta^0}\right)\frac{N}{(N+1)^2}[3^{1/\delta^0}(-\ln(N+1)+\ln 2) \\
 & +2^{1/\delta^0}(\ln(N+1)-\ln 3)+(N+1)^{1/\delta^0}(\ln 3-\ln 2)].
 \end{aligned}$$

因 $\Gamma(2-1/\delta^0) \neq 0$, 若 $|A(\theta^0)| = 0$, 必有

$$((N+1)^{1/\delta^0}-3^{1/\delta^0})(\ln(N+1)-\ln 2) = ((N+1)^{1/\delta^0}-2^{1/\delta^0})(\ln(N+1)-\ln 3).$$

可化为

$$\frac{(e^{\ln(N+1)})^{1/\delta^0} - (e^{\ln 3})^{1/\delta^0}}{\ln(N+1) - \ln 3} = \frac{(e^{\ln(N+1)})^{1/\delta^0} - (e^{\ln 2})^{1/\delta^0}}{\ln(N+1) - \ln 2}.$$

令 $f(x) = (e^x)^{1/\delta^0}$, 由中值定理, 存在 $\xi \in (\ln 3, \ln(N+1))$, 使得

$$f'(\xi) = \frac{(e^{\ln(N+1)})^{1/\delta^0} - (e^{\ln 3})^{1/\delta^0}}{\ln(N+1) - \ln 3} = \frac{(e^{\ln(N+1)})^{1/\delta^0} - (e^{\ln 2})^{1/\delta^0}}{\ln(N+1) - \ln 2}.$$

由于 $\delta^0 \geq 1$, $f'(x) = (1/\delta^0) \cdot (e^x)^{1/\delta^0} > 0$, 即 $f(x)$ 严格递增, 若出现上述情况, 必有 $f'(x) = c_1$, c 为常数. 这时 $f(x) = c_1x + c_2$, 显然不可能. 故 $|A(\theta^0)| \neq 0$.

至此, 证明了条件 (\mathcal{L}) 成立.

通过上述讨论知, 对于失效率是递增的三参数Weibull分布, 其参数MME是强相合的.

参 考 文 献

- [1] Lawless, J.F., *Statistical Models and Methods for Lifetime Data*, John Wiley, 1982.

- [2] Cohen, C.A. and Whitten, B., Modified maximum likelihood and modified moment estimators for the three-parameter Weibull distribution, *Communications in Statistics - Theory and Methods*, **11(23)** (1982), 2631–2656.
- [3] 陈家鼎, 关于截尾样本情形下的最大似然估计, *应用数学学报* **3(4)**(1980), 306–321.
- [4] 陈家鼎, 随机截尾情形下Weibull分布参数的最大似然估计的相合性, *应用概率统计*, **5(3)**(1989), 226–233.
- [5] 陈迪, 截尾样本的三参数Weibull分布参数的近似极大似然估计(AMLE), *数理统计与应用概率*, **6(3)** (1991), 368–381.
- [6] Elisa, T.L., *Statistical Methods for Survival Data Analysis*, John Wiley, 1992.
- [7] Sirvanci, M. and Yang, G., Estimation of the Weibull parameters under type I censoring, *Journal of the American Statistical Association*, **79(385)**(1984), 183–187.
- [8] 孙丽芬, 在定数截尾样本下三参数威布尔分布的矩估计, *应用概率统计*, **19(3)**(2003), 293–297.
- [9] 孙丽芬, 汤银才, 在定时截尾样本下三参数威布尔分布的矩估计, *数学的实践与认识*, **40(22)**(2010), 156–161.
- [10] Sen, P.K. and Singer, J.M., *Large Sample Methods in Statistics*, New York, Chapman and Hall, 1993.
- [11] Lehmann, E.L., *Elements of Large-Sample Theory*, Springer-Verlag New York, Inc., 1999.

Strong Consistency of Modified Moment Estimation for Three Weibull Distributions under Type I Censored Samples

SUN LIBIN

(School of Mathematics and Statistics, Jiangsu Normal University, Xuzhou, 221116)

TANG YINCAI

(School of Finance and Statistics, East China Normal University, Shanghai, 200142)

This paper discussed the strong consistency of the modified moment estimation (MME) of the parameters in the three-parameter Weibull distribution under type I censored samples. Firstly, the strong consistency of the modified sample moments are proved. Then a condition (\mathcal{L}) is given and it is proved that if $F(x; \theta_1, \theta_2, \theta_3)$ meets condition (\mathcal{L}), then the MME is strong consistent. Lastly, when $\delta \geq 1$, $\text{Wei}(x; \beta, \delta, \gamma)$ is proved to satisfy the condition (\mathcal{L}). Thus the MME $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \hat{\theta}_3$ is strong consistent provided that the shape parameter $\delta \geq 1$.

Keywords: Three-parameter Weibull distribution, type I censored samples, the modified moment estimators, strong consistent.

AMS Subject Classification: 62N02.