应用概率统计　第二十九卷
第二期　2013年4月

Chinese Journal of Applied Probability
and Statistics Vol.29 No.2 Apr. 2013

《应用概率统计》版权所用

计数型截尾序贯检验的样本空间排序法 *

胡　思　贵

(贵阳医学院基础医学院, 贵阳, 550004)

摘　要

针对IEC1123所建议的截尾序贯检验存在未能使平均试验次数达到最少等不足之处, 在对最优截尾序贯检验进行精确定义的基础上, 通过在截尾序贯样本空间建立序关系, 采取逐点优化的方式得到截尾序贯检验的最优化方案. 计算结果表明, 新方法与IEC1123所建议的截尾序贯抽样方案及序贯网图检验(SMT)相比, 无论是在序贯检验截尾值的控制, 还是在减少检验的平均试验次数等方面, 都有十分明显的改进.

关键词: 成败型试验, 序贯分析, 截尾检验, IEC1123, 样本空间排序法.

学科分类号: O212.3.

§1. 引　　言

本文讨论成败型试验成功率P的假设检验问题. 在航空、航天、军工等领域, 如对导弹的命中率、火工品的可靠度等进行质量验收与保证性试验中, 由于试验件比较昂贵, 因此, 如何减少试验次数以降低试验成本就成为工程人员及科技工作者共同关心的问题[1–5]. 对成功率P, 讨论如下的统计假设:

$$H_0 : P = P_0 \quad \text{vs} \quad H_1 : P = P_1 \qquad (P_0 > P_1). \tag{1.1}$$

对统计假设, Wald教授(1947)提出了一种有效的序贯概率比检验(SPRT), 该检验为两条序贯曲线[1]

$$\begin{cases} L_1 : S = h_1 + sn \\ L_2 : S = h_2 + sn \end{cases} \qquad (h_2 < h_1), \tag{1.2}$$

其中, h_1, h_2, s为常数, n为试验次数, 记X_i为第i次试验的结果, 当$X_i = 1$时表示试验成功, 当$X_i = 0$时表示试验失败, 则$S_n = \sum\limits_{i=1}^{i=n} X_i$, $n = 1, 2, 3, \ldots$表示前n次试验中的成功次数. SPRT的检验规则为: 当$S_n \le h_2 + sn$, 拒绝H_0, 当$S_n \ge h_1 + sn$, 接受H_0, 当$h_2 + sn < S_n < h_1 + sn$时, 继续试验. SPRT的优点在于可同时对检验犯两类错误概率的上限α, β进行控制(本文中, (α, β)亦称为序贯检验的检验水平), 且保证了在P_0及P_1处的平均试验次数最少. 但SPRT也存在缺陷, 其主要表现为[6, 7]对最大试验次数无法进行控制, 即最大试验

*贵州省科学技术基金项目(黔科合J字[2011]2094号)资助.
本文2012年3月16日收到, 2012年7月9日收到修改稿.

《应用概率统计》版权所用

次数可能为无穷, 这在实际应用中是不现实的. 因此, 如国际标准IEC1123 (1991), 中国国家标准GB8051 (2002)等[4, 5]均采用截尾的序贯检验方法, 即对最大的试验次数进行控制. 其中, IEC1123是目前国际公认且被广泛采用的抽样检验标准, 研究表明, 其提供的截尾序贯抽样检验方案仍存在如下不足:

1) IEC1123提供的序贯检验方案的截尾值N_t(最大试验次数)仍然很大. 如当$P_0 = 0.9995$, $P_1 = 0.9993$, $(\alpha, \beta) = (0.05, 0.05)$时, $N_t = 72574$次[4]. 濮晓龙等[6–8]的研究表明, IEC1123给出的大多数试验方案的截尾值N_t是可以减少的.

2) IEC1123提供的截尾序贯检验方案往往不是最优的[9, 10]. 即对给定的检验水平(α, β)及截尾值N_t, 由于IEC1123给出的检验方案犯两类错误的真实概率与检验水平之间有较大差异, 以至于其对检验水平未能充分利用, 因此, 其建议的方案的平均试验次数往往未能达到最少.

3) IEC1123提供的序贯检验方案中, 存在检验犯两类错误的真实概率α', β'超过序贯检验水平(α, β)的情形[6–8], 实际上, 此时的检验方案已不是对应检验水平(α, β)的检验了.

4) IEC1123提供的序贯检验方案必须要求检验水平中的α与β相等, 而当$\alpha \neq \beta$时, 并没有提供解决方案, 同时IEC1123根据P_0, P_1, (α, β)的不同搭配只给出了共160种方案, 远未达到实际应用中对P_0, P_1, (α, β)进行任意选择的理想形式.

针对IEC1123上述不足, 在对最优截尾序贯检验进行精确定义的基础上, 通过在截尾序贯样本空间建立序关系, 采用逐点优化的方式寻找统计假设(1.1)的最优截尾序贯检验, 从而解决IEC1123所建议的序贯检验方案存在的上述缺陷.

§2. 最优截尾序贯检验

通过对文献[1–10]中各种形式的截尾序贯检验进行研究与总结, 现给出成功率P截尾序贯检验比较严格的定义如下:

定义 2.1 设$L_1, L_2, \ldots, L_{N_t}$和$U_1, U_2, \ldots, U_{N_t}$为两列整数, 且满足

$$\begin{cases} 0 \leq L_{i+1} - L_i \leq 1,\ 0 \leq U_{i+1} - U_i \leq 1, & i = 1, 2, \ldots, N_t - 1; \\ L_i + 2 \leq U_i, & i = 1, 2, \ldots, N_t - 1; \\ L_{N_t} + 1 = U_{N_t}. \end{cases} \tag{2.1}$$

记$M = \inf\{n | S_n \geq U_n \text{ 或 } S_n \leq L_n, n = 1, 2, \ldots, N_t\}$, 则当$S_M \leq L_M$时, 拒绝$H_0$, 当$S_M \geq U_M$时, 接受$H_0$, 而当$L_n < S_n < U_n$ $(n = 1, 2, \ldots, N_t - 1)$时, 继续试验. 其中, N_t为序贯检验的截尾值, U_{N_t}为序贯检验的成功判别值(进行N_t次试验时, 接受H_0所需的最小的成功试验次数), 称

$$T(N_t, U_{N_t}) = (U_1, U_2, \ldots, U_{N_t}; L_1, L_2, \ldots, L_{N_t}) \tag{2.2}$$

为截尾值为N_t, 成功判别值为U_{N_t}的截尾序贯检验(TST), $(U_1, U_2, \ldots, U_{N_t})$为截尾序贯检验上边界, $(L_1, L_2, \ldots, L_{N_t})$为截尾序贯检验下边界.

记$D_n=\{S_n\le L_n, L_i<S_i<U_i, i=1,2,\ldots,n-1\}$, $\widetilde{D}_n=\{S_n\ge U_n, L_i<S_i<U_i, i=1,2,\ldots,n-1\}$, $n=1,2,\ldots N_t$, 则假设(1.1)式的截尾序贯检验T犯两类错误的真实概率α',β'分别为

$$\begin{cases}\alpha'(T)=\sum\limits_{n=1}^{n=N_t}\mathsf{P}\{D_n|P_0,T\};\\ \beta'(T)=\sum\limits_{n=1}^{n=N_t}\mathsf{P}\{\widetilde{D}_n|P_1,T\}.\end{cases}\tag{2.3}$$

检验T的平均试验次数$\mathsf{E}(M|P,T)$为

$$\begin{cases}\mathsf{E}(M|P_0,T)=\sum\limits_{n=1}^{n=N_t}n(\mathsf{P}\{D_n|P_0,T\}+\mathsf{P}\{\widetilde{D}_n|P_0,T\});\\ \mathsf{E}(M|P_1,T)=\sum\limits_{n=1}^{n=N_t}n(\mathsf{P}\{D_n|P_1,T\}+\mathsf{P}\{\widetilde{D}_n|P_1,T\}).\end{cases}\tag{2.4}$$

定义 2.2 对给定的检验水平(α,β)及截尾序贯检验T, 若(1.1)检验犯两类错误的真实概率满足$\alpha'(T)\le\alpha$, $\beta'(T)\le\beta$, 称T为(1.1)检验水平为(α,β)的截尾序贯检验.

在假设检验中, 我们总是希望检验犯错误的概率控制在给定水平时, 检验所需平均试验次数尽可能地小[11], 因此, 最优截尾序贯检验应为在给定检验水平为(α,β)的截尾序贯检验$T(N_t,U_{N_t})$中, 检验平均试验次数达到最小的检验.

定义 2.3 设$T^{\mathrm{LA}}(N_t,U_{N_t})$为检验水平为$(\alpha,\beta)$的截尾序贯检验, 若对任意检验水平为$(\alpha,\beta)$的截尾序贯检验$T(N_t,U_{N_t})$, 均有

$$\begin{cases}\mathsf{E}(M|P_0,T^{\mathrm{LA}})\le\mathsf{E}(M|P_0,T);\\ \mathsf{E}(M|P_1,T^{\mathrm{LA}})\le\mathsf{E}(M|P_1,T),\end{cases}\tag{2.5}$$

则称$T^{\mathrm{LA}}(N_t,U_{N_t})$为统计假设(1.1)的截尾值为$N_t$, 成功判别值为$U_{N_t}$, 检验水平为$(\alpha,\beta)$时的平均试验次数最优的截尾序贯检验(LOANTST).

定义 2.4 设T^{A}为截尾值为N_t, 检验水平为(α,β)的截尾序贯检验, 若对任意截尾值为N_t, 检验水平为(α,β)的截尾序贯检验T, 均有

$$\begin{cases}\mathsf{E}(M|P_0,T^{\mathrm{A}})\le\mathsf{E}(M|P_0,T);\\ \mathsf{E}(M|P_1,T^{\mathrm{A}})\le\mathsf{E}(M|P_1,T),\end{cases}\tag{2.6}$$

则称T^{A}为统计假设(1.1)的截尾值为N_t, 检验水平为(α,β)的平均试验次数最优的截尾序贯检验(OANTST).

由定义2.3与定义2.4可以看出T^{LA}与T^{A}之间有如下关系:

$$\begin{cases}\mathsf{E}(M|P_0,T^{\mathrm{A}})=\min\limits_{0\le U_{N_t}\le N_t}\{\mathsf{E}(M|P_0,T^{\mathrm{LA}}(N_t,U_{N_t})\};\\ \mathsf{E}(M|P_1,T^{\mathrm{A}})=\min\limits_{0\le U_{N_t}\le N_t}\{\mathsf{E}(M|P_1,T^{\mathrm{LA}}(N_t,U_{N_t})\}.\end{cases}\tag{2.7}$$

《应用概率统计》版权所用

《应用概率统计》版权所用

对统计假设(1.1)的经典检验$C(N_t,U_{N_t})$ (N_t为固定的试验次数, 若$S_{N_t}\geq U_{N_t}$, 则接受H_0, 反之, 则拒绝H_0), 若当第N_t-1次试验时已有U_{N_t}次试验成功, 则无论第N_t次试验结果如何, 总可以得出接受H_0的统计结论, 同理可推至第$N_t-2,N_t-3,\ldots,U_{N_t}$的情形; 对拒绝$H_0$情形可类似讨论. 因此, 对经典检验$C(N_t,U_{N_t})$, 很自然地可以将其扩展为对应的截尾序贯检验.

定义 2.5 对(1.1)式的经典检验$C(N_t,U_{N_t})$, 称

$$T^{\mathrm{E}}=\begin{pmatrix} 2_1 & 3_2 & \cdots & U_{N_tU_{N_t}-1} & U_{N_tU_{N_t}} & U_{N_tU_{N_t}+1} & \cdots & U_{N_tN_t} \\ -1_1 & -1_2 & \cdots & -1_{N_t-U_{N_t}} & 0_{N_t-U_{N_t}+1} & 1_{N_t-U_{N_t}+2} & \cdots & (U_{N_t}-1)_{N_t} \end{pmatrix} \tag{2.8}$$

为经典检验$C(N_t,U_{N_t})$的截尾序贯检验扩展(ETST), 其中, $-1_{N_t-U_{N_t}}$表示当第$N_t-U_{N_t}$次试验时共有-1次成功时拒绝H_0, $N_t-U_{N_t}$次试验时不可能出现-1次成功, 因此, 此时并不能做出拒绝H_0的统计判断, 所以称$-1_1,-1_2,\ldots,-1_{N_t-U_{N_t}}$及$2_1,3_2,\ldots,U_{N_tU_{N_t}-1}$为截尾序贯检验的虚边界点. 而$0_{N_t-U_{N_t}+1}$表示当第$N_t-U_{N_t}+1$次试验时共为0次成功时, 可以做出拒绝$H_0$统计判决, 所以, $0_{N_t-U_{N_t}+1},1_{N_t-U_{N_t}+2},\ldots,(U_{N_t}-1)_{N_t}$及$U_{N_tU_{N_t}},\ldots,U_{N_tN_t}$为截尾序贯检验的实边界点.

例 1 经典检验$C(15,13)$的截尾序贯检验扩展T^{E}为

$$T^{\mathrm{E}}=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 13 & 13 & 13 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}. \tag{2.9}$$

对截尾序贯检验, 现介绍如下一些重要结果.

定理 2.1 对(1.1)的经典检验$C(N_t,U_{N_t})$, 记$\mathsf{P}\{S_{N_t}<U_{N_t}|P_0\}=\alpha'$, $\mathsf{P}\{S_{N_t}\geq U_{N_t}|P_1\}=\beta'$, T^{E}为$C(N_t,U_{N_t})$的截尾序贯检验扩展, 则有

$$\begin{cases} \sum\limits_{n=1}^{n=N_t}\mathsf{P}\{D_n|P_0,T^{\mathrm{E}}\}=\alpha'; \\ \sum\limits_{n=1}^{n=N_t}\mathsf{P}\{\widetilde{D}_n|P_1,T^{\mathrm{E}}\}=\beta', \end{cases} \tag{2.10}$$

且对任意的$P\in(0,1)$, 有$\mathsf{E}(M|T^{\mathrm{E}},P)\leq N_t$.

证明: 对检验T^{E}及任意的$P\in(0,1)$, 显然有

$$\begin{cases} \mathsf{P}\{D_n|P,T^{\mathrm{E}}\}=0, & n=1,2,\ldots,N_t-U_{N_t}; \\ \mathsf{P}\{\widetilde{D}_n|P,T^{\mathrm{E}}\}=0, & n=1,2,\ldots,U_{N_t}-1; \\ D_n\in\{S_{N_t}<U_{N_t}\}, & n=N_t-U_{N_t}+1,N_t-U_{N_t}+2,\ldots,N_t; \\ \widetilde{D}_n\in\{S_{N_t}\geq U_{N_t}\}, & n=U_{N_t},U_{N_t}+1,\ldots,N_t. \end{cases}$$

《应用概率统计》版权所用

又$\{S_{N_t} < U_{N_t}\} = \sum\limits_{n=1}^{n=N_t} D_n$, $\{S_{N_t} \geq U_{N_t}\} = \sum\limits_{n=1}^{n=N_t} \widetilde{D}_n$及$D_i \cap D_j = \phi$, $\widetilde{D}_i \cap \widetilde{D}_j = \phi$ $(i \neq j)$, 由概率加法性质可知

$$\begin{cases} \sum\limits_{n=1}^{n=N_t} \mathsf{P}\{D_n|P_0, T^{\mathrm{E}}\} = \mathsf{P}\{S_{N_t} < U_{N_t}|P_0\} = \alpha'; \\ \sum\limits_{n=1}^{n=N_t} \mathsf{P}\{\widetilde{D}_n|P_1, T^{\mathrm{E}}\} = \mathsf{P}\{S_{N_t} \geq U_{N_t}|P_1\} = \beta'. \end{cases}$$

对任意的$P \in (0,1)$, 易知$\mathsf{P}\{D_n|P, T^{\mathrm{E}}\} \geq 0$, $\mathsf{P}\{\widetilde{D}_n|P, T^{\mathrm{E}}\} \geq 0$及$\sum\limits_{n=1}^{n=N_t}(\mathsf{P}\{D_n|P, T^{\mathrm{E}}\} + \mathsf{P}\{\widetilde{D}_n|P, T^{\mathrm{E}}\}) = 1$, 故$\mathsf{E}(M|P, T^{\mathrm{E}}) = \sum\limits_{n=1}^{n=N_t} n(\mathsf{P}\{D_n|P, T^{\mathrm{E}}\} + \mathsf{P}\{\widetilde{D}_n|P, T^{\mathrm{E}}\}) \leq N_t$. □

定理2.1说明序贯检验扩展$T^{\mathrm{E}}(N_t, U_{N_t})$相对于经典检验$C(N_t, U_{N_t})$来说, 检验犯两类错误的概率没有任何改变, 但却减少了检验的平均试验次数.

定理 2.2 设序贯检验$T_1(N_t, U_{N_t})$及$T_2(N_t, U_{N_t})$的检验犯两类错误的真实概率分别为(α_1', β_1'), (α_2', β_2').

i) 若对某一$i_0 \in \{1, 2, \ldots, N_t - 1\}$, 有$L_{i_0}(T_1) \geq L_{i_0}(T_2)$, 当$i \neq i_0$时, 有$L_i(T_1) = L_i(T_2)$; 对任意$j \in \{1, 2, \ldots, N_t - 1\}$, 有$U_j(T_1) = U_j(T_2)$, 则$\alpha_1' \geq \alpha_2'$, $\beta_1' \leq \beta_2'$, 且

$$\begin{cases} \mathsf{E}(M|P_0, T_1) \leq \mathsf{E}(M|P_0, T_2); \\ \mathsf{E}(M|P_1, T_1) \leq \mathsf{E}(M|P_1, T_2). \end{cases} \tag{2.11}$$

ii) 若对某一$j_0 \in \{1, 2, \ldots, N_t - 1\}$, 有$U_{j_0}(T_1) \leq U_{j_0}(T_2)$, 当$i \neq j_0$时, 有$U_j(T_1) = U_j(T_2)$; 对任意$i \in \{1, 2, \ldots, N_t - 1\}$, 有$L_i(T_1) = L_i(T_2)$, 则$\alpha_1' \leq \alpha_2'$, $\beta_1' \geq \beta_2'$, 且

$$\begin{cases} \mathsf{E}(M|P_0, T_1) \leq \mathsf{E}(M|P_0, T_2); \\ \mathsf{E}(M|P_1, T_1) \leq \mathsf{E}(M|P_1, T_2). \end{cases} \tag{2.12}$$

证明: 这里只对情形i)进行证明, ii)的证明类似.

记$\gamma_1 = \sum\limits_{n=i_0+1}^{n=N_t} \mathsf{P}\{\widetilde{D}_n|D_{i_0} = L_{i_0}(T_1), P_0, T_2\}$, 显然, $\gamma_1 \geq 0$, 则

$$\alpha_1' = \sum_{n=1}^{n=N_t} \mathsf{P}\{D_n|P_0, T_1\} = \alpha_2' + \gamma_1 \geq \alpha_2',$$

即$\alpha_1' \geq \alpha_2'$.

$$\begin{aligned} \mathsf{E}(M|P_0, T_1) &= \mathsf{E}(M|P_0, T_2) - \sum_{n=i_0+1}^{n=N_t} (n - i_0)(\mathsf{P}\{D_n|D_{i_0} = L_{i_0}(T_1), P_0, T_2\} \\ &\quad + \mathsf{P}\{\widetilde{D}_n|D_{i_0} = L_{i_0}(T_1), P_0, T_2\}) \\ &\leq \mathsf{E}(M|P_0, T_2), \end{aligned}$$

即$\mathsf{E}(M|P_0,T_1)\le\mathsf{E}(M|P_0,T_2)$.

类似地, 记$\gamma_2=\sum\limits_{n=i_0+1}^{n=N_t}\mathsf{P}\{\widetilde{D}_n|D_{i_0}=L_{i_0}(T_1),P_1,T_2\}$, $\gamma_2\ge0$, 所以,

$$\beta_1'=\sum_{n=1}^{n=N_t}\mathsf{P}\{\widetilde{D}_n|P_1,T_1\}=\beta_2'-\gamma_2\le\beta_2',$$

即$\beta_1'\le\beta_2'$.

$$\begin{aligned}\mathsf{E}(M|P_1,T_1) &= \mathsf{E}(M|P_1,T_2)-\sum_{n=i_0+1}^{n=N_t}(n-i_0)(\mathsf{P}\{D_n|D_{i_0}=L_{i_0}(T_1),P_1,T_2\}\\ &\quad+\mathsf{P}\{\widetilde{D}_n|D_{i_0}=L_{i_0}(T_1),P_1,T_2\})\\ &\le \mathsf{E}(M|P_1,T_2),\end{aligned}$$

即$\mathsf{E}(M|P_1,T_1)\le\mathsf{E}(M|P_1,T_2)$. □

定理2.2说明, 在对截尾序贯检验进行优化过程中, 当增大序贯检验下边界点时, 犯第一类错误的真实概率α'不减, 犯第二类错误的真实概率β'不增; 当减小截尾序贯检验上边界点时, 结论相反. 但无论是增大下边界点还是减小上边界点, 都能减小平均的试验次数.

定理 2.3 设T^{LA}为统计假设(1.1)的截尾值为N_t, 成功判别值为U_{N_t}, 检验水平为(α,β)的LOANTST. 则

i) 当增大T^{LA}的下边界点时得到的截尾序贯检验记为T时, 则有$\alpha'(T)>\alpha$.

ii) 当减小T^{LA}的上边界点时得到的截尾序贯检验记为T时, 则有$\beta'(T)>\beta$.

证明: (反证法) i)若$\alpha'(T)\le\alpha$, 且由条件, 检验T的下边界点大于T^{LA}的下边界点, 由定理2.2知, $\alpha'(T)\le\alpha$, $\beta'(T)\le\beta$, 且

$$\begin{cases}\mathsf{E}(M|P_0,T)\le\mathsf{E}(M|P_0,T^{\mathrm{LA}});\\ \mathsf{E}(M|P_1,T)\le\mathsf{E}(M|P_1,T^{\mathrm{LA}}).\end{cases}$$

由LOANTST的定义知, T^{LA}不是(1.1)式的截尾值为N_t, 检验水平为α,β的LOANTST, 这与定理的条件矛盾. ii)的证明类似. □

定理2.3说明给定检验水平(α,β)下的LOANTST T^{LA}的上下边界点都不能再进行优化了. 易见, 此定理可以作为对截尾序贯检验进行逐点优化过程中, 程序迭代结束的判别条件.

§3. 序贯检验样本空间的序关系

根据上述定理2.1、2.2, 为寻求统计假设(1.1)的截尾值为N_t, 成功判别值为U_{N_t}的LOANTST T^{LA}, 可以从经典检验$C(N_t,U_{N_t})$的序贯检验扩展T^{E}出发, 采用逐点优化的方式获

《应用概率统计》版权所用

《应用概率统计》版权所用

得. 为实现这一过程, 需要在截尾序贯检验的样本空间建立一定的序关系, 本节将对这一问题及最优截尾序贯检验的优化过程进行论述.

为方便讨论, 现将$C(N_t, U_{N_t})$的序贯检验扩展T^{E}记为T_0如下:

$$T_0 = \begin{pmatrix} U_1 & U_2 & U_3 & \cdots & U_{N_t-1} & U_{N_t} \\ L_1 & L_2 & L_3 & \cdots & L_{N_t-1} & L_{N_t} \end{pmatrix}. \tag{3.1}$$

易知, T_0中共包含$\sum\limits_{i=1}^{i=N_t}(U_i - L_i + 1)$个样本点, 边界点个数为$2N_t$, 对序贯检验$T_0$的优化必然从边界点开始. 优化后的检验记为$T_1$, 按优化点为上、下检验边界点可分为如下两种情形:

i) 若优化的点为序贯检验上边界点U_i, 优化后的截尾序贯检验记为T_{1,U_i}, 则

$$T_{1,U_i} = \begin{pmatrix} U_1 & U_2 & \cdots & U_{i-1} & U_i - 1 & U_{i+1} & \cdots & U_{N_t} \\ L_1 & L_2 & \cdots & L_{i-1} & L_i & L_{i+1} & \cdots & L_{N_t} \end{pmatrix}. \tag{3.2}$$

ii) 若优化的点为序贯检验下边界点L_i, 优化后的截尾序贯检验记为T_{1,L_i}, 则

$$T_{1,L_i} = \begin{pmatrix} U_1 & U_2 & \cdots & U_{i-1} & U_i & U_{i+1} & \cdots & U_{N_t} \\ L_1 & L_2 & \cdots & L_{i-1} & L_i + 1 & L_{i+1} & \cdots & L_{N_t} \end{pmatrix}. \tag{3.3}$$

如何对U_i或L_i进行选择才是合理的呢?

为保证T_0采用(3.2)或(3.3)优化后得到的T_1满足定义2.1对截尾序贯检验定义的要求, 必须排除如下三种情形对应的边界点.

1) 当$U_i - L_i \le 2$, $i = 1, 2, \ldots, N_t$时, U_i与L_i都不能作为优化点, 否则T_1将不再是截尾值为N_t的序贯检验了.

2) 在T_0的下边界点L_i中, 当$L_i = -1$时不能作为优化点, 除非满足$L_i = -1$且$L_{i+1} = 0$; 在T_0的上边界点U_i中, 当$U_i > i$时不能作为优化点, 除非满足$U_i > i$且$U_{i+1} = i + 1$.

3) 在T_0的下边界点L_i中, 当$L_i = L_{i+1}$时, L_i不能作为优化点; 在T_0的上边界点U_i, 当$U_i = U_{i-1}$时, U_i不能作为优化点.

定义 3.1 称如上三种情形之外的边界点称为T_0的可能优化点. 由于可能的优化点有上、下边界点之分, 故将其记为$\{L_i, i \in \Theta_0\} \cup \{U_i, i \in \Theta_1\}$, Θ_0, Θ_1为对应的指标集.

由(2.3), (2.4)结果, 知T_0及T_1犯两类错误的真实概率及平均试验次数为

$$\begin{cases} \alpha'(T_0) = \sum\limits_{n=1}^{n=N_t} \mathsf{P}\{D_n | P_0, T_0\}; \\ \beta'(T_0) = \sum\limits_{n=1}^{n=N_t} \mathsf{P}\{\widetilde{D}_n | P_1, T_0\}, \end{cases} \tag{3.4}$$

$$\begin{cases} \alpha'(T_1) = \sum\limits_{n=1}^{n=N_t} \mathsf{P}\{D_n | P_0, T_1\}; \\ \beta'(T_1) = \sum\limits_{n=1}^{n=N_t} \mathsf{P}\{\widetilde{D}_n | P_1, T_1\}, \end{cases} \tag{3.5}$$

$$\begin{cases} \mathsf{E}(M|P_0,T_0)=\sum\limits_{n=1}^{n=N_t} n(\mathsf{P}\{D_n|P_0,T_0\}+\mathsf{P}\{\widetilde{D}_n|P_0,T_0\}); \\ \mathsf{E}(M|P_1,T_0)=\sum\limits_{n=1}^{n=N_t} n(\mathsf{P}\{D_n|P_1,T_0\}+\mathsf{P}\{\widetilde{D}_n|P_1,T_0\}), \end{cases} \tag{3.6}$$

$$\begin{cases} \mathsf{E}(M|P_0,T_1)=\sum\limits_{n=1}^{n=N_t} n(\mathsf{P}\{D_n|P_0,T_1\}+\mathsf{P}\{\widetilde{D}_n|P_0,T_1\}); \\ \mathsf{E}(M|P_1,T_1)=\sum\limits_{n=1}^{n=N_t} n(\mathsf{P}\{D_n|P_1,T_1\}+\mathsf{P}\{\widetilde{D}_n|P_1,T_1\}). \end{cases} \tag{3.7}$$

为从T_0的可能优化点中找出最优点进行优化, 需对可能优化点赋予一定的权重. 通过分析及模拟计算研究知, 最优点的选择应使得T_0与T_1犯两类错误真实概率的变化量$\alpha'(T_1)-\alpha'(T_0)$, $\beta'(T_1)-\beta'(T_0)$相对教小, 在P_0,P_1处的平均试验次数的变化量$\mathsf{E}(M|P_0,T_0)-\mathsf{E}(M|P_0,T_1)$, $\mathsf{E}(M|P_1,T_0)-\mathsf{E}(M|P_1,T_1)$相对较大, 同时还需考虑检验$T_0$检验犯两类错误的真实概率$\alpha'(T_0)$, $\beta'(T_0)$与检验水平(α,β)之间差值大小等因素. 本文采用的T_0的上下边界点的权重函数为

$$g(L_i)=\frac{[\mathsf{E}(M|P_0,T_0)-\mathsf{E}(M|P_0,T_{1,L_i})]\times[\alpha-\alpha'(T_0)]}{[\alpha'(T_{1,L_i})-\alpha'(T_0)]\times[\beta'(T_0)-\beta'(T_{1,L_i})]}, \qquad i\in\Theta_0, \tag{3.8}$$

$$g(U_j)=\frac{[\mathsf{E}(M|P_1,T_0)-\mathsf{E}(M|P_1,T_{1,U_j})]\times[\beta-\beta'(T_0)]}{[\beta'(T_{1,U_j})-\beta'(T_0)]\times[\alpha'(T_0)-\alpha'(T_{1,U_j})]}, \qquad j\in\Theta_1. \tag{3.9}$$

现分三种情况进行讨论, 且记选出的最优点为W_1:

i) 当$\alpha'(T_0)<\alpha$且$\beta'(T_0)\geq\beta$, W_1从下边界点的可能优化点中选择权重最大者, 即

$$g(W_1)=\mathrm{Max}\{g(L_i),i\in\Theta_0\}. \tag{3.10}$$

ii) 当$\alpha'(T_0)\geq\alpha$且$\beta'(T_0)<\beta$, W_1从上边界点的可能优化点中选择权重最大者, 即

$$g(W_1)=\mathrm{Max}\{g(U_j),j\in\Theta_1\}. \tag{3.11}$$

iii) 当$\alpha'(T_0)\leq\alpha$且$\beta'(T_0)\leq\beta$, W_1从上可能边界点或下可能边界点中选择权重最大者, 即

$$g(W_1)=\mathrm{Max}\{\mathrm{Max}\{g(L_i),i\in\Theta_0\},\mathrm{Max}\{g(U_j),j\in\Theta_1\}\}. \tag{3.12}$$

通过上述方法确定W_1后, 将T_0在W_1处进行优化得到T_1. 采用与T_0相同的优化方式, 从T_1中选择出W_2, 再将T_1在W_2处进行优化得T_3, 如此继续, 则可以对序贯检验的样本空间点进行排序, 同时, 也得到一系列的检验$T_0,T_1,\ldots,T_n,\ldots$. 取

$$m=\sup\{n|\beta'(T_n)<\beta \text{ and } \alpha'(T_n)<\alpha\}. \tag{3.13}$$

由定理2.2及定理2.3的结论知, T_m即为统计假设(1.1)的截尾值N_t, 成功判别值为U_{N_t}, 检验水平为(α,β)的LOANTST T^{LA}. 要得到截尾值为N_t相对应的OANTST T^{A}, 由(2.7)知, 只需将成功判别值U_{N_t}从0到N_t进行搜索, 分别计算其相应的LOANTST T^{LA}, 再对平均试验次数进行比较, 最小者即为T^{A}.

《应用概率统计》版权所用

《应用概率统计》版权所用

§4. 与国际抽样标准IEC1123及SMT的比较

IEC1123是国际公认的截尾序贯抽样标准, 文献[6]研究表明序贯网图(SMT)相对于IEC1123具有全方位的改进, 为了验证本文方法的优良性, 本节将用算例的方式说明最优截尾序贯检验的优化过程, 并将本文的截尾序贯检验方法与IEC1123及SMT的方案进行比较.

例 2 对成败型试验, 当给定检验水平$(\alpha,\beta)=(0.2,0.2)$时, 考虑如下统计假设的最优截尾序贯检验问题:

$$H_0:P_0=0.9,\qquad H_1:P_1=0.7. \tag{4.1}$$

当取截尾值$N_t=15$, 成功判别值为$U_{N_t}=13$, 经典检验$C(15,13)$犯两类错误的真实概率为$\alpha'=0.1841<0.2$, $\beta'=0.1268<0.2$. 显然, 经典检验$C(15,13)$的平均试验次数为15次.

设T^{E}为经典检验$C(15,13)$的ETST, 由定义3.1, 可得T^{E}如例1中的(2.9)式所示. 此时, T^{E}犯两类错误的真实概率$\alpha'=0.1841$, $\beta'=0.1268$及平均试验次数分别为

$$\begin{cases}\mathsf{E}(M|0.9,T^{\mathrm{E}})=13.4525<15;\\ \mathsf{E}(M|0.7,T^{\mathrm{E}})=9.3867<15.\end{cases} \tag{4.2}$$

与经典检验$C(15,13)$相比, 可见ETST T^{E}在不改变检验犯两类错误的真实概率的同时, 极大地减少了检验的平均试验次数.

为了得到假设(4.1)的截尾值$N_t=15$, 成功判别值$U_{N_t}=13$, 检验水平为$(0.2,0.2)$的LOANTST T^{LA}, 现从(2.9)式的T^{E}出发, 对序贯样本空间进行逐点优化得到检验的LOANTST T^{LA}为

$$T^{\mathrm{LA}}=\begin{pmatrix}2&3&4&5&6&6&7&8&9&10&10&11&12&13&13\\ -1&0&1&2&3&4&5&5&6&7&8&9&10&11&12\end{pmatrix}. \tag{4.3}$$

此时, T^{LA}犯两类错误的真实概率分别为$\alpha'=0.1983$, $\beta'=0.1894$, 平均的试验次数为

$$\begin{cases}\mathsf{E}(M|0.9,T^{\mathrm{LA}})=7.7656;\\ \mathsf{E}(M|0.7,T^{\mathrm{LA}})=6.1795.\end{cases} \tag{4.4}$$

比较(4.2)与(4.4), 不难看到, T^{LA}相对T^{E}来说, 检验所需的平均试验次数的减少是相当可观的.

分别讨论截尾值$N_t=15$, 成功判别值分别为$U_{N_t}=0,1,2,\ldots,15$的LOANTST, 并进行比较, 得到(4.3)式给出的T^{LA}为其对应的截尾值为$N_t=15$, 检验水平为$(0.2,0.2)$的OANTST T^{A}.

对统计假设(4.1), 采用IEC1123给出的截尾值$N_t=15$, 成功判别值$U_{N_t}=13$的序贯检验方案为

$$T^{\mathrm{IEC}}=\begin{pmatrix}2&3&4&5&6&6&7&8&9&10&10&11&12&13&13\\ -1&0&1&2&3&3&4&5&6&7&8&9&10&11&12\end{pmatrix}. \tag{4.5}$$

T^{IEC}犯两类错误的真实概率分别为$\alpha'=0.1704$, $\beta'=0.1990$, 平均的试验次数为

$$\begin{cases}\mathsf{E}(M|0.9,T^{\mathrm{IEC}})=8.1684;\\ \mathsf{E}(M|0.7,T^{\mathrm{IEC}})=6.8102.\end{cases}\tag{4.6}$$

比较(4.4)与(4.6)的结果, 不难发现, 本文给出的新方法相对于IEC1123给出的抽样方案在平均试验次数方面也有着十分明显的改进.

为将本文所建立的新方法与IEC1123及SMT同时进行比较, 现对文献[6–8]中共同讨论的例子进行论述.

例 3 对成败型试验及给定检验水平为$(\alpha,\beta)=(0.2,0.2)$, 考虑如下统计假设的最优截尾序贯检验问题:

$$H_0:P_0=0.9,\qquad H_1:P_1=0.8.\tag{4.7}$$

分别计算IEC1123给出$N_t=49$, $U_{N_t}=43$的截尾序贯检验T^{IEC}及本文给出的新方法对应LOANTST T^{LA}的犯两类错误的真实概率与平均试验次数的结果如表1:

表1 样本空间排序法与IEC1123的比较

	α'	β'	$\mathsf{E}(M\|0.9)$	$\mathsf{E}(M\|0.8)$
IEC1123序贯检验T^{IEC}	0.1977	0.1990	23.8815	21.0264
样本空间排序法T^{LA}	0.1991	0.1996	23.5968	20.6080

从表1可以看出, 对相同检验水平$(\alpha,\beta)=(0.2,0.2)$, T^{LA}相对于T^{IEC}减少了平均试验次数. 对U_{N_t}进行搜索计算后知道, $N_t=49$时的OANTST T^{A}仍然为$U_{N_t}=43$时对应的LOANTST T^{LA}.

同时对N_t及U_{N_t}进行搜索计算, 得到统计假设(4.7)的序贯检验的截尾值可减少至$N_t=37$, 对应的$U_{N_t}=32$. 此时, 其犯两类错误的真实概率$\alpha'=0.1993<0.2$, $\beta'=0.1999<0.2$, 平均的试验次数为

$$\begin{cases}\mathsf{E}(M|0.9,T^{\mathrm{A}})=29.5141;\\ \mathsf{E}(M|0.8,T^{\mathrm{A}})=21.3090.\end{cases}\tag{4.8}$$

本文所给最小截尾值$N_t=37$与文[6]中SMT所建议的最小值37保持一致, 而实际上, 文[6]中截尾值$N_t=38$, 试验成功判别值为$U_{N_t}=33$的SMT方案的检验犯两类错误的真实概率为$\alpha'=0.1749<0.2$, $\beta'=0.2039>0.2$, 由于$\beta'=0.2039>0.2$, 严格来讲, 此时的SMT方案已不是统计假设(4.7)的检验水平为$(0.2,0.2)$的截尾序贯检验了. 文[8]的计算结果表明, 采用SMT计算的最小的截尾值$N_t=39$, 成功判别值$U_{N_t}=34$, 因此, 可以看到, 本文的新方法已经将(4.7)式的序贯检验的最小截尾值从SMT的$N_t=39$减少到$N_t=37$.

为将本文的新方法与序贯网图检验的优良性做进一步的比较, 现分别计算$N_t=39$, $U_{N_t}=34$时检验犯两类错误的真实概率α',β'及平均试验次数, 结果如表2.

《应用概率统计》版权所用

表2 样本空间排序法与序贯网图检验(SMT)的比较

	α'	β'	$\mathsf{E}(M\|0.9)$	$\mathsf{E}(M\|0.8)$
序贯网图检验T^{SMT}	0.1966	0.1876	27.53	23.83
样本空间排序法T^{LA}	0.1984	0.1996	25.2318	21.2443

从表2结果可以看到, 在相同的截尾值及检验水平时, 本文的新方法相对于SMT来说, 平均试验次数的减少也是相当明显的.

为了将新方法与IEC1123作相对全面的比较, 对IEC1123给出的160个方案中的截尾值较小的前16个方案进行了计算, 比较结果列于附表1中, 从附表1看到, 除表中的第4个方案比IEC1123稍差外, 其余方案均对IEC1123所建议的抽样检验方案有不同程度的改进.

通过上述分析, 可以看出新方法相对于IEC1123及SMT来说, 无论是在寻找最小的截尾值N_t, 还是在减少平均试验次数方面, 都取得了明显改进. 从第3节中序贯检验的最优化过程可以看到, 新方法对α,β是否相等并不作要求, 实际上, 新方法不同程度地克服了在第1节中指出的关于IEC1123所提供的序贯检验方案存在的4个方面的不足.

注 由于LOANTST, OANTST的计算结果对样本空间序的选择具有一定的依赖性, 因此, 文中给出的计算结果只是对应理论值的比较理想的近似解, 但从例2, 例3及附表1的计算结果看, 本文建立的新方法相对于IEC1123及SMT的结果已经有很大改进.

附表1 序贯样本空间排序法与IEC1123的小样本结果比较

						IEC1123				样本空间排序法T^{LA}			
编号	P_0	P_1	$\alpha=\beta$	N_t	U_{N_t}	α'	β'	$\mathsf{E}(M\|P_0)$	$\mathsf{E}(M\|P_1)$	α'	β'	$\mathsf{E}(M\|P_0)$	$\mathsf{E}(M\|P_1)$
1	0.8	0.4	0.3	4	3	0.2576	0.1984	2.0880	1.7360	0.2576	0.1984	2.0880	1.7360
2	0.8	0.4	0.2	5	4	0.1962	0.1907	2.7808	2.7488	0.1962	0.1907	2.7808	2.7488
3	0.8	0.4	0.1	12	8	0.0820	0.0828	6.3538	5.8481	0.0973	0.0907	5.8768	5.2512
4	0.8	0.4	0.05	17	11	0.0499	0.0485	8.6603	7.6213	0.0496	0.0465	8.8610	7.6527
5	0.8	0.6	0.3	10	8	0.2502	0.3042*	4.8245	4.6394	0.2746	0.2755	5.0621	4.5402
6	0.8	0.6	0.2	20	15	0.2031*	0.1878	9.9265	8.8915	0.1946	0.1992	9.6539	8.8266
7	0.8	0.6	0.1	44	32	0.1027*	0.0964	20.2280	18.1636	0.0990	0.0996	19.9791	18.2917
8	0.8	0.65	0.3	13	10	0.2779	0.2987	7.4480	6.7235	0.2878	0.2957	7.1565	6.4346
9	0.8	0.65	0.2	36	27	0.1890	0.1968	16.7856	15.4135	0.1994	0.1987	15.9813	14.3444
10	0.8	0.7	0.3	28	22	0.2963	0.2908	14.9407	14.1196	0.3000	0.2978	13.9172	13.0088
11	0.85	0.55	0.3	6	5	0.2109	0.3251*	2.2563	2.0497	0.2528	0.2117	3.2576	2.6043
12	0.85	0.55	0.2	9	7	0.1435	0.1876	5.4164	4.7874	0.1829	0.1944	4.7193	3.9737
13	0.85	0.55	0.1	19	14	0.0872	0.0958	9.7077	7.8732	0.0992	0.0993	9.1386	7.2362
14	0.85	0.55	0.05	31	9	0.0442	0.0487	13.6573	11.8797	0.0499	0.0487	13.4066	11.1969
15	0.85	0.7	0.3	13	11	0.2616	0.2973	7.0684	6.4395	0.2954	0.2812	6.5344	5.7211
16	0.85	0.7	0.2	19	14	0.1816	0.1966	15.2792	13.6536	0.1998	0.1976	14.1851	12.2821

*表明其给出的截尾序贯检验犯两类错误的真实概率超过给定的检验水平.

《应用概率统计》版权所用

《应用概率统计》版权所用

参 考 文 献

[1] Wald, A., *Sequential Analysis*, Wiley and Sons, New York, 1947.

[2] 夏群力, 郭涛, 李然, 导弹产品的可靠性检验研究, 系统工程与电子技术, **30(3)**(2008), 577–580.

[3] 孙晓峰, 赵喜春, 导弹试验中序贯检验及序贯截尾检验方案的优化设计, 战术导弹技术, **1**(2001), 9–16.

[4] IEC1123, Reliability Testing-Compliance Test Plans for Success Ratio, 1991, 1–61.

[5] GB/T 8051-2002一计数序贯抽样检验程序及表, 1–43.

[6] 濮晓龙, 闰章更, 茆诗松等, 计数型序贯网图检验, 华东师范大学学报(自然科学版), **125**(2006), 67–71.

[7] 濮晓龙, 闰章更, 茆诗松等, 计数型二次序贯网图检验, 应用概率统计, **23(1)**(2007), 77–83.

[8] 刘海涛, 张志华, 计数型序贯网图检验的算法实现, 系统工程理论与实践, **30(1)**(2010), 91–95.

[9] 马海南, 李玮, 潘长缘, 截尾序贯设计的若干改进方案, 江西师范大学学报, **34(3)**(2010), 287–290.

[10] Hu, S.G., Optimum truncated sequential test of binomial distribution, *2011 ICRMS*, Guiyang, China, Vol.I: 293–298.

[11] 陈家鼎, 生存分析与可靠性, 北京: 北京大学出版社, 2005.

Truncated Sequential Test for a Proportion and it's Sample Space Ordering Method

Hu Sigui

(*College of Basic Medical Science, Guiyang Medical University, Guiyang, 550004*)

This paper proposes a new sampling plan, the sample space ordering method, to compute the optimum truncated sequential test in order to overcome the disadvantages of the widely use sequential sampling methods that IEC1123 has presented. The main ideal of this new method is to establish an order at the truncated sequential sample space, and optimize point by point to arrive the optimal truncated sequential test. The paper presents in detail how to realize the new plan, and shows that this new plan has most powerful to control the sample number and least average sample number comparing with the methods which IEC1123 and SMT have proposed.

Keywords: Success/failure test, sequential analysis, truncated sequential test, IEC1123, sample space ordering method.

AMS Subject Classification: 90B25.