应用概率统计　第二十九卷
第三期　2013年6月

Chinese Journal of Applied Probability
and Statistics Vol.29 No.3 Jun. 2013

带有违约风险的可转换债券的简约型定价 *

王　伟　　赵奇杰

(宁波大学数学系, 宁波, 315211)

摘　要

本文考虑简约模型下带有违约风险的可转换债券的定价问题. 假定市场中可转换债券的违约强度满足Vasicek模型, 利用鞅方法获得了该模型下可转换债券的定价公式. 此外, 我们通过数值分析显示了模型参数变化对可转换债券价值影响的敏感性程度, 结果也表明违约风险将降低可转换债券的价值.

关键词: 可转换债券, 违约风险, 简约型.

学科分类号: F224.9.

§1. 引　　言

可转换债券是一种企业债券和股票期权相结合的混合证券, 通常具有较低的票面利率, 其持有者可以在一定时期内持一定比例或价格将之转换成一定数量的债券公司发行的股票. 可转换债券的定价研究是近年来国内外学者关注的热点问题之一. Brennan和Schwartz (1977)首次研究了可转换债券的定价. Brennan和Schwartz (1980, 1988)对可转换债券发行公司所采取的最优赎回政策做了进一步深入的分析和研究. 朱丹(2011)研究了随机利率下可分离交易可转换债券的定价问题. 上述文献对可转换债券的定价研究都是在市场不存在违约风险的框架下进行的. 然而, 金融市场中违约风险事实上影响着每一份交易合同. 因此, 市场中无论是交易市场的参与人员, 还是金融研究人员都非常关注违约发生的概率以及违约发生所造成的损失. 到目前为止, 有关违约概率的建模主要有两种方法. 第一种是结构模型, 在这类模型中, 发行者失去偿债能力被明确的模拟为违约的触发事件. 在结构模型下带违约风险的衍生产品定价的研究, 可参考文献Klein (1996), Klein和Inglis (1999), Wang和Wang (2010)等. 第二种是简约模型, 有关简约模型下带违约风险的衍生产品定价的研究可参考文献Jarrow和Turnbull (1995), Lando (1998)等. 在该类模型中, 违约被看作是由外生的违约强度过程所驱动的意外事件. 在有关带违约风险的可转换债券的定价研究方面, Tsiveriotis和Fernandes (1998)将可转换债券分为股性和债性两个部分, 股性部分使用无风险利率进行贴现, 债性部分使用无风险利率加上信用风险溢出进行贴现.

*国家自然科学基金数学天元基金(11126124)、教育部人文社科青年基金(12YJC910009)和浙江省自然科学基金(LQ12A01006)资助.

本文2012年7月27日收到, 2012年9月20日收到修改稿.

黄靖贵, 杨善朝和冯霞(2008)考虑了结构模型下可转换债券的定价, 在文中假定信用风险的主要来源于公司的总资产价值, 如果资产总价值大于负债, 则不会发生违约; 如果公司资产的总价值小于负债, 则企业将会发生违约, 并假定公司资产价值及股权价值都满足几何布朗运动, 获得了精确的定价公式. 朱丹和杨向群(2010)假定企业资产的价值满足跳–扩散模型, 当企业资产价值低于一个给定常值时, 企业发生违约, 考虑了在该模型下可转换债券的定价问题. Tsiveriotis和Fernandes (1998)考虑了简约模型下可转换债券的定价, 但我们这篇文章与Tsiveriotis和Fernandes (1998)在金融模型和计算方法上都有很大的不同. 和黄靖贵, 杨善朝和冯霞(2008), 朱丹和杨向群(2010)相比, 在这篇文章中, 我们考虑在简约模型下可转换债券的定价, 假定违约强度满足Vasicek模型, 并获得了在该模型下带违约风险的可转换债券的定价公式.

这篇文章的整体结构如下. 在第二节我们给出了模型的基本假设, 包括股票价格过程, 违约强度过程以及可转换债券在到期日的收益. 第三节通过测度变换和鞅方法得到了简约模型下带违约风险的可转换债券的价值. 第四节通过数值分析揭示了模型参数对可转换债券价值的影响. 第五节对本文作了一个小结.

§2. 模型假设

考虑一个带滤流的概率空间$(\Omega,\mathcal{F},\mathsf{Q},(\mathcal{F}_t)_{0\le t\le T})$, $\mathcal{F}=(\mathcal{F}_t)_{0\le t\le T}$满足通常条件, 即右连续, 完备的, 这里$\mathsf{Q}$是风险中性测度. 假定市场中有两个可交易的资产, 一个为无风险资产B和一个风险资产S. B_t表示市场货币银行账户在t时刻的价值, $B_t=B_0e^{\int_0^t r_u\mathrm{d}u}$, 为了方便, 这里我们假定$B_0=1$. 令$S_t$表示股票在$t$时刻的价值, 其价格过程满足如下随机微分方程

$$\mathrm{d}S_t=r_tS_t\mathrm{d}t+S_t\sigma_t\mathrm{d}W_{1t}, \tag{2.1}$$

这里W_{1t}为定义在概率空间$(\Omega,\mathcal{F},\mathsf{Q})$上的一标准布朗运动, r_t, σ_t是关于时间t的确定性函数. 令τ表示可转换债券发行方的违约时间, 其强度过程为λ_t. 我们假定λ_t满足如下随机微分方程

$$\mathrm{d}\lambda_t=\kappa(\vartheta-\lambda_t)\mathrm{d}t+\nu\mathrm{d}W_{2t}, \tag{2.2}$$

其中κ,ϑ,ν为常数, W_{2t}是定义在概率空间$(\Omega,\mathcal{F},\mathsf{Q})$上的一标准布朗运动, 且$\mathsf{Cov}(\mathrm{d}W_{1t},\mathrm{d}W_{2t})=\rho\mathrm{d}t$, $-1<\rho<1$. 假定可转换债券的转换只可能发生在债券到期时刻T, 在T时刻债券持有者有权利选择持有股票或者持有债券, 如果在到期日用债券转换股票后的价值超过债券价值, 则债券持有者可选择转换. 相反, 则债券持有者不选择转换. 令$\psi(T)$表示可转换债券在到期日的收益, 则可以由如下表示

$$\psi(T)=\begin{cases}P_b, & (M/C_v)S_T\le P_b;\\ MS_T/C_v, & (M/C_v)S_T>P_b,\end{cases}$$

这里$P_b = Me^{iT}$代表以票面利率i计算的单纯的债券价值, M代表可转换债券的面值, C_v代表约定的转换价格. 令$\mathcal{H}_t = \sigma(I_{\{\tau\le u\}}, 0\le u\le t)$, $\mathcal{F}_t = \sigma(S_u, 0\le u\le t)\vee\sigma(\lambda_u, 0\le u\le t)\vee\mathcal{H}_t$. 定义$\mathcal{G}_t = \sigma(S_u, 0\le u\le T)\vee\sigma(\lambda_u, 0\le u\le T)\vee\mathcal{H}_t$. 因此可知$\mathcal{G}_0$包含到时刻$T$为止风险资产价格过程和违约强度过程的所有信息, 则由Jarrow和Yu (2001)可知

$$\mathsf{Q}(\tau > t|\mathcal{G}_0) = \exp\Big(-\int_0^t \lambda_u \mathrm{d}u\Big). \tag{2.3}$$

§3. 带有违约风险的可转换债券的价值

在这一节中, 我们研究带有违约风险的可转换债券的价值, 当可转换债券的发行方发生违约时, 在T时刻可转换债券的多头仅接受承诺支付的一部分, 即$\omega\psi(T)$, 这里回收率ω为常数, 且$0<\omega<1$. 如果可转换债券的发行方不发生违约, 则无信用损失发生, 债券的多头在T时刻接受承诺的支付, 即$\psi(T)$. 因此由风险中性定价可知可转换债券在t时刻的价值V_t为

$$V_t = \mathsf{E}_\mathsf{Q}\big[e^{-\int_t^T r_u \mathrm{d}u}(\omega\psi(T)I_{\{\tau\le T\}} + \psi(T)I_{\{\tau>T\}})\big|\mathcal{F}_t\big], \tag{3.1}$$

其中$\mathsf{E}_\mathsf{Q}[\cdot]$表示在风险中性测度$\mathsf{Q}$下的期望, $I_{\{.\}}$是一个示性函数. 由Bielecki和Rutkowski (2004)或者Jarrow和Yu (2001)可知

$$\begin{aligned}\mathsf{E}_\mathsf{Q}\big[\psi(T)I_{\{\tau>T\}}\big|\mathcal{F}_t\big] &= \mathsf{E}_\mathsf{Q}\big[\mathsf{E}_\mathsf{Q}\big[\psi(T)I_{\{\tau>T\}}\big|\mathcal{G}_t\big]\big|\mathcal{F}_t\big]\\ &= \mathsf{E}_\mathsf{Q}\Big[\psi(T)I_{\{\tau>t\}}\frac{\mathsf{Q}(\tau>T|\mathcal{G}_0)}{\mathsf{Q}(\tau>t|\mathcal{G}_0)}\Big|\mathcal{F}_t\Big]\\ &= I_{\{\tau>t\}}\mathsf{E}_\mathsf{Q}\big[e^{-\int_t^T\lambda_u\mathrm{d}u}\psi(T)\big|\mathcal{F}_t\big],\end{aligned}$$

于是

$$V_t = \omega e^{-\int_t^T r_u\mathrm{d}u}\mathsf{E}_\mathsf{Q}[\psi(T)|\mathcal{F}_t] + (1-\omega)e^{-\int_t^T r_u\mathrm{d}u}I_{\{\tau>t\}}\mathsf{E}_\mathsf{Q}\big[e^{-\int_t^T\lambda_u\mathrm{d}u}\psi(T)\big|\mathcal{F}_t\big]. \tag{3.2}$$

为了计算带违约风险的可转换债券的价值, 我们需要引进两个新的测度Q_λ和$\mathsf{Q}_{s\lambda}$.

命题 3.1 令$\xi(T)$表示Radon-Nikodym导数

$$\begin{aligned}\xi(T) &= \frac{\mathrm{d}\mathsf{Q}_\lambda}{\mathrm{d}\mathsf{Q}}\Big|_{\mathcal{F}_T} = \frac{e^{-\int_0^T\lambda_u\mathrm{d}u}}{\mathsf{E}_\mathsf{Q}\big[e^{-\int_0^T\lambda_u\mathrm{d}u}\big]}\\ &= \exp\Big\{-\int_0^T \nu m(u,T)\mathrm{d}W_{2u} - \frac{1}{2}\int_0^T \nu^2 m(u,T)^2\mathrm{d}u\Big\},\end{aligned} \tag{3.3}$$

这里$m(u,T) = (1-e^{-\kappa(T-u)})/\kappa$, 则$W_{1t}^\lambda = W_{1t} + \rho\int_0^t \nu m(u,T)\mathrm{d}u$, $W_{2t}^\lambda = W_{2t} + \int_0^t \nu m(u,T)\mathrm{d}u$是两个标准的$\mathsf{Q}_\lambda$布朗运动, 且$\mathsf{Cov}\,(\mathrm{d}W_{1t}^\lambda, \mathrm{d}W_{2t}^\lambda) = \rho\mathrm{d}t$.

证明： 由方程(2.2)可得

$$\lambda_t=\lambda_0e^{-\kappa t}+\int_0^t\kappa\vartheta e^{\kappa(u-t)}\mathrm{d}u+\int_0^t\nu e^{\kappa(u-t)}\mathrm{d}W_{2u},$$

通过直接计算得

$$\int_0^T\lambda_u\mathrm{d}u=(\lambda_0-\vartheta)m(0,T)+\vartheta T+\int_0^T\nu m(u,T)\mathrm{d}W_{2u},\tag{3.4}$$

因此$-\int_0^T\lambda_u\mathrm{d}u$满足期望为$-(\lambda_0-\vartheta)m(0,T)-\vartheta T$，方差为$\int_0^T\nu^2m^2(u,T)\mathrm{d}u$的正态分布，即

$$-\int_0^T\lambda_u\mathrm{d}u\sim\mathcal{N}\Big(-(\lambda_0-\vartheta)m(0,T)-\vartheta T,\int_0^T\nu^2m^2(u,T)\mathrm{d}u\Big),$$

则

$$\mathsf{E}_{\mathsf{Q}}\big[e^{-\int_0^T\lambda_u\mathrm{d}u}\big]=\exp\Big\{-(\lambda_0-\vartheta)m(0,T)-\vartheta T+\frac{1}{2}\int_0^T\nu^2m^2(u,T)\mathrm{d}u\Big\},\tag{3.5}$$

结合上式和式(3.4)，可得式(3.3)．再由Girsanov定理知W_{1t}^{λ}和W_{2t}^{λ}是两个Q_{λ}布朗运动，且$\mathsf{Cov}\,(\mathrm{d}W_{1t}^{\lambda},\mathrm{d}W_{2t}^{\lambda})=\rho\mathrm{d}t$． □

命题 3.2 令$\widetilde{S}_T=S_T/B_T$表示风险资产S在时刻T的贴现价值和$\eta(T)$表示Radon-Nikodym导数

$$\begin{aligned}\eta(T)&=\frac{\mathrm{d}\mathsf{Q}_{s\lambda}}{\mathrm{d}\mathsf{Q}}\Big|_{\mathcal{F}_T}=\frac{e^{-\int_0^T\lambda_u\mathrm{d}u}\widetilde{S}_T}{\mathsf{E}_{\mathsf{Q}}\big[e^{-\int_0^T\lambda_u\mathrm{d}u}\widetilde{S}_T\big]}\\&=\exp\Big\{\int_0^T\sigma_u\mathrm{d}W_{1u}-\frac{1}{2}\int_0^T\sigma_u^2\mathrm{d}u-\nu\int_0^Tm(u,T)\mathrm{d}W_{2u}\\&\quad-\frac{1}{2}\int_0^T\nu^2m^2(u,T)\mathrm{d}u+\rho\int_0^T\nu\sigma_um(u,T)\mathrm{d}u\Big\},\end{aligned}\tag{3.6}$$

则$W_{1t}^{s\lambda}$，$W_{2t}^{s\lambda}$是两个标准的$\mathsf{Q}_{s\lambda}$布朗运动，且$\mathsf{Cov}\,(\mathrm{d}W_{1t}^{s\lambda},\mathrm{d}W_{2t}^{s\lambda})=\rho\mathrm{d}t$，这里

$$W_{1t}^{s\lambda}=W_{1t}-\int_0^t\sigma_u\mathrm{d}u+\rho\int_0^t\nu m(u,T)\mathrm{d}u,$$
$$W_{2t}^{s\lambda}=W_{2t}+\int_0^t\nu m(u,T)\mathrm{d}u-\rho\int_0^t\sigma_u\mathrm{d}u.$$

证明： 因为$\widetilde{S}_T=\exp\Big\{\int_0^T\sigma_u\mathrm{d}W_{1u}-(1/2)\int_0^T\sigma_u^2\mathrm{d}u\Big\}$和式(3.4)，可得

$$\begin{aligned}e^{-\int_0^T\lambda_u\mathrm{d}u}\widetilde{S}_T&=\exp\Big\{-\int_0^T\nu m(u,T)\mathrm{d}W_{2u}+\int_0^T\sigma_u\mathrm{d}W_{1u}\\&\quad-\frac{1}{2}\int_0^T\sigma_u^2\mathrm{d}u+(\vartheta-\lambda_0)m(0,T)-\vartheta T\Big\},\end{aligned}$$

则

$$\begin{aligned} \mathsf{E}_{\mathsf{Q}}\big[e^{-\int_0^T\lambda_u\mathrm{d}u}\widetilde{S}_T\big] &= \exp\Big\{\frac{1}{2}\int_0^T\nu^2m^2(u,T)\mathrm{d}u+(\vartheta-\lambda_0)m(0,T) \\ &\quad -\vartheta T-\rho\int_0^T\sigma_u\nu m(u,T)\mathrm{d}u\Big\}. \end{aligned}$$

由上面两式, 通过计算可得到式(3.6). 此外, 根据Girsanov定理知$W_{1t}^{s\lambda}$, $W_{2t}^{s\lambda}$是两个$\mathsf{Q}_{s\lambda}$布朗运动且$\mathsf{Cov}\,(\mathrm{d}W_{1t}^{s\lambda},\mathrm{d}W_{2t}^{s\lambda})=\rho\mathrm{d}t$. □

定理 3.1 带有违约风险的可转换债券在t时刻的价值为

$$\begin{aligned} V_t &= \omega P_b e^{-\int_t^T r_u\mathrm{d}u}\mathbb{N}(d_1)+\omega\frac{S_tM}{C_v}\mathbb{N}(d_2) \\ &\quad +(1-\omega)I_{\{\tau>t\}}\exp\Big\{-(\lambda_t-\vartheta)m(t,T)-\vartheta(T-t)+\frac{1}{2}\int_t^T\nu^2m^2(u,T)\mathrm{d}u\Big\} \\ &\quad \cdot\Big(P_be^{-\int_t^T r_u\mathrm{d}u}\mathbb{N}(d_3)+\frac{S_tM}{C_v}\exp\Big\{-\rho\int_t^T\sigma_u\nu m(u,T)\mathrm{d}u\Big\}\mathbb{N}(d_4)\Big), \end{aligned} \tag{3.7}$$

$$d_1=\Big(\ln\frac{P_bC_v}{S_tM}+\frac{1}{2}\int_t^T\sigma_u^2\mathrm{d}u-\int_t^T r_u\mathrm{d}u\Big)\Big/\sqrt{\int_t^T\sigma_u^2\mathrm{d}u},$$

$$d_2=\Big[\ln\frac{MS_t}{P_bC_v}+\int_t^T\Big(\frac{1}{2}\sigma_u^2+r_u\Big)\mathrm{d}u\Big]\Big/\sqrt{\int_t^T\sigma_u^2\mathrm{d}u},$$

$$d_3=\Big[\ln\frac{P_bC_v}{MS_t}-\int_t^T\Big(r_u-\frac{1}{2}\sigma_u^2-\rho\sigma_u\nu m(u,T)\Big)\mathrm{d}u\Big]\Big/\sqrt{\int_t^T\sigma_u^2\mathrm{d}u},$$

$$d_4=-d_3+\sqrt{\int_t^T\sigma_u^2\mathrm{d}u},$$

这里$\mathbb{N}(\cdot)$表示标准正态分布的累积分布函数.

证明: 由式(3.2)和$\psi(T)$的表达式可知, V_t可以改写为如下

$$\begin{aligned} V_t &= \underbrace{\omega\mathsf{E}_{\mathsf{Q}}\big[e^{-\int_t^T r_u\mathrm{d}u}P_bI_{\{S_T\le P_bC_v/M\}}\big|\mathcal{F}_t\big]}_{I_1}+\underbrace{\omega\mathsf{E}_{\mathsf{Q}}\Big[e^{-\int_t^T r_u\mathrm{d}u}\frac{S_TM}{C_v}I_{\{S_T>P_bC_v/M\}}\Big|\mathcal{F}_t\Big]}_{I_2} \\ &\quad +\underbrace{(1-\omega)e^{-\int_t^T r_u\mathrm{d}u}I_{\{\tau>t\}}\mathsf{E}_{\mathsf{Q}}\big[e^{-\int_t^T\lambda_u\mathrm{d}u}P_bI_{\{S_T\le P_bC_v/M\}}\big|\mathcal{F}_t\big]}_{I_3} \\ &\quad +\underbrace{(1-\omega)e^{-\int_t^T r_u\mathrm{d}u}I_{\{\tau>t\}}\mathsf{E}_{\mathsf{Q}}\Big[e^{-\int_t^T\lambda_u\mathrm{d}u}\frac{S_TM}{C_v}I_{\{S_T>P_bC_v/M\}}\Big|\mathcal{F}_t\Big]}_{I_4}. \end{aligned} \tag{3.8}$$

为了表达方便, 我们记上式中的第一项, 第二项, 第三项和第四项分别为I_1, I_2, I_3和I_4. 接

下来首先计算I_1的值,

$$\begin{aligned} I_1 &= \omega \mathsf{E}_{\mathsf{Q}}\big[e^{-\int_t^T r_u \mathrm{d}u} P_b I_{\{S_T<P_bC_v/M\}}\big|\mathcal{F}_t\big] \\ &= \omega P_b e^{-\int_t^T r_u \mathrm{d}u} \mathsf{Q}\Big(\int_t^T r_u \mathrm{d}u + \int_t^T \sigma_u \mathrm{d}W_{1u} - \frac{1}{2}\int_t^T \sigma_u^2 \mathrm{d}u \le \ln\frac{P_bC_v}{S_tM}\Big|\mathcal{F}_t\Big) \\ &= \omega P_b e^{-\int_t^T r_u \mathrm{d}u} \mathbb{N}(d_1). \end{aligned} \tag{3.9}$$

接下来计算I_2的值, 为简化计算, 我们将通过测度变换的方法, 令$(\mathrm{d}\mathsf{Q}^s/\mathrm{d}\mathsf{Q})|_{\mathcal{F}_t} = \widetilde{S}_t/\mathsf{E}_{\mathsf{Q}}[\widetilde{S}_t]$, 由于$\mathsf{Q}$是风险中性测度, 故$\mathsf{E}_{\mathsf{Q}}[\widetilde{S}_t] = 1$, 且因为$\widetilde{S}_t = \exp\Big\{\int_0^t \sigma_u \mathrm{d}W_u - (1/2)\int_0^t \sigma_u^2 \mathrm{d}u\Big\}$, 则$(\mathrm{d}\mathsf{Q}^s/\mathrm{d}\mathsf{Q})|_{\mathcal{F}_t} = \exp\Big\{\int_0^t \sigma_u \mathrm{d}W_u - (1/2)\int_0^t \sigma_u^2 \mathrm{d}u\Big\}$. 由 Girsanov 定理可知, $W_t^s = W_t - \int_0^t \sigma_u \mathrm{d}u$是一标准的$\mathsf{Q}^s$布朗运动. 于是在概率测度$\mathsf{Q}^s$下, 风险资产价格过程$S_t$满足如下

$$S_t = S_0 \exp\Big\{\int_0^t \Big(r_u + \frac{1}{2}\sigma_u^2\Big)\mathrm{d}u + \int_0^t \sigma_u \mathrm{d}W_u^s\Big\}.$$

则在概率测度Q^s和给定条件$\mathcal{F}_t$下, $\ln S_T$满足正态分布, 其均值为$\ln S_t + \int_t^T [r_u + (1/2)\sigma_u^2]\mathrm{d}u$, 方差为$\int_t^T \sigma_u^2 \mathrm{d}u$. 于是

$$\begin{aligned} I_2 &= \omega \mathsf{E}_{\mathsf{Q}}\Big[e^{-\int_t^T r_u \mathrm{d}u} \frac{S_T M}{C_v} I_{\{S_T>P_bC_v/M\}}\Big|\mathcal{F}_t\Big] = \omega \frac{S_t M}{C_v} \mathsf{E}_{\mathsf{Q}^s}\big[I_{\{S_T>P_bC_v/M\}}\big|\mathcal{F}_t\big] \\ &= \omega \frac{S_t M}{C_v} \mathbb{N}(d_2). \end{aligned} \tag{3.10}$$

下面我们计算I_3, 通过Bayes法则可得

$$I_3 = (1-\omega) P_b e^{-\int_t^T r_u \mathrm{d}u} I_{\{\tau>t\}} \mathsf{E}_{\mathsf{Q}}\big[e^{-\int_t^T \lambda_u \mathrm{d}u}\big|\mathcal{F}_t\big] \mathsf{E}_{\mathsf{Q}_\lambda}\big[I_{\{S_T\le P_bC_v/M\}}\big|\mathcal{F}_t\big]. \tag{3.11}$$

当$u \ge t$时, 从方程(2.2)可得

$$\lambda_u = e^{-\kappa(u-t)}\lambda_t + \vartheta(1-e^{-\kappa(u-t)}) + \nu\int_t^T\int_t^u e^{-\kappa(u-s)}\mathrm{d}W_{2s}\mathrm{d}u,$$

故

$$\begin{aligned} \int_t^T \lambda_u \mathrm{d}u &= \int_t^T e^{-\kappa(u-t)}\lambda_t \mathrm{d}u + \int_t^T \vartheta(1-e^{-\kappa(u-t)})\mathrm{d}u + \nu\int_t^T\int_t^u e^{-\kappa(u-s)}\mathrm{d}W_{2s}\mathrm{d}u \\ &= (\lambda_t-\vartheta)m(t,T) + \vartheta(T-t) + \nu\int_t^T m(u,T)\mathrm{d}W_{2u}, \end{aligned} \tag{3.12}$$

则

$$\mathsf{E}_{\mathsf{Q}}\big[e^{-\int_t^T \lambda_u \mathrm{d}u}\big|\mathcal{F}_t\big] = \exp\Big\{-(\lambda_t-\vartheta)m(t,T) - \vartheta(T-t) + \frac{1}{2}\int_t^T \nu^2 m^2(u,T)\mathrm{d}u\Big\}. \tag{3.13}$$

又由命题3.1可知在测度Q_λ下, S_t满足如下

$$S_t = S_0 \exp\Big\{\int_0^t \Big(r_u - \frac{1}{2}\sigma_u^2 - \rho\nu\sigma_u m(u,T)\Big)\mathrm{d}u + \int_0^t \sigma_u \mathrm{d}W_{1u}^{\lambda}\Big\}.$$

于是在测度Q_λ给定条件下, $\ln S_T \sim \mathcal{N}\Big(\ln S_t + \int_t^T [r_u - (1/2)\sigma_u^2 - \rho\nu\sigma_u m(u,T)]\mathrm{d}u, \int_t^T \sigma_u^2 \mathrm{d}u\Big)$, 于是

$$\mathsf{E}_{\mathsf{Q}_\lambda}\big[I_{\{S_T\le P_bC_v/M\}}\big|\mathcal{F}_t\big] = \mathbb{N}(d_3), \tag{3.14}$$

因此, 我们可得

$$\begin{aligned} I_3 &= (1-\omega)P_b e^{-\int_t^T r_u \mathrm{d}u} I_{\{\tau>t\}} \exp\Big\{-(\lambda_t-\vartheta)m(t,T) \\ &\quad -\vartheta(T-t) + \frac{1}{2}\int_t^T \nu^2 m^2(u,T)\mathrm{d}u\Big\}\mathbb{N}(d_3). \end{aligned} \tag{3.15}$$

最后计算I_4, 利用命题3.2和Bayes法则可得

$$\begin{aligned} I_4 &= (1-\omega)e^{-\int_t^T r_u \mathrm{d}u} I_{\{\tau>t\}} \mathsf{E}_{\mathsf{Q}}\Big[e^{-\int_t^T \lambda_u \mathrm{d}u}\frac{S_T M}{C_v} I_{\{S_T>P_bC_v/M\}}\Big|\mathcal{F}_t\Big] \\ &= (1-\omega)I_{\{\tau>t\}} e^{\int_0^t r_u \mathrm{d}u}\mathsf{E}_{\mathsf{Q}}\big[e^{-\int_t^T \lambda_u \mathrm{d}u}\widetilde{S}_T\big|\mathcal{F}_t\big]\mathsf{Q}_{s\lambda}\Big(S_T > \frac{P_bC_v}{M}\Big|\mathcal{F}_t\Big). \end{aligned} \tag{3.16}$$

由于

$$\begin{aligned} e^{-\int_t^T \lambda_s \mathrm{d}s}\widetilde{S}_T &= \widetilde{S}_t \exp\Big\{-(\lambda_t-\vartheta)m(t,T) - \vartheta(T-t) - \nu\int_t^T m(u,T)\mathrm{d}W_{2u} \\ &\quad -\frac{1}{2}\int_t^T \sigma_u^2 \mathrm{d}u + \int_t^T \sigma_u \mathrm{d}W_{1u}\Big\}, \end{aligned} \tag{3.17}$$

则

$$\begin{aligned} \mathsf{E}_{\mathsf{Q}}\big[e^{-\int_t^T \lambda_u \mathrm{d}u}\widetilde{S}_T\big|\mathcal{F}_t\big] &= \widetilde{S}_t \exp\Big\{-(\lambda_t-\vartheta)m(t,T) - \vartheta(T-t) \\ &\quad +\frac{1}{2}\int_t^T \nu^2 m^2(u,T)\mathrm{d}u - \rho\int_t^T \sigma_u\nu m(u,T)\mathrm{d}u\Big\}. \end{aligned} \tag{3.18}$$

因为在测度$\mathsf{Q}_{s\lambda}$下, 风险资产价格过程S_t满足如下

$$S_t = S_0 \exp\Big\{\int_0^t \Big(r_u + \frac{1}{2}\sigma^2 - \rho\sigma_u\nu m(u,T)\Big)\mathrm{d}u + \int_0^t \sigma_u \mathrm{d}W_{1u}^{s\lambda}\Big\},$$

因此, 在概率测度$\mathsf{Q}_{s\lambda}$和给定条件$\mathcal{F}_t$下, $\ln S_T \sim \mathcal{N}\Big(\ln S_t + \int_t^T [r_u + (1/2)\sigma_u^2 - \rho\sigma_u\nu m(u,T)]\mathrm{d}u, \int_t^T \sigma_u^2 \mathrm{d}u\Big)$, 于是

$$\begin{aligned} I_4 &= (1-\omega)I_{\{\tau>t\}}\frac{S_t M}{C_v}\exp\Big\{-(\lambda_t-\vartheta)m(t,T) - \vartheta(T-t) \\ &\quad +\frac{1}{2}\int_t^T \nu^2 m^2(u,T)\mathrm{d}u - \rho\int_t^T \sigma_u\nu m(u,T)\mathrm{d}u\Big\}\mathbb{N}(d_4). \end{aligned} \tag{3.19}$$

再根据式(3.8), (3.9), (3.10), (3.15), (3.19), 即可完成定理3.1的证明. □

§4. 数值分析

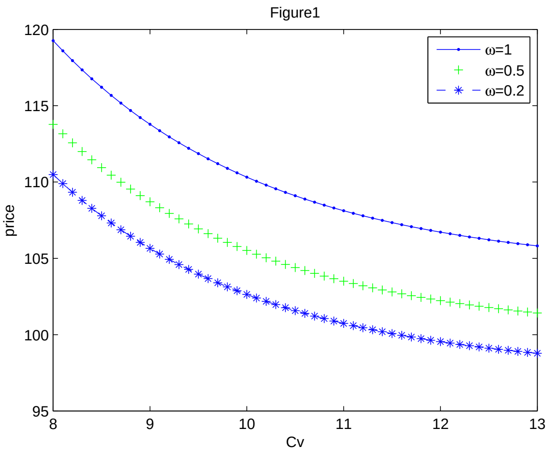

图1 回收率ω和可转换价格C_v对可转换债券价值的影响, 其中$\rho=0.2$, $\sigma=0.3$, $r=0.03$, $T=2$

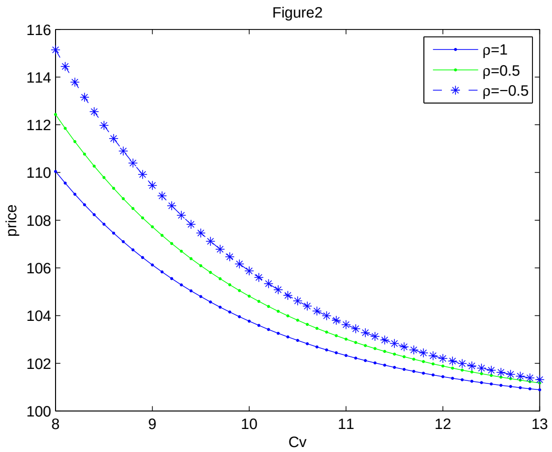

图2 相关系数ρ和可转换价格C_v对可转换债券价值的影响, 其中$\omega=0.5$, $\sigma=0.3$, $r=0.03$, $T=2$

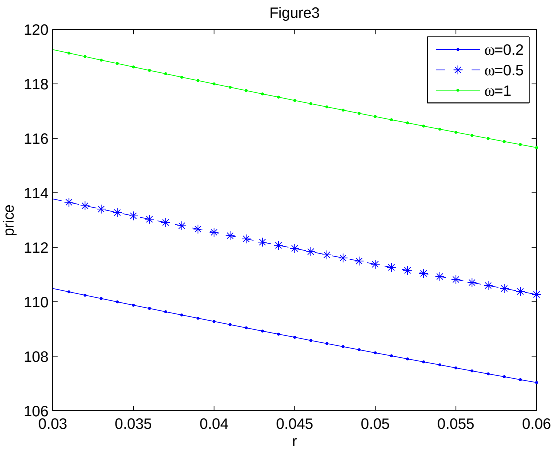

图3 市场利率r对可转换债券价值的影响, 其中$\rho=0.2$, $\sigma=0.3$, $C_v=8$, $T=2$

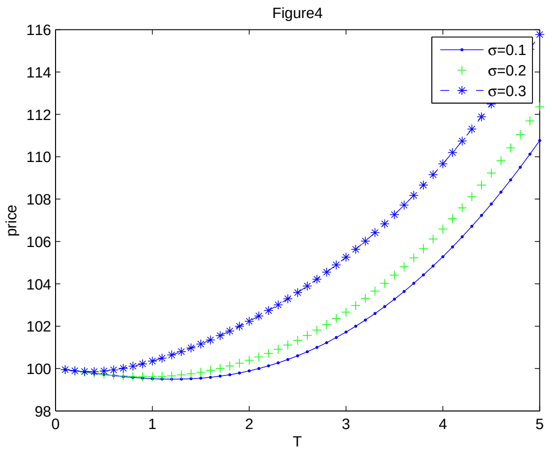

图4 可转换债券的到期时间T和σ对可转换债券价值的影响, 其中$\rho=0.2$, $r=0.03$, $\omega=0.5$, $C_v=12$

在这一节, 我们对上一节的结果进行数值分析. 在图1-4中, 我们都假定模型参数$M=100$, $i=0.05$, $\kappa=0.25$, $\lambda_t=0.05$, $\vartheta=0.1$, $\nu=0.2$. 在图1中, 我们假定模型中其他参数$\rho=0.2$, $\sigma=0.3$, $r=0.03$, $T=2$, 首先考虑ω对可转换债券的影响, 从图1中我们可以发现, 随着ω的增加, 可转换债券价值随之增大. 当$\omega=1$时, 该可转换债券的价值不受违约风险的影响, 可转换债券的价值是最大的, 随着ω的减少, 可转换债券的价值受违约风险的影响越来越大, 故价值随之降低. 从图1, 我们还可以发现随着转换价格的增加, 可转换

债券的价值越来越小. 接下来, 我们在图2中考虑了股票价格中的布朗运动W_{1t}与违约强度中布朗运动W_{2t}的相关系数ρ对可转换债券价值的影响. 在图2中我们假定模型的其他参数为$\omega = 0.5$, $\sigma = 0.3$, $r = 0.03$, $T = 2$. 图2表明随着ρ的减小, 可转换债券的价值增加. 在图3中我们考虑市场利率对可转换债券价值的影响, 假定模型参数$\rho = 0.2$, $\sigma = 0.3$, $C_v = 8$, $T = 2$, 则从图3可以看出随着市场利率r的增大, 可转换债券的价值将要减少. 图4中我们考虑了波动率σ和时间T对可转换债券价值的影响, 其中模型中的参数ρ, r, ω, C_v分别假定为0.2, 0.03, 0.5, 12. 图4表明随着股票波动率或者可转换债券的交割期T的增加, 可转换债券的价值都将会随之增加.

§5. 总　　结

本文考虑违约风险模型是简约模型下可转换债券的定价问题. 假定其违约强度满足Vasicek模型, 并得到了在该模型下可转换债券定价公式的解析解. 在文中的第四节, 通过数值分析, 分别讨论了模型中的参数$\omega, C_v, \rho, r, \sigma, T$对带违约风险的可转换债券价值的影响.

参 考 文 献

[1] Brennan, M.J. and Schwartz, E.S., Convertible bonds: valuation and optimal strategies for call and conversion, *The Journal of Finance*, **32(5)**(1977), 1699–1715.

[2] Brennan, M.J. and Schwartz, E.S., Analyzing convertible bonds, *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, **15(4)**(1980), 907–929.

[3] Brennan, M.J. and Schwartz, E.S., The cases for convertibles, *Journal of Applied Corporate Finance*, **1(2)**(1988), 55–64.

[4] Bielecki, T.R. and Rutkowski, M., *Credit Risk: Modelling, Valuation and Hedging*, Berlin: Springer, 2004.

[5] Jarrow, R.A. and Turnbull, S.M., Pricing derivatives on financial securities subject to credit risk, *The Journal of Finance*, **50(1)**(1995), 53–85.

[6] Jarrow, R.A. and Yu, F., Counterparty risk and the pricing of defaultable securities, *The Journal of Finance*, **56(5)**(2001), 1765–1799.

[7] Klein, P., Pricing Black-Scholes options with correlated credit risk, *Journal of Banking and Finance*, **20(7)**(1996), 1211–1229.

[8] Klein, P. and Inglis, M., Valuation of European options subject to financial distress and interest rate risk, *The Journal of Derivatives*, **6(3)**(1999), 44–56.

[9] Lando, D., On cox processes and credit risky securities, *Review of Derivatives Research*, **2(2-3)**(1998), 99–120.

[10] Tsiveriotis, K. and Fernandes, C., Valuing convertible bonds with credit risk, *The Journal of Fixed Income*, **8(2)**(1998), 95–102.

[11] Wang, W. and Wang, W.S., Pricing vulnerable options under a Markov-modulated regime switching model, *Communications in Statistics - Theory and Methods*, **39(19)**(2010), 3421–3433.

[12] 黄靖贵, 杨善朝, 冯霞, 具有动态信用风险的可转债的定价研究, 数理统计与管理, **27(6)**(2008), 1108–1116.

[13] 朱丹, 杨向群, 有跳–扩散违约风险的可转换债券的定价, 数学学报, **53(1)**(2010), 165–170.

[14] 朱丹, 随机利率下可分离交易可转换债券的鞅定价, 应用数学学报, **34(2)**(2011), 265–271.

Pricing a Convert Bond with Default Risk under a Reduced Form Model

Wang Wei Zhao Qijie

(*Department of Mathematics, Ningbo University, Ningbo, 315211*)

In this study, we consider the pricing problem of convert bond with default risk under a reduced form model. We suppose that the default intensity follows the Vasicek model, and obtain a closed form pricing formula of convert bond by martingale method. Moreover, we provide a numerical analysis to demonstrate the sensitivity of a default convert bond value to changes in the model's parameters, and show that the default risk of convert bond issuer will reduce the convert bond value.

Keywords: Convert bond, default risk, reduced form.

AMS Subject Classification: 60G05, 62P05.