

依随机序正相依风险下的最优再保险 *

张节松^{1,2} 肖庆宪¹

(¹上海理工大学管理学院, 上海, 200093; ²淮北师范大学数学科学学院, 淮北, 235000)

摘 要

经典的二元复合Poisson风险模型假定索赔次数通过一个共同的Poisson分布相关, 而索赔额相互独立. 本文中, 我们假定索赔次数与索赔额均依随机序正相依, 通过比较, 发现依随机序正相依是一个比依共同Poisson分布相关更弱的条件. 实际上, 依随机序正相依的假定较独立、共同单调、条件随机递增等都要弱. 在依随机序正相依的风险下, 我们得到了最优再保险策略, 并针对二维与随机多维混杂的相依风险, 在自留损失的方差最小和二次效用最大的准则下, 给出了自留向量的显式表达式, 部分解决了Cai和Wei (2012a)提出的多维相依风险下, 求解此类表达式的问题.

关键词: PDS, 二元复合泊松模型, 最优再保险, 连接函数.

学科分类号: O211.9.

§1. 引 言

二元复合Poisson模型是研究包含两险种的风险模型. 该模型一个典型的实例是当严重的交通事故发生时, 将同时产生车险与医疗方面保险的索赔. 当前, 与此模型相关的研究已有不少, 如Ambagaspitiya (1999), Wang和Yuen (2005), Centeno (2005), Yuen和Guo等 (2006), 朱(2009), Lv和Guo等(2011). 上述文献假定表示索赔次数的随机变量通过一个共同的Poisson分布相关, 而表示索赔额的随机变量是相互独立的. 然而在保险实务中, 当严重的交通事故, 或者地震、飓风、洪水等巨灾发生时, 索赔额之间显然具有一定的正相依关系, 而且会产生大量的索赔, 因此本文假定任一险种的索赔额以及两险种的索赔次数分别依随机序正相依. 我们将在一个统一的优化标准下, 讨论原保险公司的最优再保险策略, 在自留损失的方差最小和二次效用最大的准则下, 求解自留向量的显式表达式. 由于相依关系的引入以及二维与随机多维风险的混杂, 使得相关文献中的方法不再适用. 因此, 我们应用Cai和Wei (2012b)中连接函数在增变换(无须严格增)下保持不变的性质, 成功求得了最优再保险策略; 与Cai和Wei (2012a)不同, 我们应用单侧导数及恰当的不等式放缩, 发现了自留损失的方差随自留向量的变化趋势, 从而得到了自留向量的显式表示; 在引理4.4的证明中多次出现索赔次数无界所引起的困难, 我们应用Cauchy-Schwarz引理及测度论的相关数学工具解决了这一问题, 而没有采取通常的截尾法, 因而我们的做法更符合市场实际.

*国家自然科学基金项目(11171221)和淮北师范大学青年科研项目(2013XQZ12)资助.

本文2013年1月21日收到, 2013年10月14日收到修改稿.

本文安排如下: 第二部分首先给出了几个正相依的概念, 再给出本文所采用模型的数学定义; 第三部分讨论了原保险公司依凸序最优的再保险策略; 在第四部分, 按照自留总损失的方差最小与二次效用最大的准则, 我们给出了自留向量的显式表达式; 第五部分是全文的总结.

§2. 模型介绍

首先, 我们给出几个正相依的概念.

定义 2.1 称两个随机变量 X 和 Y 是正象限相依(positively quadrant dependent, PQD)的, 如果对任意的实数 x 和 y , 有 $P(X > x, Y > y) \geq P(X > x)P(Y > y)$.

一个随机变量 Y 的支撑, 表示为 $S(Y)$, 指的是 \mathbf{R} 上使得 $P(Y \in S(Y)) = 1$ 的Borel集. 一个随机变量 Z 或者其分布称为PF2 (Pólya frequency of order 2)的, 如果 Z 的概率分布或密度函数是对数凹(log-concave)的.

定义 2.2 随机变量 X 称为关于随机变量 Y 随机递增(stochastically increasing, SI), 如果对任意固定的 $x \in \mathbf{R}$, $P(X > x|Y = y)$ 关于 $y \in S(Y)$ 递增, 记为 $X \uparrow_{\text{SI}} Y$.

实际上, $X \uparrow_{\text{SI}} Y$ 当且仅当 $E[u(X)|Y = y]$ 关于 $y \in S(Y)$ 递增对所有使得该条件期望存在的增函数 u 成立.

定义 2.3 随机向量 (X_1, \dots, X_n) 称为关于随机变量 Y 随机递增, 若 $E[u(X_1, \dots, X_n)|Y = y]$ 关于 $y \in S(Y)$ 递增对所有使得该条件期望存在的增函数 u 成立, 记作 $(X_1, \dots, X_n) \uparrow_{\text{SI}} Y$. 进一步, 随机向量 (X_1, \dots, X_n) 称为依随机序正相依(positively dependent through the stochastic ordering, PDS)的, 如果对任意的 $i = 1, \dots, n$, 有 $(X_1, \dots, X_{i-1}, X_{i+1}, \dots, X_n) \uparrow_{\text{SI}} X_i$.

与Cai和Wei (2012a)中命题3.8一样:

定义 2.4 称 (X_1, \dots, X_N) 是PDS的, 其中 N 为一个计数随机变量, 如果对任一 $n = 2, 3, \dots$, 随机向量 (X_1, \dots, X_n) 是PDS的.

由Cai和Wei (2012a)知, PDS的假定比独立、共同单调、条件随机递增等多种相依条件都要弱且更符合实际, 对相依风险建模是很有意义的.

下面给出本文数学模型的精确定义.

令 X_{ij} 表示第 i 个险种的第 j 个保单所产生的索赔额, $i = 1, 2, j = 1, 2, \dots, N_i$, 其中 N_i 是给定时期内险种 i 的索赔次数. 假定对固定的 $i = 1, 2$, $\{X_{i1}, X_{i2}, \dots, X_{iN_i}\}$ 是PDS的, X_{ij} 服从相同的连续型分布 F_i , 期望为 μ_i ; N_i 服从参数为 $\lambda_i > 0$ 的Poisson分布, N_1 与 N_2 也PDS. 于是两险种的累计索赔额分别为 $\sum_{j=1}^{N_1} X_{1j} =: S_1$ 和 $\sum_{j=1}^{N_2} X_{2j} =: S_2$, $\left(\sum_{i=1}^0 = 0\right)$, 总索赔额为 $S_1 + S_2 =: S$. 与文献[3-7]一样, $\{X_{1j}\}_{j=1,2,\dots}$ 与 $\{X_{2j}\}_{j=1,2,\dots}$ 独立, 且均与 N_1 及 N_2 独立, 并

满足 $E[N_1 N_2] < \infty$, $E[S^2] < \infty$.

为叙述方便, 我们记与 F_i 对应的概率密度函数为 f_i , $i = 1, 2$; 对任意的 $m, l \in \{0, 1, 2, \dots\}$, 记 $P(N_1 = m) = P_{1m}$, $P(N_2 = l) = P_{2l}$, $P(N_1 = m, N_2 = l) = P_{1m2l}$; 并假定 $x \leq 0$ 时 $F_i(x) = 0$, $x > 0$ 时 $0 < F_i(x) < 1$.

由于每一险种都可能产生一大笔索赔, 为避免潜在的巨额损失, 保险公司需采取再保险策略. 记两险种的再保险策略分别为 I_1 和 I_2 , 则保险公司在第 i 个险种的第 j 个保单的自留损失为 $I_i(X_{ij})$, $i = 1, 2$, $j = 1, 2, \dots, N_i$, 再保险公司承担余下损失, 即 $X_{ij} - I_i(X_{ij})$, 其中函数 $I_i(x)$ 在 $x \geq 0$ 上递增, 且满足 $0 \leq I_i(x) \leq x$, $i = 1, 2$, 于是保险公司在再保险策略 $I = (I_1, I_2)$ 下的自留总损失为

$$S_I =: \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^{N_i} I_i(X_{ij}).$$

注记 1 文献[4-7]假定 $N_1 = K_1 + K$, $N_2 = K_2 + K$, 其中 K_1, K_2, K 相互独立, 均服从 Poisson 分布, 即 (N_1, N_2) 依共同 Poisson 分布相关. 实际上, (N_1, N_2) 依随机序正相依 (PDS) 弱于依共同 Poisson 分布相关, 这是因为:

1) 由 Devroye (1987) 知概率分布 $p_k = (\lambda^k/k!)e^{-\lambda}$, $(k, \lambda \geq 0)$ 对数凹, 再由 Hu 和 Chen 等 (2006) 知 Poisson 分布 PF2.

2) 由 PDS 的定义易知 (K_1, K_2) 和 (K, K) 分别 PDS 且相互独立.

最后应用 Block 和 Savits 等 (1985) 中定理 5.2 即知 $(N_1, N_2) = (K_1 + K, K_2 + K)$ 是 PDS 的.

§3. 最优再保险策略

再保险条约中, 原保险公司应向再保险公司支付分保费. 同 Denuit 和 Vermandele (1998), Van Heerwaarden 等人 (1989) 以及 Cai 和 Wei (2012a) 一样, 我们假定分保费遵循期望值原则并固定于一常值 $\Upsilon = (1 + \theta_R)E[S - S_I]$, 其中 $\theta_R > 0$ 称为再保险的安全负荷. 注意 $\Upsilon = (1 + \theta_R)E[S - S_I]$ 等价于 $E[S_I]$ 固定, 或者说原保险公司自留损失的期望值固定. 现在我们讨论如下的再保险策略:

$$\Pi_c = \left\{ I = (I_1, I_2) \left| \begin{array}{l} I_i(x) \text{ 在 } x \geq 0 \text{ 上递增并满足 } 0 \leq I_i(x) \leq x, i = 1, 2, \\ \text{且 } E[S_I] = E[S] - \Upsilon / (1 + \theta_R) =: c > 0 \end{array} \right. \right\}.$$

特别, 当 $I_i(x) = x \wedge M_i$, $i = 1, 2$ 时, $I = (I_1, I_2)$ 称为超额赔款条约, $M = (M_1, M_2)$ 称为超额赔款条约的自留向量.

为了比较再保险策略的优劣, 我们给出如下定义.

定义 3.1 随机变量 X 称为关于凸序小于随机变量 Y , 如果 $E[u(X)] \leq E[u(Y)]$ 对所有使得 $u(X), u(Y)$ 期望存在的凸函数 u 成立, 记为 $X \leq_{cx} Y$.

本文中, 我们采用一个统一的优化标准

$$\inf_{I \in \Pi_c} \mathbb{E}[u(S_I)],$$

其中 u 为凸函数. 在此标准下, 研究原保险公司的最优再保险策略 $I^* = (I_1^*, I_2^*) \in \Pi_c$.

分别令 $u(x) = x^2$, $u(x) = -U(x)$, 其中 $U(x)$ 为原保险公司自留损失的效用函数, $U''(x) < 0$, 则知该优化标准包括了自留总损失方差最小, 期望凹效用函数最大等.

我们以 Π_c^* 表示 Π_c 中所有的超额赔款条约, 即

$$\Pi_c^* = \{I^M = (I^{M_1}, I^{M_2}) | I^M \in \Pi_c, I^{M_i}(x) = x \wedge M_i, M_i \geq 0, i = 1, 2\}.$$

该子类 Π_c^* 由自留向量 $M = (M_1, M_2)$ 唯一确定, 并存在 Π_c^* 与 L_c 间的一一映射, 其中

$$L_c = \left\{ (M_1, M_2) | M_i \geq 0, i = 1, 2, \text{ 且 } \mathbb{E} \left[\sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^{N_i} (X_{ij} \wedge M_i) \right] = c > 0 \right\},$$

并记 $S_Z = S_Z(M_1, M_2) = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^{N_i} (X_{ij} \wedge M_i)$.

引理 3.1 假定 f_1, f_2, \dots, f_n 为增函数. 如果随机向量 (X_1, X_2, \dots, X_n) 有连接函数 C , 则 $(f_1(X_1), f_2(X_2), \dots, f_n(X_n))$ 也有相同的连接函数 C .

该引理的证明见Cai和Wei (2012b).

定理 3.1 在模型定义下, 对任一再保险策略 $I = (I_1, I_2) \in \Pi_c$, 都存在一个 $(M_1, M_2) \in L_c$, 使得 $S_Z \leq_{cx} S_I$, 其中 M_i 由 $\mathbb{E}[X_{ij} \wedge M_i] = \mathbb{E}[I_i(X_{ij})]$ 确定, $i = 1, 2$.

证明: 分别对 $i = 1, 2$, 对任意的 $j \geq 1$, 由Cai和Wei (2012a)中命题3.7的证明知, 必存在 $(M_1, M_2) \in L_c$, 使得 $X_{ij} \wedge M_i \leq_{cx} I_i(X_{ij})$. 又由引理3.1知 $\forall m, l \in \{0, 1, 2, \dots\}$,

$$(X_{11}, X_{12}, \dots, X_{1m}, X_{21}, X_{22}, \dots, X_{2l})$$

与

$$(X_{11} \wedge M_1, X_{12} \wedge M_1, \dots, X_{1m} \wedge M_1, X_{21} \wedge M_2, X_{22} \wedge M_2, \dots, X_{2l} \wedge M_2)$$

及

$$(I_1(X_{11}), I_1(X_{12}), \dots, I_1(X_{1m}), I_2(X_{21}), I_2(X_{22}), \dots, I_2(X_{2l}))$$

有相同的连接函数. 所以由Cai和Wei (2012a)中推论3.5知 $\forall m, l \in \{0, 1, 2, \dots\}$ 有

$$\sum_{j=1}^m (X_{1j} \wedge M_1) + \sum_{j=1}^l (X_{2j} \wedge M_2) \leq_{cx} \sum_{j=1}^m I_1(X_{1j}) + \sum_{j=1}^l I_2(X_{2j}),$$

于是对任意的凸函数 u , 我们有

$$\begin{aligned} E[u(S_Z)] &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} E\left[u\left(\sum_{j=1}^m (X_{1j} \wedge M_1) + \sum_{j=1}^l (X_{2j} \wedge M_2)\right)\right] P_{1m2l} \\ &\leq \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} E\left[u\left(\sum_{j=1}^m I_1(X_{1j}) + \sum_{j=1}^l I_2(X_{2j})\right)\right] P_{1m2l} \\ &= E[u(S_I)]. \end{aligned}$$

即 $S_Z \leq_{cx} S_I$. \square

定理3.1表明对于PDS风险 $\{X_{1j}\}_{j=1,2,\dots,N_1}$ 与 $\{X_{2j}\}_{j=1,2,\dots,N_2}$ 及任意凸函数 u , 有

$$\inf_{I \in \Pi_c} E[u(S_I)] = \inf_{(M_1, M_2) \in L_c} E[u(S_Z)].$$

也就是说, 保险公司为了使自留损失相应的风险度量最小, 超额赔款再保险是最优策略.

§4. 超额赔款条约中自留向量的显式表达式

本节在自留总损失方差最小与二次效用函数最大的准则下, 讨论自留向量的具体表达式. 一般而言, 因为相依风险的复杂性, 要获得多维情形下的自留向量的显式表达式比较困难, Cai和Wei (2012a)针对二维情形给出了相应结果. 本文针对的是二维与随机多维混杂的一个优化问题, 因为我们要在 L_c 中求 (M_1^*, M_2^*) 的显式表达式, 使得

$$E[(S_Z(M_1^*, M_2^*))^2] = \inf_{(M_1, M_2) \in L_c} E[(S_Z(M_1, M_2))^2], \quad (4.1)$$

其中,

$$\begin{aligned} S_Z(M_1, M_2) &= \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^{N_i} (X_{ij} \wedge M_i), \\ L_c &= \left\{ (M_1, M_2) \mid \lambda_1 \int_0^{M_1} \overline{F_1}(x) dx + \lambda_2 \int_0^{M_2} \overline{F_2}(x) dx = c > 0, M_1, M_2 \geq 0 \right\}. \end{aligned}$$

为给出自留向量的显式表示, 我们需如下的引理4.1-4.4.

引理 4.1 设 N 为一个计数随机变量, (X_1, X_2, \dots, X_N) 是PDS的, 则 $\forall j, k \geq 1$, 有 $X_j \uparrow_{SI} X_k$, 且 $\text{Cov}(f(X_j), g(X_k)) \geq 0$, 其中 f 和 g 为使得期望 $E[f(X_j)]$, $E[g(X_k)]$ 以及 $E[f(X_j)g(X_k)]$ 存在的增函数.

证明: 由 (X_1, X_2, \dots, X_N) 是PDS的知, 对任一 $n = 2, 3, \dots$, 随机向量 (X_1, X_2, \dots, X_n) 也是PDS的, 于是对任意的 $n \geq 2$ 与 $1 \leq k \leq n$, 有

$$E[u(X_1, \dots, X_{k-1}, X_{k+1}, \dots, X_n) | X_k = x_k]$$

关于 $x_k \in S(X_k)$ 递增对所有使得该条件期望存在的增函数 $u: \mathbf{R}^{n-1} \rightarrow \mathbf{R}$ 成立. 下面任取 $j, k \geq 1, j \neq k, n > j, k$ 及增函数 $v: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, 其中 v 使得 $E[v(X_j)|X_k = x_k]$ 存在, 并取

$$u(x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n) = v(x_j).$$

易见 u 为增函数且 $E[u(X_1, \dots, X_{k-1}, X_{k+1}, \dots, X_n)|X_k = x_k]$ 存在. 因此

$$E[v(X_j)|X_k = x_k] = E[u(X_1, \dots, X_{k-1}, X_{k+1}, \dots, X_n)|X_k = x_k]$$

关于 $x_k \in S(X_k)$ 递增. 即 $j \neq k$ 时, $X_j \uparrow_{SI} X_k$, 而 $j = k$ 时, $X_j \uparrow_{SI} X_k$ 显然成立, 于是由 Nelsen (2006) 知 (X_j, X_k) 是 PQD 的, 再由 Lehmann (1966) 知 $\text{Cov}(f(X_j), g(X_k)) \geq 0$. \square

引理 4.2 在集合 L_c 上, 由 M_1 到 M_2 的映射是一对一的. 若用 $M_2 = L(M_1)$ 表示该映射, 则 $L(M_1)$ 连续可微、严格递减且

$$\frac{\partial M_2}{\partial M_1} = -\frac{\lambda_1 \overline{F_1}(M_1)}{\lambda_2 \overline{F_2}(M_2)}.$$

证明: 与 Cai 和 Wei (2012a) 中引理 4.1 的证明类似, 故略去. \square

由单调收敛定理知极限 $\lim_{M_1 \uparrow \infty} L(M_1)$ 和 $\lim_{M_2 \uparrow \infty} L^{-1}(M_2)$ 均在集合 L_c 上存在. 根据 L_c 的含义进一步假定 $\lambda_1 \mu_1 < c, \lambda_2 \mu_2 < c$, 则 $0 < \underline{M}_1 := \lim_{M_2 \uparrow \infty} L^{-1}(M_2), 0 < \underline{M}_2 := \lim_{M_1 \uparrow \infty} L(M_1)$. 因此 $(\underline{M}_1, \infty)$ 是满足 $\lim_{M_1 \downarrow \underline{M}_1} L(M_1) = \infty$ 和 $\lim_{M_1 \uparrow \infty} L(M_1) = \underline{M}_2$ 的函数 $L(M_1)$ 的定义域, 且在集合 L_c 上, $M_1 \downarrow \underline{M}_1 \iff M_2 \uparrow \infty$.

引理 4.3 在模型假定下, 记 $\hat{S}(M_1, M_2) = E[(S_Z(M_1, M_2))^2], (M_1, M_2) \in L_c$, 则 $\hat{S}(M_1, M_2) = \hat{S}(M_1, L(M_1))$ 在 $(\underline{M}_1, \infty)$ 上连续并满足

$$\lim_{M_1 \uparrow \infty} \hat{S}(M_1, L(M_1)) = \hat{S}(\infty, \underline{M}_2), \quad \lim_{M_1 \downarrow \underline{M}_1} \hat{S}(M_1, L(M_1)) = \hat{S}(\underline{M}_1, \infty).$$

证明: 根据模型定义易知 $\forall s \in \mathbf{R}$,

$$0 \leq E[(S_Z(s, L(s)))^2] \leq E[S^2] < \infty.$$

再由 Lebesgue 控制收敛定理知, 对任意 $M_1 \in (\underline{M}_1, \infty)$,

$$\lim_{s \rightarrow M_1} \hat{S}(s, L(s)) = E\left[\lim_{s \rightarrow M_1} (S_Z(s, L(s)))^2\right] = E[(S_Z(M_1, L(M_1)))^2] = \hat{S}(M_1, L(M_1)).$$

可见 $\hat{S}(M_1, L(M_1))$ 在 $(\underline{M}_1, \infty)$ 上连续.

后面两式可用类似的方法证明. \square

引理 4.4 $\widehat{S}(M_1, M_2)$ 关于 M_1 的右导数 $(\partial^+/\partial M_1)\widehat{S}(M_1, M_2)$ 在 $(\underline{M}_1, \infty)$ 上右连续, 并且

$$\frac{\partial^+}{\partial M_1}\widehat{S}(M_1, M_2) = \frac{2\overline{F}_1(M_1)}{\lambda_2}(T_1(M_1) - T_2(M_1) + T_3(M_1)), \quad (4.2)$$

其中,

$$T_1(M_1) = \lambda_2 \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^m \mathbb{E}[X_{1j} \wedge M_1 | X_{1k} > M_1] \mathbf{P}_{1m},$$

$$T_2(M_1) = \lambda_1 \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=1}^l \sum_{j=1}^l \mathbb{E}[X_{2j} \wedge M_2 | X_{2k} > M_2] \mathbf{P}_{2l},$$

$$T_3(M_1) = \mathbb{E}[N_1 N_2] \left(c - 2\lambda_1 \int_0^{M_1} \overline{F}_1(x) dx \right).$$

证明: 记 $f(\omega, s) = \left(\sum_{j=1}^{N_1(\omega)} (X_{1j}(\omega) \wedge s) + \sum_{j=1}^{N_2(\omega)} (X_{2j}(\omega) \wedge L(s)) \right)^2$, 于是

$$\widehat{S}(M_1, M_2) = \mathbb{E}[f(\omega, M_1)] = \int_{\Omega} f(\omega, M_1) \mathbf{P}(d\omega).$$

注意到对任一固定的 $\omega \in \Omega$, $f(\omega, s)$ 关于 s 的右导数在 $(\underline{M}_1, \infty)$ 上存在, 应用单侧导数的运算法则得

$$\frac{\partial^+}{\partial s} f(\omega, s) = 2 \left(\sum_{j=1}^{N_1} (X_{1j} \wedge s) + \sum_{j=1}^{N_2} (X_{2j} \wedge L(s)) \right) \left(\sum_{j=1}^{N_1} I_{\{X_{1j} > s\}} + \frac{\partial L(s)}{\partial s} \sum_{j=1}^{N_2} I_{\{X_{2j} > L(s)\}} \right).$$

令 $[a, M_1] \subset (\underline{M}_1, \infty)$, 则对任意 $(\omega, s) \in \Omega \times [a, M_1]$, 有

$$0 \leq \sum_{j=1}^{N_1} (X_{1j} \wedge s) + \sum_{j=1}^{N_2} (X_{2j} \wedge L(s)) \leq \sum_{j=1}^{N_1} X_{1j} + \sum_{j=1}^{N_2} X_{2j} = S,$$

又由引理 4.2 易知

$$\left| \sum_{j=1}^{N_1} I_{\{X_{1j} > s\}} + \frac{\partial L(s)}{\partial s} \sum_{j=1}^{N_2} I_{\{X_{2j} > L(s)\}} \right| \leq N_1 + N_2 \left| \frac{\partial L(s)}{\partial s} \right| \leq N_1 + \frac{\lambda_1 N_2}{\lambda_2 \overline{F}_2(L(a))}, \quad (4.3)$$

于是根据模型定义与 Cauchy-Schwarz 不等式得

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left[\left| \frac{\partial^+}{\partial s} f(\omega, s) \right| \right] \\ &= \mathbb{E} \left[2 \left(\sum_{j=1}^{N_1} (X_{1j} \wedge s) + \sum_{j=1}^{N_2} (X_{2j} \wedge L(s)) \right) \left| \sum_{j=1}^{N_1} I_{\{X_{1j} > s\}} + \frac{\partial L(s)}{\partial s} \sum_{j=1}^{N_2} I_{\{X_{2j} > L(s)\}} \right| \right] \\ &\leq 2 \mathbb{E} \left[S \left(N_1 + \frac{\lambda_1 N_2}{\lambda_2 \overline{F}_2(L(a))} \right) \right] \\ &\leq 2 \sqrt{\mathbb{E}[S^2]} \sqrt{\mathbb{E} \left[\left(N_1 + \frac{\lambda_1 N_2}{\lambda_2 \overline{F}_2(L(a))} \right)^2 \right]} \\ &< \infty. \end{aligned}$$

所以

$$\int_a^{M_1} \mathbb{E} \left[\left| \frac{\partial^+}{\partial s} f(\omega, s) \right| \right] ds < \infty.$$

根据Fubini定理, $(\partial^+/\partial s)f(\omega, s)$ 在 $\Omega \times [a, M_1]$ 可积且可交换积分与期望的顺序,

$$\int_a^{M_1} \mathbb{E} \left[\frac{\partial^+}{\partial s} f(\omega, s) \right] ds = \mathbb{E} \left[\int_a^{M_1} \frac{\partial^+}{\partial s} f(\omega, s) ds \right]. \quad (4.4)$$

既然 $(\partial^+/\partial s)f(\omega, s)$ 在 $\Omega \times [a, M_1]$ 可积, 再次利用Fubini定理知存在 $\Omega_0 \subset \Omega$, 其中 $\mathbb{P}(\Omega - \Omega_0) = 0$, 使得对任意 $\omega \in \Omega_0$,

$$\frac{\partial^+}{\partial s} f(\omega, s) = 2 \left(\sum_{j=1}^{N_1} (X_{1j} \wedge s) + \sum_{j=1}^{N_2} (X_{2j} \wedge L(s)) \right) \left(\sum_{j=1}^{N_1} I_{\{X_{1j} > s\}} + \frac{\partial L(s)}{\partial s} \sum_{j=1}^{N_2} I_{\{X_{2j} > L(s)\}} \right)$$

在 $[a, M_1]$ 上可积, 其中, $\sum_{j=1}^{N_1} (X_{1j} \wedge s) + \sum_{j=1}^{N_2} (X_{2j} \wedge L(s)) \leq S$, 结合(4.3)式知

$$\left| \frac{\partial^+}{\partial s} f(\omega, s) \right| \leq 2S \left(N_1 + \frac{\lambda_1 N_2}{\lambda_2 \overline{F}_2(L(a))} \right),$$

而

$$\int_{\Omega_0} 2S \left(N_1 + \frac{\lambda_1 N_2}{\lambda_2 \overline{F}_2(L(a))} \right) \mathbb{P}(d\omega) = 2\mathbb{E} \left[S \left(N_1 + \frac{\lambda_1 N_2}{\lambda_2 \overline{F}_2(L(a))} \right) \right] < \infty.$$

利用控制收敛定理并注意到 $(\partial^+/\partial s)f(\omega, s)$ 关于 s 右连续, 得

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta s \rightarrow 0^+} \mathbb{E} \left[\frac{\partial^+}{\partial s} f(\omega, s + \Delta s) \right] &= \lim_{\Delta s \rightarrow 0^+} \int_{\Omega_0} \frac{\partial^+}{\partial s} f(\omega, s + \Delta s) \mathbb{P}(d\omega) \\ &= \int_{\Omega_0} \lim_{\Delta s \rightarrow 0^+} \left(\frac{\partial^+}{\partial s} f(\omega, s + \Delta s) \right) \mathbb{P}(d\omega) \\ &= \int_{\Omega_0} \frac{\partial^+}{\partial s} f(\omega, s) \mathbb{P}(d\omega) \\ &= \mathbb{E} \left[\frac{\partial^+}{\partial s} f(\omega, s) \right]. \end{aligned}$$

由此得出 $\mathbb{E}[(\partial^+/\partial s)f(\omega, s)]$ 关于 s 右连续.

再对任一固定的 $\omega \in \Omega$, 记

$$A = \{X_{11}(\omega), X_{12}(\omega), \dots, X_{1N_1(\omega)}(\omega)\}, \quad B = \{X_{21}(\omega), X_{22}(\omega), \dots, X_{2N_2(\omega)}(\omega)\},$$

易见 $g(s) = \sum_{j=1}^{N_1} (X_{1j} \wedge s) + \sum_{j=1}^{N_2} (X_{2j} \wedge L(s))$ 在 $[a, M_1] \setminus (A \cup B)$ 上处处可导, 所以 $f(\omega, s) = g^2(s)$ 在 $[a, M_1] \setminus (A \cup B)$ 上处处可导, 其右导数等于导数. 显然 $m(A \cup B) = 0$, 这里 m 表示

Lebesgue测度. 于是

$$\begin{aligned}\int_a^{M_1} \frac{\partial^+}{\partial s} f(\omega, s) ds &= \int_{[a, M_1] \setminus (A \cup B)} \frac{\partial^+}{\partial s} f(\omega, s) ds \\ &= \int_{[a, M_1] \setminus (A \cup B)} \frac{\partial}{\partial s} f(\omega, s) ds \\ &= \int_a^{M_1} \frac{\partial}{\partial s} f(\omega, s) ds = f(\omega, M_1) - f(\omega, a).\end{aligned}\quad (4.5)$$

结合(4.4)与(4.5)式知

$$\int_a^{M_1} \mathbb{E} \left[\frac{\partial^+}{\partial s} f(\omega, s) \right] ds = \mathbb{E}[f(\omega, M_1) - f(\omega, a)] = \hat{S}(M_1, M_2) - \mathbb{E}[f(\omega, a)]. \quad (4.6)$$

不难证明, 当 $\phi(x)$ 在闭区间 Λ 上右连续且可积时, $\Phi(x) = \int_a^x \phi(t) dt$, $a \in \Lambda$ 满足 $(\partial^+/\partial x) \cdot \Phi(x) = \phi(x)$, $\forall x \in \Lambda$. 由此, 根据模型定义与 $\mathbb{E}[(\partial^+/\partial s)f(\omega, s)]$ 关于 s 右连续, 对(4.6)式两侧求右导数得

$$\begin{aligned}& \frac{\partial^+}{\partial M_1} \hat{S}(M_1, M_2) \\ &= \frac{\partial^+}{\partial M_1} \int_a^{M_1} \mathbb{E} \left[\frac{\partial^+}{\partial s} f(\omega, s) \right] ds = \mathbb{E} \left[\frac{\partial^+}{\partial M_1} f(\omega, M_1) \right] \\ &= \mathbb{E} \left[2 \left(\sum_{j=1}^{N_1} (X_{1j} \wedge M_1) + \sum_{j=1}^{N_2} (X_{2j} \wedge M_2) \right) \left(\sum_{j=1}^{N_1} I_{\{X_{1j} > M_1\}} + \frac{\partial M_2}{\partial M_1} \sum_{j=1}^{N_2} I_{\{X_{2j} > M_2\}} \right) \right] \\ &= 2 \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \mathbb{E} \left[\left(\sum_{j=1}^m (X_{1j} \wedge M_1) + \sum_{j=1}^l (X_{2j} \wedge M_2) \right) \left(\sum_{k=1}^m I_{\{X_{1k} > M_1\}} \right) \right] P_{1m2l} \\ &\quad - 2 \frac{\lambda_1 \bar{F}_1(M_1)}{\lambda_2 \bar{F}_2(M_2)} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \mathbb{E} \left[\left(\sum_{j=1}^m (X_{1j} \wedge M_1) + \sum_{j=1}^l (X_{2j} \wedge M_2) \right) \sum_{k=1}^l I_{\{X_{2k} > M_2\}} \right] P_{1m2l} \\ &= 2 \bar{F}_1(M_1) \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=1}^m \mathbb{E} \left[\left(\sum_{j=1}^m (X_{1j} \wedge M_1) + \sum_{j=1}^l (X_{2j} \wedge M_2) \right) \middle| X_{1k} > M_1 \right] P_{1m2l} \\ &\quad - 2 \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \bar{F}_1(M_1) \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=1}^l \mathbb{E} \left[\left(\sum_{j=1}^m (X_{1j} \wedge M_1) + \sum_{j=1}^l (X_{2j} \wedge M_2) \right) \middle| X_{2k} > M_2 \right] P_{1m2l} \\ &= 2 \bar{F}_1(M_1) \left(\frac{T_1(M_1)}{\lambda_2} + \mathbb{E}[N_1 N_2] \int_0^{M_2} \bar{F}_2(x) dx - \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \mathbb{E}[N_1 N_2] \int_0^{M_1} \bar{F}_1(x) dx - \frac{T_2(M_1)}{\lambda_2} \right) \\ &= \frac{2 \bar{F}_1(M_1)}{\lambda_2} (T_1(M_1) - T_2(M_1) + T_3(M_1)).\end{aligned}\quad (4.7)$$

由(4.7)式知 $(\partial^+/\partial M_1) \hat{S}(M_1, M_2)$ 在 $M_1 \in (\underline{M}_1, \infty)$ 上右连续. \square

有了引理4.1-4.4的预备结果, 下面我们确定 $(M_1^*, M_2^*) \in L_c$ 使得

$$\mathbb{E}[(S_Z(M_1^*, M_2^*))^2] = \inf_{(M_1, M_2) \in L_c} \mathbb{E}[(S_Z(M_1, M_2))^2].$$

定理 4.1 在模型定义下, 对 $M_1 \in (\underline{M}_1, \infty)$, 定义

$$C(M_1) = T_1(M_1) - T_2(M_1) + T_3(M_1),$$

并记 $\theta_1 = \sup\{M_1 | C(M_1) < 0\}$, $\theta_2 = \inf\{M_1 | C(M_1) > 0\}$, 则 $\underline{M}_1 < \theta_1 \leq \theta_2 < \infty$, 且对任意 $M_1^* \in [\theta_1, \theta_2]$, 自留向量 $(M_1^*, L(M_1^*))$ 为 (4.1) 的解.

证明: 首先考察 $C(M_1)$ 的单调性. 注意到

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^+}{\partial M_1} C(M_1) \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^m \frac{\mathbb{E}[I_{\{X_{1j} > M_1\}} I_{\{X_{1k} > M_1\}}] \overline{F}_1(M_1) + \mathbb{E}[(X_{1j} \wedge M_1) I_{\{X_{1k} > M_1\}}] f_1(M_1)}{\overline{F}_1^2(M_1)/\lambda_2} P_{1m} \\ & \quad + \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=1}^l \sum_{j=1}^l \frac{\mathbb{E}[I_{\{X_{2j} > M_2\}} I_{\{X_{2k} > M_2\}}] \overline{F}_2(M_2) + \mathbb{E}[(X_{2j} \wedge M_2) I_{\{X_{2k} > M_2\}}] f_2(M_2)}{[(\lambda_2 \overline{F}_2(M_2))/(\lambda_1^2 \overline{F}_1(M_1))] \overline{F}_2^2(M_2)} P_{2l} \\ & \quad - 2\lambda_1 \mathbb{E}[N_1 N_2] \overline{F}_1(M_1) \\ &\geq \lambda_2 \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^m \frac{\mathbb{E}[I_{\{X_{1j} > M_1\}} I_{\{X_{1k} > M_1\}}]}{\overline{F}_1(M_1)} P_{1m} - 2\lambda_1 \mathbb{E}[N_1 N_2] \overline{F}_1(M_1) \\ & \quad + \frac{\lambda_1^2 \overline{F}_1(M_1)}{\lambda_2 \overline{F}_2(M_2)} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=1}^l \sum_{j=1}^l \frac{\mathbb{E}[I_{\{X_{2j} > M_2\}} I_{\{X_{2k} > M_2\}}]}{\overline{F}_2(M_2)} P_{2l} \\ &\geq \lambda_2 \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^m \frac{\mathbb{E}[I_{\{X_{1j} > M_1\}}] \mathbb{E}[I_{\{X_{1k} > M_1\}}]}{\overline{F}_1(M_1)} P_{1m} - 2\lambda_1 \mathbb{E}[N_1 N_2] \overline{F}_1(M_1) \\ & \quad + \frac{\lambda_1^2 \overline{F}_1(M_1)}{\lambda_2 \overline{F}_2(M_2)} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=1}^l \sum_{j=1}^l \frac{\mathbb{E}[I_{\{X_{2j} > M_2\}}] \mathbb{E}[I_{\{X_{2k} > M_2\}}]}{\overline{F}_2(M_2)} P_{2l} \\ &= \lambda_2 \overline{F}_1(M_1) \mathbb{E}[N_1^2] + \frac{\lambda_1^2 \overline{F}_1(M_1)}{\lambda_2} \mathbb{E}[N_2^2] - 2\mathbb{E}[N_1 N_2] \lambda_1 \overline{F}_1(M_1) \\ &= \frac{\overline{F}_1(M_1)}{\lambda_2} \mathbb{E}[(\lambda_2 N_1 - \lambda_1 N_2)^2] \\ &\geq 0, \end{aligned}$$

其中第二个不等式是由引理4.1得到的. 由 F_1, F_2 的连续性不难证明 $C(M_1)$ 连续, 而 $(\partial^+ / \partial M_1) C(M_1) \geq 0$, 由 Miller 和 Vyborny (1986) 中定理1知 $C(M_1)$ 单调增加.

下面我们 $C(M_1)$ 考察在 $M_1 \in (\underline{M}_1, \infty)$ 的两个端点 \underline{M}_1 和 ∞ 处的极限值. 首先,

$$\begin{aligned} \lim_{M_1 \downarrow \underline{M}_1} C(M_1) &\leq \lim_{M_1 \downarrow \underline{M}_1} \left(\lambda_2 M_1 \mathbb{E}[N_1^2] - \lambda_1 \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=1}^l \mathbb{E}[M_2 | X_{2k} > M_2] P_{2l} + \mathbb{E}[N_1 N_2] c \right) \\ &= \lim_{M_1 \downarrow \underline{M}_1} \lambda_2 M_1 \mathbb{E}[N_1^2] + \lim_{M_2 \uparrow \infty} (\mathbb{E}[N_1 N_2] c - \lambda_1 \lambda_2 M_2) \\ &= -\infty, \end{aligned}$$

因此必存在 $M_1 > \underline{M}_1$ 使得 $C(M_1) < 0$, 即 $\{M_1 | C(M_1) < 0\} \neq \emptyset$, 且 $\theta_1 = \sup\{M_1 | C(M_1) < 0\}$

$0\} > \underline{M}_1$. 其次,

$$\begin{aligned}\lim_{M_1 \uparrow \infty} C(M_1) &\geq \lim_{M_1 \uparrow \infty} \left(\lambda_2 \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=1}^m \mathbf{E}[M_1 | X_{1k} > M_1] \mathbf{P}_{1m} - \lambda_1 M_2 \mathbf{E}[N_2^2] - \mathbf{E}[N_1 N_2] c \right) \\ &= \lim_{M_1 \uparrow \infty} \lambda_2 M_1 \lambda_1 - \lim_{M_2 \downarrow \underline{M}_2} (\lambda_1 \mathbf{E}[N_2^2] M_2 + \mathbf{E}[N_1 N_2] c) \\ &= \infty,\end{aligned}$$

因此必存在 $M_1 \in (\underline{M}_1, \infty)$ 使得 $C(M_1) > 0$, 即 $\{M_1 | C(M_1) > 0\} \neq \emptyset$, 且 $\theta_2 = \inf\{M_1 | C(M_1) > 0\} < \infty$.

由 $C(M_1)$ 递增知对任意的 $x \in \{M_1 | C(M_1) < 0\}$, $y \in \{M_1 | C(M_1) > 0\}$, 有 $x < y$, 所以 $\theta_1 = \sup\{M_1 | C(M_1) < 0\} \leq \inf\{M_1 | C(M_1) > 0\} = \theta_2$. 又由 θ_1, θ_2 的定义知, 对任意的 $M_1 \in (\underline{M}_1, \theta_1)$ 有 $C(M_1) < 0$, 对任意的 $M_1 \in (\theta_2, \infty)$ 有 $C(M_1) > 0$. 并且, 当 $M_1 > \theta_1$ 时, $C(M_1) \geq 0$; 当 $M_1 < \theta_2$ 时, $C(M_1) \leq 0$. 综上可得, 对任意的 $M_1 \in (\theta_1, \theta_2)$, $C(M_1) = 0$.

由引理4.4知

$$\frac{\partial^+}{\partial M_1} \hat{S}(M_1, M_2) = 2 \frac{\overline{F}_1(M_1)}{\lambda_2} C(M_1),$$

所以 $(\partial^+ / \partial M_1) \hat{S}(M_1, L(M_1))$ 与 $C(M_1)$ 在 $M_1 \in (\underline{M}_1, \infty)$ 上同号. 因此 $\hat{S}(M_1, L(M_1))$ 在 $M_1 \in (\underline{M}_1, \theta_1)$ 上严格递减, 在 $M_1 \in (\theta_2, \infty)$ 上严格递增, 在 $M_1 \in (\theta_1, \theta_2)$ 上为常数. 而由引理4.3知 $\hat{S}(M_1, L(M_1))$ 连续, 进一步知 $\hat{S}(M_1, L(M_1))$ 在 $M_1 \in [\theta_1, \theta_2]$ 上为常数. 于是

$$\inf_{M_1 \in (\underline{M}_1, \infty)} \hat{S}(M_1, L(M_1)) = \hat{S}(M_1^*, L(M_1^*)),$$

其中 $M_1^* \in [\theta_1, \theta_2]$. 又由引理4.3知对任意的 $M_1^* \in [\theta_1, \theta_2]$,

$$\begin{aligned}\hat{S}(M_1^*, L(M_1^*)) &< \lim_{M_1 \uparrow \infty} \hat{S}(M_1, L(M_1)) = \hat{S}(\infty, \underline{M}_2), \\ \hat{S}(M_1^*, L(M_1^*)) &< \lim_{M_1 \downarrow \underline{M}_1} \hat{S}(M_1, L(M_1)) = \hat{S}(\underline{M}_1, \infty),\end{aligned}$$

所以, $\inf_{M_1 \in [\underline{M}_1, \infty]} \hat{S}(M_1, L(M_1)) = \hat{S}(M_1^*, L(M_1^*))$ 对任意的 $M_1^* \in [\theta_1, \theta_2]$ 成立. \square

§5. 结 语

本文将经典的二元复合Poisson模型中关于索赔额独立的条件, 放宽到更为实际的依随机序正相依, 也将索赔次数按一个共同Poisson分布相关的条件减弱到依随机序正相依, 并证明了超额赔款再保险策略按凸序最优. 研究发现, 自留总损失的方差随着任一险种自留额的增大而先减后增. 特别当自留向量取 (M_1^*, M_2^*) 时, 方差最小. 若定义自留总损失的效用函数为 $U(x) = -x^2 + bx + c$, 对应的期望效用也最大, 部分解决了Cai和Wei (2012a)提出

的关于此类显式表达式的求解问题. 并且易见 M_1^* 的取值区间与任一险种内部索赔额的正相依程度以及两险种间索赔次数的正相依程度都密切相关, 与实际相符合.

致谢 作者衷心感谢匿名审稿专家和编辑老师的修改意见与写作指导, 他们的意见大大提高了本文的语言表达和数学规范.

参 考 文 献

- [1] Cai, J. and Wei, W., Optimal reinsurance with positively dependent risks, *Insurance: Mathematics and Economics*, **50**(1)(2012a), 57–63.
- [2] Ambagaspitiya, R.S., On the distribution of two classes of correlated aggregate claims, *Insurance: Mathematics and Economics*, **24**(3)(1999), 301–308.
- [3] Wang, G.Y. and Yuen, C., On a correlated aggregate claims model with thinning-dependence structure, *Insurance: Mathematics and Economics*, **36**(3)(2005), 456–468.
- [4] Centeno, M.L., Dependent risks and excess of loss reinsurance, *Insurance: Mathematics and Economics*, **37**(2)(2005), 229–238.
- [5] Yuen, K.C., Guo, J.Y. and Wu, X.Y., On the first time of ruin in the bivariate compound Poisson model, *Insurance: Mathematics and Economics*, **38**(2)(2006), 298–308.
- [6] 朱亚茹, VaR下两相依风险的最优停止损失再保险, 南开大学学报, **42**(4)(2009), 81–85.
- [7] 吕同玲, 郭军义, 张鑫, 二元复合Poisson风险模型的几个结果, 应用概率统计, **27**(5)(2011), 449–459.
- [8] Cai, J. and Wei, W., On the invariant properties of notions of positive dependence and copulas under increasing transformations, *Insurance: Mathematics and Economics*, **50**(1)(2012b), 43–49.
- [9] Devroye, L., A simple generator for discrete log-concave distributions, *Computing*, **39**(1)(1987), 87–91.
- [10] Hu, T.Z., Chen, J. and Yao, J.C., Preservation of the location independent risk order under convolution, *Insurance: Mathematics and Economics*, **38**(2)(2006), 406–412.
- [11] Block, H.W., Savits, T.H. and Shaked, M., A concept of negative dependence using stochastic ordering, *Statistics and Probability Letters*, **3**(2)(1985), 81–86.
- [12] Denuit, M. and Vermandele, C., Optimal reinsurance and stop-loss order, *Insurance: Mathematics and Economics*, **22**(3)(1998), 229–233.
- [13] Van Heerwaarden, A.E., Kaas, R. and Goovaerts, M.J., Optimal reinsurance in relation to ordering of risks, *Insurance: Mathematics and Economics*, **8**(1)(1989), 11–17.
- [14] Nelsen, R.B., *An Introduction to Copulas*, Springer, 2006.
- [15] Lehmann, E.L., Some concepts of dependence, *Annals of Mathematical Statistics*, **7**(5)(1966), 1137–1153.
- [16] Miller, A.D. and Vyborny, R., Some remarks on functions with one-sided derivatives, *The American Mathematical Monthly*, **93**(6)(1986), 471–475.

Optimal Reinsurance with Risks Positively Dependent through the Stochastic Ordering

ZHANG JIESONG^{1,2}

XIAO QINGXIAN¹

(¹*Business School, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai, 200093*)

(²*School of Mathematical Sciences, Huaibei Normal University, Huaibei, 235000*)

In the classic bivariate compound Poisson models, the numbers of claims are assumed to be correlated through a common Poisson distribution, while the claim sizes are independent. In this paper, we assume that both the numbers of claims and claim sizes are positively dependent through the stochastic ordering. Through comparing, we find that the condition of positive dependence through the stochastic ordering is weaker than correlating through a common Poisson distribution. In fact, the assumption of positive dependence through the stochastic ordering is weaker than independence, comonotonicity, conditionally stochastically increasing et al.. With the positively dependent risks through the stochastic ordering, we get the optimal reinsurance strategy. In addition, with the mixed two-dimensional and stochastic-dimensional dependent risks, we give the explicit expressions of retention vector under the criterion of minimizing the variance of the total retained loss and maximizing the quadratic utility, which partially solves the problem, proposed by Cai and Wei (2012a), of getting such expressions with multi-dimensional dependent risks.

Keywords: PDS, bivariate compound Poisson model, optimal reinsurance, copula.

AMS Subject Classification: 91B30, 46N30.