

超市模型的实时动态控制及其数值分析 *

李泉林 杜 晔 王 盟 代桂蓉

(燕山大学经济管理学院, 秦皇岛, 066004)

摘 要

超市模型是针对大型并行排队网络所进行的实时动态控制的随机负载平衡策略, 它在计算机网络、云计算、制造系统、交通网络等领域有着重要的实际应用价值. 本文考虑了超市模型中的若干重要问题: 实时动态控制模式; 效率比较; 平均场黑洞; 马氏变动环境; 稳定性; 固定点; 系统性能评价等等. 同时, 本文也通过数值算例研究了上述重要问题, 包括对顾客加入最短队列的超市模型与服务台服务最长队列的超市模型进行了性能比较, 给出了他们效率的优劣分析; 在超市模型中对控制到达过程机制进行了三种情况的对比; 对马氏变动环境下的超市模型进行了性能评价.

关键词: 超市模型, 随机负载平衡策略, 随机变动环境, 平均场黑洞, 性能评价, 固定点, 稳定性.

学科分类号: TP393, O211.61, O226.

§1. 引 言

资源管理与任务调度已经成为当今计算机网络的重要研究方向, 特别是目前的云计算与云制造又极大地推动了计算机网络资源管理的系统性研究. 在过去的十多年中, 随机负载平衡策略一直是计算机网络资源管理的主流研究方向, 它是一种在计算机网络中操作简单、方便使用的集中化分配资源方法. 近年来的研究成果表明: 一个简单的随机负载平衡策略在一些大型网络的资源管理中可以取得系统性能方面的有效改进, 例如减少冲突, 降低逗留时间, 提高处理能力等等. 目前, 在计算机网络领域中随机负载平衡策略已经被广泛地应用于数据中心、呼叫中心、分布式内存机、网络的任务分配与路径选择等重要的实际系统中. 在另一个方面, 这种随机负载平衡策略也可以在医院挂号、高速路收费、海关通道等实际问题中比较容易地找到它的应用环境.

马氏过程与排队论已经被应用于研究随机负载平衡策略, 这就形成了超市模型的一个重要研究方向. 就像本文中的图1和图2所示, 超市模型一般地都采用实时动态控制机制, 这就使得众多的服务台相互关联、相互依赖; 而这种相依性使得超市模型中的大型排队网络变得异常复杂. 于是, 经典的排队论与马氏过程不能直接应用到对超市模型的研究中. 到目前为止, 超市模型分析仍然是一个崭新的研究方向, 有着许多重要的实际问题需要解决.

*国家自然科学基金(71271187)资助.

本文2013年5月14日收到, 2013年9月2日收到修改稿.

doi: 10.3969/j.issn.1001-4268.2014.02.002

近年来,国内外一些学者已经使用排队论与马氏过程来研究超市模型. 对于简单的超市模型(即顾客到达是泊松过程, 服务时间服从指数分布), Vvedenskaya等(1996)利用无穷维马尔可夫过程序列的算子半群给出了平均场极限(Mean-field limit), 这就表明当服务台的个数趋于无穷大时, 超市模型中的各个排队过程具有渐进独立性; 利用这种平均场极限, 他们研究了系统的平稳分布并得到了一个重要结论: 每个服务台上的稳态队长呈现出双重指数衰变的尾分布. 这也说明了超市模型对整体排队系统的性能结构有着实质性的改善. Mitzenmacher (1996)利用密度相依的跳跃马尔可夫过程分析了这个超市模型并且获得了相同的结论; Turner (1998)对这个超市模型提出了鞅的分析方法, 并且给出了比较详细的计算机模拟结果. Graham (2000a, 2000b, 2005)研究了超市模型样本空间的极限演化过程: 无论最初开始于哪一个初始状态, 当服务台数趋于无穷大时, 这个超市模型的众多排队过程是渐进独立的. Luczak和Norris (2005)给出了这个超市模型的强逼近结果. 随后, Luczak和McDiarmid (2006, 2007)证明了在这个超市模型中最队长长的估计阶为 $(\log \log N) / \log d + O(1)$. Bramson等(2010, 2012)将超市模型中的服务时间推广到一般分布, 讨论了各个服务台之间的渐进独立性, 并分析了每个服务台稳态队长的尾部分布. Li等(2011, 2010)推广了超市模型的服务时间到PH分布和顾客输入为马氏到达过程. Vvedenskaya和Suhov (1997), Mitzenmacher等(2001)及Li和Dai (2013)提供了研究超市模型的三个综述报告.

本文的目的是来介绍近年来国内外学者在超市模型研究领域已经获得一些重要的模型类别和研究成果, 详细地讨论了超市模型中的三个重要问题: (1)实时动态控制模式, 包括输入控制、服务控制、双重控制(即, 输入与服务的混合控制); 特别是在服务控制中我们提出了一个国际上的公开难题: 平均场黑洞. (2)固定点计算, 在上述三种控制模式下分别给出了固定点的计算方法, 通过数值算例分析了这些控制模式的优劣. (3)马氏变动环境下的超市模型, 这是一个比较一般的网络资源管理模型; 我们提供了求解固定点的无穷维非线性方程组, 利用RG-分解方法给出了固定点的计算方法; 利用固定点的数值解对马氏变动环境下的超市模型进行了性能评价.

本文的其后组织如下: 第2节研究了超市模型中两种动态控制机制: 输入控制, 分配到达顾客进入超市模型中的最短队列; 服务控制, 组织服务台去服务超市模型中的最长队列. 我们对这两种动态控制机制进行了比较并且发现: 服务控制比输入控制对改善超市模型的性能更加有效. 第3节扩展输入控制、服务控制到一般机制 $d(n)$, 其中控制机制 $d(n)$ 表示到达顾客进入 d 个所选队列中的第 n 个最短队长的队列; 或者表示服务台进入 d 个所选队列中的第 n 个最长队长的队列. 针对于输入控制、服务控制、双重控制的控制机制 $d(n)$, 我们分别提供了求解固定点的无穷维非线性方程组, 给出了固定点的计算方法并通过数值算例进行了分析. 第4节研究了一个比较一般的马氏变动环境下的超市模型, 提供了求解固定点的无穷维非线性方程组, 利用RG-分解方法给出了固定点的计算方法, 通过数值算例对系统的性能进行了分析. 第5节对全文进行了总结, 并对未来的研究给出了分析与展望.

§2. 超市模型中两种动态控制机制及其比较

本节研究了超市模型中两种动态控制机制: 分配到达顾客, 顾客进入超市模型中的最短队列; 组织服务能力, 服务台服务超市模型中的最长队列.

2.1 到达顾客进入最短队列

Vvedenskaya等(1996)和Mitzenmacher (1996)研究了一个简单的超市模型: 一个并行排队系统由 N 个独立的服务台组成, 每个服务台都有无穷大的等待空间; 每个服务台的服务时间是独立同分布的, 并且服务时间服从服务率为 μ 的指数分布; 顾客到达是一个到达率为 $N\lambda$ 的泊松过程. 一旦到达, 顾客就从这 N 个服务台中随机独立地选择 $d \geq 1$ 个服务台, 并且加入到这 d 个服务台中队长最短的服务台或其等待队列里. 如果这 d 个服务台中有两个以上的队长都是最短的, 则顾客将随机地加入到任意一个最短队列中. 每个服务台对顾客的服务都遵循先到先服务规则, 并且到达和服务过程都是相互独立的. 图1给出了这个超市模型的物理解释.

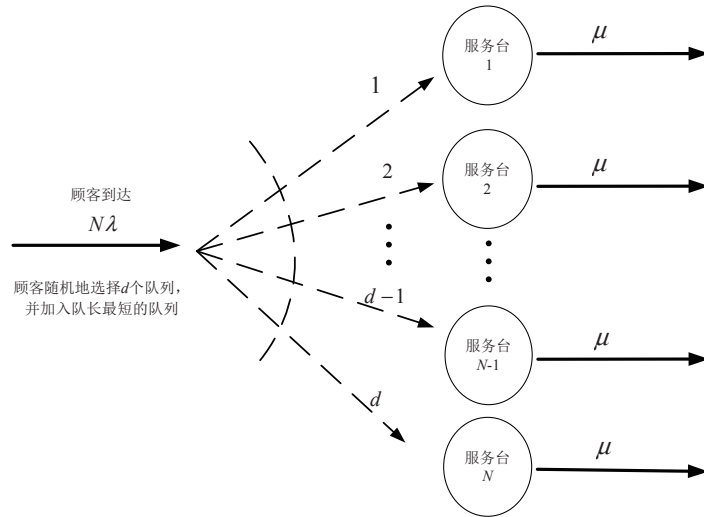


图1 到达顾客加入到队长为最短的超市模型

为了研究这个复杂的排队网络, 我们定义 $n_k(t)$ 表示在时刻 t 队列中至少有 k 个顾客(正在接受服务的那个顾客也计算在内)的服务台个数. 显然, $0 \leq n_k(t) \leq N$, $k \geq 0$. 令

$$U_k^{(N)}(t) = \frac{n_k(t)}{N}, \quad k \geq 0,$$

则 $U_k^{(N)}(t)$ 表示在时刻 t 队列中至少有 k 个顾客的服务台在 N 个服务台中所占的个数比例, 显然这是一个随机变量. 令

$$u_k^{(N)}(t) = \mathbb{E}[U_k^{(N)}(t)], \quad k \geq 0,$$

则Vvedenskaya等(1996)和Mitzenmacher (1996)通过概率分析表明 $\{u_k^{(N)}(t)\}$ 满足如下的微分差分方程组:

$$\begin{cases} u_0^{(N)}(t) = 1, \\ \frac{d}{dt}u_k^{(N)}(t) = \lambda\{[u_{k-1}^{(N)}(t)]^d - [u_k^{(N)}(t)]^d\} - \mu[u_k^{(N)}(t) - u_{k+1}^{(N)}(t)], \quad k \geq 1. \end{cases}$$

令 $u_k(t) = \lim_{N \rightarrow \infty} u_k^{(N)}(t)$, 则Vvedenskaya等(1996)和Mitzenmacher (1996)通过算子半群和平均场极限得到

$$\begin{cases} u_0(t) = 1, \\ \frac{d}{dt}u_k(t) = \lambda[u_{k-1}^d(t) - u_k^d(t)] - \mu[u_k(t) - u_{k+1}(t)], \quad k \geq 1. \end{cases} \quad (2.1)$$

如果存在极限 $\pi_k = \lim_{t \rightarrow +\infty} u_k(t)$, $k \geq 1$, 即 $\pi = \lim_{t \rightarrow +\infty} u(t)$, 则 π 就为 $u(t)$ 的一个固定点, 其中 $\pi = (\pi_0, \pi_1, \dots)$ 和 $u(t) = (u_0(t), u_1(t), \dots)$.

Vvedenskaya等(1996)和Mitzenmacher (1996)利用无穷维马尔可夫过程算子半群与平均场极限相结合的分析方法得到了超市模型的固定点满足如下非线性方程组:

定理 2.1 到达顾客加入到最短队列的超市模型的固定点满足如下非线性方程组

$$\begin{cases} \pi_0 = 1, \\ \lambda(\pi_{k-1}^d - \pi_k^d) = \mu(\pi_k - \pi_{k+1}), \quad k \geq 1. \end{cases} \quad (2.2)$$

这就得到

$$\pi_k = \rho^{1+d+d^2+\dots+d^{k-1}} = \rho^{(d^k-1)/(d-1)}, \quad k \geq 1, \quad (2.3)$$

其中 $\rho = \lambda/\mu$.

在下面的定义中, 我们提供了尾部分布的三个重要类别.

定义 2.1 (1) 如果当 $k \geq 1$ 时, $\pi_k = \rho^k$, 则 $\{\pi_k\}$ 被称为是指数尾的.

(2) 如果当 $k \geq 1$ 时, $\pi_k = \rho^{(d^k-1)/(d-1)}$, 则 $\{\pi_k\}$ 被称为是双重指数尾的.

(3) 如果 $\lim_{k \rightarrow \infty} \pi_k / \rho^{(d^k-1)/(d-1)} = c \in [0, +\infty)$, 则 $\{\pi_k\}$ 被称为是超指数尾的.

如果 $d = 1$, 则这个超市模型是 N 个独立的 $M/M/1$ 排队系统的一个集合. 由(2.3)我们看出: 对于所有的 $k \geq 1$, $\pi_k = \rho^k$, 这是 $M/M/1$ 排队系统平稳队长的尾部分布. Vvedenskaya等(1996)和Mitzenmacher (1996)得到了一个重要的结论: 简单超市模型的稳态队长是双重指数尾的, 这是对 $M/M/1$ 排队系统性能的一个实质性改善.

2.2 服务台服务最长队列

我们研究对服务能力控制的一种新型超市模型. 在这个超市模型中有 N 个独立和容量无穷的等待场所. 在每个等待场所中顾客到达是到达率为 λ 的泊松过程; 在这个超市模型中

仅有一个服务台, 其服务时间服从服务率为 $N\mu$ 的指数分布. 当服务台对一个顾客完成服务后, 它首先从这 N 个等待队列中随机独立地选择 $d \geq 1$ 个队列, 然后进入这 d 个队列中队长最长的一个队列进行服务. 如果所选择的队列里有两个以上的队列都是最长的, 那么服务台就会在这些最长的队列中随机的选择一个队列进行服务. 服务台对所有顾客的服务都遵循先到先服务原则. 在这个模型中, 每个队列的到达过程和服务过程都是相互独立的. 图2描述了这种控制服务过程的超市模型.

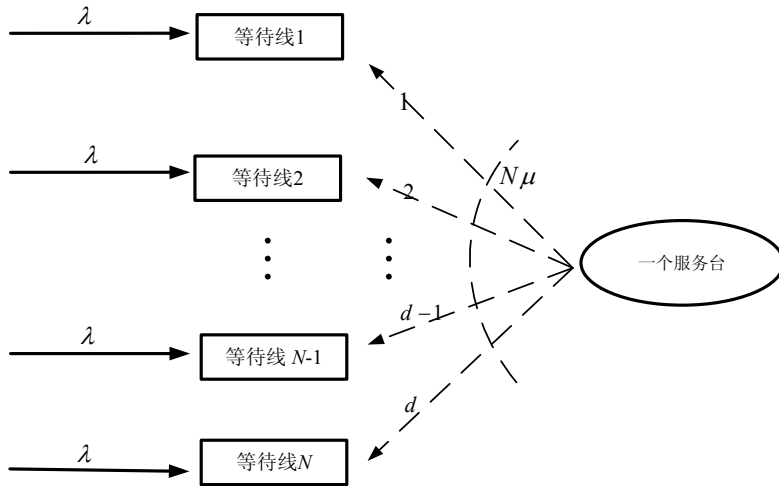


图2 服务台服务最长队列的超市模型

为了研究这个新型的超市模型, 我们定义 $n_k(t)$ 表示在时刻 t 队列中至少有 k 个顾客(正在接受服务的那个顾客也计算在内)的队列个数, $U_k^{(N)}(t) = n_k(t)/N$ 表示在时刻 t 队列中至少有 k 个顾客的队列在 N 个队列中所占的个数比例, 类似于2.1节的数学分析, 令

$$\pi_k = \lim_{t \rightarrow +\infty} \lim_{N \rightarrow \infty} \mathbf{E}[U_k^{(N)}(t)],$$

那么利用无穷维马尔可夫过程序列的算子半群与平均场极限相结合的分析方法, 我们可以得到关于这个新型超市模型固定点所满足的非线性方程组.

定理 2.2 服务台服务队长最长的超市模型的固定点满足如下非线性方程组

$$\begin{cases} \pi_0 = 1, \\ \lambda(\pi_{k-1} - \pi_k) = \mu[(1 - \pi_{k+1})^d - (1 - \pi_k)^d], \quad k \geq 1. \end{cases} \quad (2.4)$$

我们可以得到

$$\pi_1 = 1 - \sqrt[d]{1 - \rho}, \quad (2.5)$$

当 $k \geq 1$ 时,

$$\pi_{k+1} = 1 - \sqrt[d]{1 - \rho\pi_k}. \quad (2.6)$$

2.3 上述两种动态控制机制的性能比较

我们对上面介绍的两种动态控制机制进行性能比较. 为了实现这个目的, 我们将用一些数值算例分析在任何一个服务台上排队系统的平均平稳队长.

令 Q 为在这个超市模型中任何一个服务台的平稳队长, 则

$$E[Q] = \sum_{k=1}^{\infty} P\{Q \geq k\} = \sum_{k=1}^{\infty} \pi_k. \quad (2.7)$$

由(2.7)式, 我们给出一些数值算例, 并分析在上述两个超市模型中一些重要的参数 d, λ 是如何影响性能指标 $E[Q]$ 的.

令顾客到达率 λ 为(0.05, 0.95)之间的一个数和服务台的服务率 $\mu = 1$. 我们选择数 d 为1到10之间的一个数. 图3给出了这两个超市模型在相同条件下的不同 $E[Q]$.

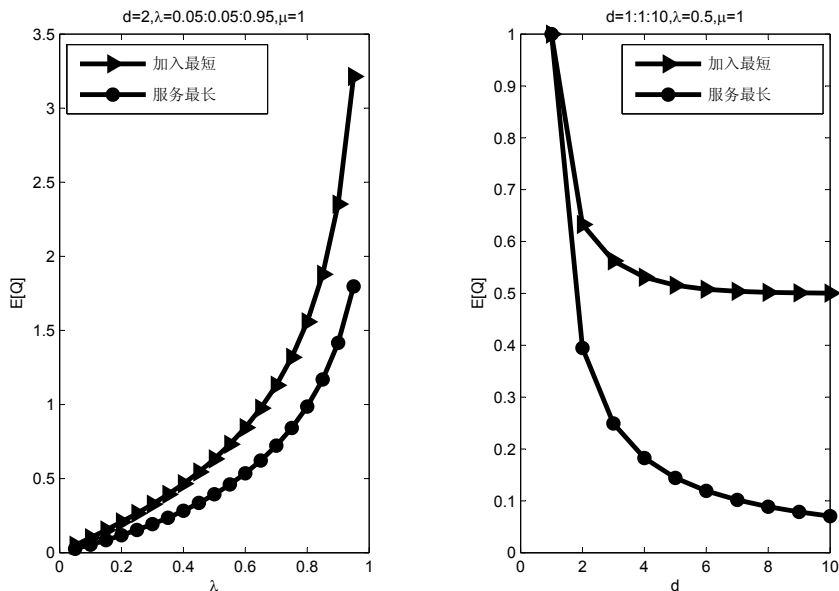


图3 两个超市模型 $E[Q]$ 的对比分析

从图3, 我们可以看到: $E[Q]$ 随着 λ 的增加而增加; 而随着 d 的增加而减少. 同时, 我们可以看到: 对于超市模型的性能改善, 控制服务过程比控制顾客到达过程更加有效.

2.4 一个公开难题: 平均场黑洞

在2.1和2.2两个子节中, 我们分别地研究了超市模型中两种不同的动态控制机制: 顾客进入超市模型中的最短队列; 服务台服务超市模型中的最长队列. 在2.3子节中, 我们表明: 对于超市模型的性能改善, 控制服务过程比控制顾客到达过程更加有效. 在本子节中, 我们将讨论在超市模型中一个非常重要的问题: 平均场黑洞. 我们近年来对超市模型展开深入研究(见Li和Dai, 2013)表明: 平均场黑洞在服务能力控制方面是超市模型的一个普遍现象.

但是, 我们认为: 平均场黑洞是目前国际上一个公开未能解决的难题, 希望能够引起复杂网络、系统对称性、物理学和动力系统等研究领域的重视.

在2.1子节中, 我们得到了 $\pi_1 = \rho$. 于是, 在这个超市模型中每个服务台的输入率为 λ , 而输出率也为 λ , 即 $\mu\pi_1 = \lambda$. 因此, 在每个服务台上的输入与输出过程实现了稳态流平衡.

在2.2子节中, 我们得到了 $\pi_1 = 1 - \sqrt[d]{1-\rho}$. 于是, 在这个超市模型中每个服务台的输入率为 λ , 而输出率也为

$$\mu\pi_1 = \mu(1 - \sqrt[d]{1-\rho}) < \lambda, \quad d \geq 2,$$

由上式看出, 在每个服务台上的输入与输出过程不满足稳态流平衡. 即, 输出过程在极限平均场下损失了如下多的顾客到达率

$$\begin{aligned} F(d) &= \lambda - \mu\pi_1 = \lambda - \mu(1 - \sqrt[d]{1-\rho}) \\ &= \mu\sqrt[d]{1-\rho} + (\lambda - \mu). \end{aligned}$$

显然, $F(d)$ 是 d 的单调递增函数.

公开难题 因为超市模型是在平稳状态下, 所以每个服务台也是在平稳状态下. 在极限平均场中, 每个服务台的输入与输出过程可能不满足稳态流平衡的条件. 我们需要解决如下两个关键性问题: 到达速率为 $F(d)$ 的那些到达顾客释放或漂移到极限平均场中的什么位置? 如何解释 d 越大就导致平均场黑洞的损失因子 $F(d)$ 越大.

§3. 到达过程的一般动态控制机制分析

本节系统地推广了在第2节中对到达过程的控制机制, 并建立了对到达过程的一般动态控制机制: 一旦顾客到达, 他就会进入到 d 个被选排队中的第 n 个队长最短的队列.

3.1 一般动态控制机制

在第2节中, 我们考虑了动态控制顾客达到的特殊分配机制, 即当顾客到达时, 这个顾客从 N 个服务台中随机独立地选择 $d \geq 1$ 个服务台, 并且加入到这 d 个服务台中队长最短的一个服务台里. 在这节中, 我们将推广并分析一种更为一般的顾客达到的分配机制.

Vvedenskaya和Suhov (1997)描述了一种比较一般的超市模型, 记为 $SM(d, n)$: 由 N 个独立的服务台组成, 每个服务台都有无穷大的等待空间; 每个服务台的服务时间是独立同分布的, 并且服务时间服从服务率为 μ 的指数分布; 顾客到达是一个到达率为 $N\lambda$ 的泊松过程. 每个顾客到达后从这 N 个服务台中随机独立地选择 $d \geq 1$ 个服务台, 并且加入到这些所选的队伍中队长为第 n 个最短的服务台里. 如果这 d 个服务台中有两个以上的第 n 个最短的,

则顾客将随机地加入到其中的任意一个队列中. 每个服务台对顾客的服务都遵循先到先服务规则, 并且到达和服务过程都是相互独立的.

对于超市模型 $SM(d, n)$, 令

$$h_{d,n}(x) = \sum_{k=0}^{n-1} C_d^k (1-x)^k x^{d-k}, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 1 \leq n \leq d, \quad (3.1)$$

其中 C_d^k 是二项系数. 当 $n = 1$ 时, 我们有 $h_{d,1}(x) = x^d$, 这就是加入最短队列的情况, 见第2.1节; 当 $n = d$ 时, 我们有 $h_{d,d}(x) = 1 - (1-x)^d$, 这就是加入到最长队列的情况.

下面定理给出了超市模型 $SM(d, n)$ 的稳定条件. 由这个稳定性条件我们可以直观地观察到: 当 $1 \leq n \leq d \leq N-1$ 时, 由超市模型的对称性可知, 顾客能够等概率地分布在各个队列上. 当 $n = d = N$ 时, 所有到达的顾客都集中在唯一最长的队列上.

定理 3.1 对于超市模型 $SM(d, n)$, 我们有

(1) 如果 $1 \leq n \leq d \leq N-1$, 则超市模型 $SM(d, n)$ 处于平稳状态的一个充分条件是 $\rho = \lambda/\mu < 1$.

(2) 如果 $n = d = N$, 则超市模型 $SM(d, n)$ 处于平稳状态的一个充分条件是 $\rho = \lambda/N\mu < 1$.

由定理3.1, 我们给出了超市模型 $SM(d, n)$ 稳定性的一个充分条件. 无论怎样, 我们还没有得到这个稳定性的充分必要条件.

3.2 固定点的计算

令 $n_k(t)$ 表示在时刻 t 队列中至少有 k 个顾客(正在接受服务的那个顾客也计算在内)的服务台数, $U_k^{(N)}(t) = n_k(t)/N$ 表示在时刻 t 队列中至少有 k 个顾客的服务台在 N 个服务台中所占的个数比例. 类似于2.1节的数学分析, 令

$$\pi_k = \lim_{t \rightarrow +\infty} \lim_{N \rightarrow \infty} E[U_k^{(N)}(t)].$$

如果超市模型 $SM(d, n)$ 是稳定的, 则它的固定点解 $\{\pi_k, k \geq 0\}$ 满足一个非线性方程组

$$\begin{cases} \pi_0 = 1, \\ \lambda[h_{d,n}(\pi_{k-1}) - h_{d,n}(\pi_k)] = \mu(\pi_k - \pi_{k+1}), \quad k \geq 1. \end{cases} \quad (3.2)$$

将(3.2)累加, 我们可得到

$$\lambda \sum_{k=1}^{\infty} [h_{d,n}(\pi_{k-1}) - h_{d,n}(\pi_k)] = \mu \sum_{k=1}^{\infty} (\pi_k - \pi_{k+1}). \quad (3.3)$$

因此, $\lambda h_{d,n}(\pi_0) = \mu \pi_1$. 因为 $h_{d,n}(\pi_0) = 1$, 所以我们可以得到下面的定理.

定理 3.2 超市模型SM(d, n)的固定解为

$$\pi_1 = \rho, \quad (3.4)$$

由 $\pi_0 = 1$ 和 $\pi_1 = \rho$, 我们可以得到对于所有的 $k \geq 1$,

$$\pi_{k+1} = \pi_k - \rho[h_{d,n}(\pi_{k-1}) - h_{d,n}(\pi_k)]. \quad (3.5)$$

例 1 在超市模型SM(d, d), 即到达顾客加入 d 个队列中队长最长的那个队列. 在这种情况下, 我们有

$$\begin{cases} \pi_0 = 1, \\ \pi_1 = \rho, \\ \pi_{k+1} = \pi_k - \rho[(1 - \pi_k)^d - (1 - \pi_{k-1})^d], \quad k \geq 1. \end{cases} \quad (3.6)$$

例 2 在超市模型SM($1, 1$), 即到达顾客随机地加入任意一个队列. 在这种情况下, 我们有

$$\begin{cases} \pi_0 = 1, \\ \pi_1 = \rho, \\ \pi_{k+1} = \pi_k - \rho(\pi_{k-1} - \pi_k), \quad k \geq 1. \end{cases} \quad (3.7)$$

我们可以得到

$$\pi_k = \rho^k, \quad k \geq 0.$$

3.3 数值算例分析

现在, 我们分析超市模型SM(d, n), 加入最短队列 $n = 1$ 、加入随机队列 $n = d = 1$, 和加入最长队列 $n = d$, 并对这三种情况进行系统性能的数值对比.

我们考虑两个性能指标: 一个是每个服务台的平均稳态队长; 另一个是任意到达顾客在系统中的期望逗留时间. 当 $\rho < 1$ 时, 令 Q 为任意一个服务台的稳态队长, 则

$$E[Q] = \sum_{k=1}^{\infty} P\{Q \geq k\} = \sum_{k=1}^{\infty} \pi_k. \quad (3.8)$$

令 S 表示任何一个到达的顾客在系统中的稳态逗留时间, 则

$$E[S] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k+1}{\mu} [h_{d,n}(\pi_k) - h_{d,n}(\pi_{k+1})]. \quad (3.9)$$

在图4和图5中, 我们取 $\lambda \in (0.05, 0.95)$ 和 $\mu = 1$. 当 $d = 2, 5$ 时, 在到达顾客的三种动态分配机制下, 我们数值地分析 $E[Q]$ 和 $E[S]$ 是如何随着 λ 来变化的.

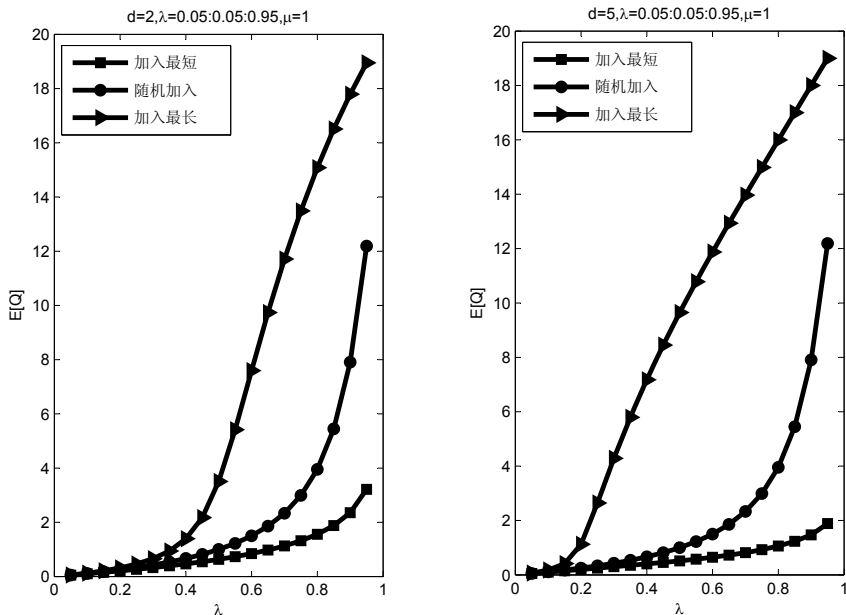


图4 当 $d = 2, 5$ 时, 在到达顾客的三种动态分配机制下 $E[Q]$ 的数值对比

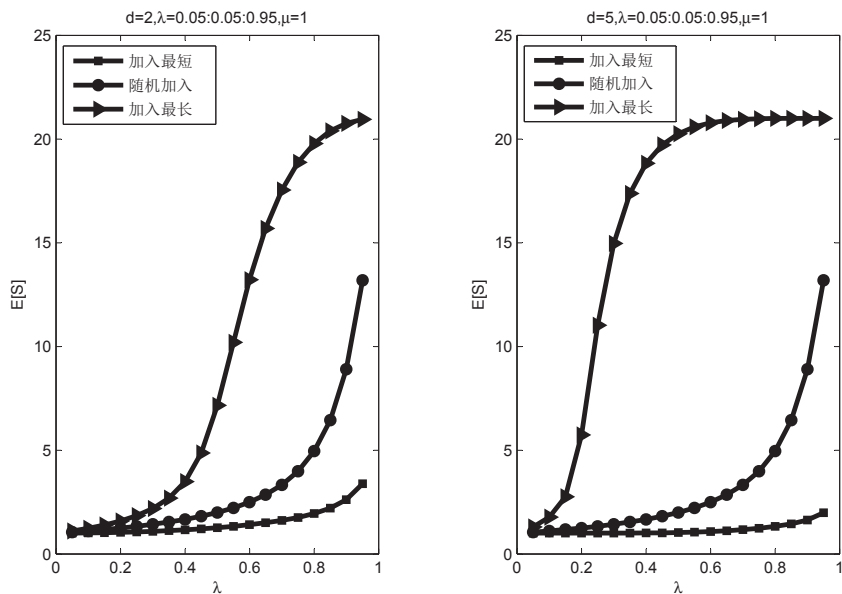


图5 当 $d = 2, 5$ 时, 在到达顾客的三种动态分配机制下 $E[S]$ 的数值对比

图4给出了超市模型的 $E[Q]$ 针对到达顾客的三种动态分配机制的数值对比. 我们可以看出: $E[Q]$ 随着 λ 的增加而增加; 而随着 d 的增加而减少. 同时, 我们还可以看出: 顾客加入最短队列时超市模型的平均稳态队长为最小; 顾客随机加入队列的平均稳态队长次之; 顾客加入最长队列系统的平均稳态队长为最长.

图5给出了超市模型的 $E[S]$ 针对到达顾客的三种动态分配机制的数值对比. 我们可以

看出: $E[S]$ 随着 λ 的增加而增加; 而随着 d 的增加而减少. 同时, 我们还可以看出: 顾客加入最短队列时超市模型的平均稳态逗留时间为最小; 顾客随机加入队列的平均稳态逗留时间次之; 顾客加入最长队列系统的平均稳态逗留时间为最长. 我们也可以看出: 选择 d 越大时, 顾客加入最短和加入最长的两种情况的 $E[S]$ 差距就越大.

3.4 双重动态控制的超市模型

现在, 我们考虑一个更加一般的超市模型, 它不仅对到达顾客进行动态控制(d, n), 而且还对服务过程实施动态控制(f, m), 其中(f, m)表示在这个超市模型中仅有一个服务台, 其服务时间服从服务率为 $N\mu$ 的指数分布. 当服务台对一个顾客完成服务后, 它首先从这 N 等待队列中随机独立地选择 $f \geq 1$ 个队列, 然后进入这 f 个队列中第 m 个队长最长的一个队列进行服务. 如果所选择的队列里有两个以上的队列都是第 m 个最长的, 那么服务台就会在这些队列中随机的选择一个队列进行服务. 服务台对所有顾客的服务都遵循先到先服务原则. 在这个模型中, 每个队列的到达过程和服务过程都是相互独立的. 对于这个一般的超市模型图6给出了描述.

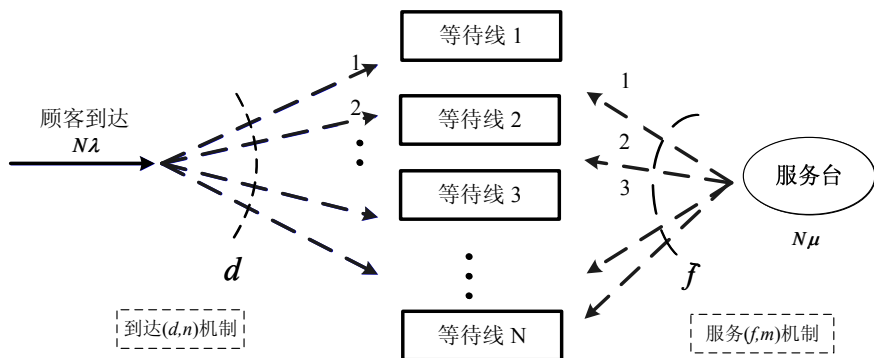


图6 双重动态控制 $SM(d, n; f, m)$ 的超市模型

令

$$h_{d,n}(x) = \sum_{k=0}^{n-1} C_d^k (1-x)^k x^{d-k}, \quad 0 \leq x \leq 1, 1 \leq n \leq d$$

和

$$g_{f,m}(y) = \sum_{k=m}^f C_f^k y^k (1-y)^{f-k}, \quad 0 \leq y \leq 1, 1 \leq m \leq f.$$

令 $n_k(t)$ 表示在时刻 t 队列中至少有 k 个顾客(正在接受服务的那个顾客也计算在内)的服务台数, $U_k^{(N)}(t) = n_k(t)/N$ 表示在时刻 t 队列中至少有 k 个顾客的服务台在 N 个服务台中所占的个数比例. 类似于 2.1 节的数学分析, 令

$$\pi_k = \lim_{t \rightarrow +\infty} \lim_{N \rightarrow \infty} E[U_k^{(N)}(t)].$$

如果超市模型 $SM(d, n; f, m)$ 是稳定的, 则它的固定点解 $\pi_k, k \geq 0$ 满足一个非线性方程组

$$\begin{cases} \pi_0 = 1, \\ \lambda[h_{d,n}(\pi_{k-1}) - h_{d,n}(\pi_k)] = \mu[g_{f,m}(\pi_k) - g_{f,m}(\pi_{k+1})], \quad k \geq 1. \end{cases}$$

于是, 我们可以求解这个非线性方程组, 由此得到超市模型 $SM(d, n; f, m)$ 的固定点解, 并可以对这个系统进行性能评价.

§4. 马氏变动环境下的超市模型

在上述两节中我们给出了当输入为泊松过程和服务时间为指数分布的各类超市模型, 并且讨论了它们的主要结果. 在本节中, 我们对超市模型给出一个重要的推广: 输入过程和服务过程受控制于一个马氏变动环境. 值得注意: 这类马氏变动环境下的超市模型具有十分重要的实际工程价值. 对于这个马氏变动环境下的超市模型, 我们给出了固定点的计算方法, 并通过一些数值算例对这个超市模型进行了系统的性能评价.

4.1 超市模型描述

这个超市模型有 N 个独立相同的服务台. 这些服务台都工作在同一个随机变动环境中, 而且这个环境的状态变化可以影响顾客的到达率和服务台的服务率. 我们设这个随机变动环境是一个不可约、正常返的马氏过程 $\{J(t), t \geq 0\}$, 其状态空间为

$$\Omega \in \{1, 2, \dots, m, m+1, \dots, m+n\}.$$

这个随机变动环境 $\{J(t), t \geq 0\}$ 的状态可以相互转换, 其状态转移率为 $c_{i,j}, 1 \leq i, j \leq m+n$. 在随机变动环境的每个状态上, 顾客到达是一个泊松过程, 每个服务台的服务时间服从指数分布, 其中到达率、服务率都与随机变动环境的状态 $J(t)$ 有关. 如果随机变动环境的状态 $J(t) = i \in \Omega$, 那么顾客的到达率就为 $N\lambda_i$. 当随机变动环境的状态 $J(t) = i \in \{1, 2, \dots, m\}$ 时, 服务台的服务率为 μ_i ; 当随机变动环境的状态 $J(t) = i \in \{m+1, \dots, m+n\}$ 时, 服务率为零, 此时的服务台不能服务. 每个顾客到达以后将从 N 个服务台中随机独立地选择 $d \geq 1$ 个服务台, 并且加入到这 d 个服务台中队长最短的一个. 如果在选择的 d 个服务台中有两个以上队列的队长都是最短的, 则顾客将随机的加入到任意一个队长最短的服务台中. 任何服务台对顾客进行的服务都遵循先到先服务规则, 并且到达和服务过程都是相互独立的. 图7给出了这个随机变动环境下的超市模型的系统状态转移关系.

4.2 微分方程组的推导

对于 $k \geq 0$, 我们定义 $n_{k,i}(t)$ 为在时刻 $t \geq 0$ 时在随机环境 $J(t) = i$ 下队列中至少有 k 个顾客(正在接受服务的那个顾客也计算在内)的服务台数. 显然, $0 \leq n_{k,i}^{(N)}(t) \leq N, 1 \leq i$

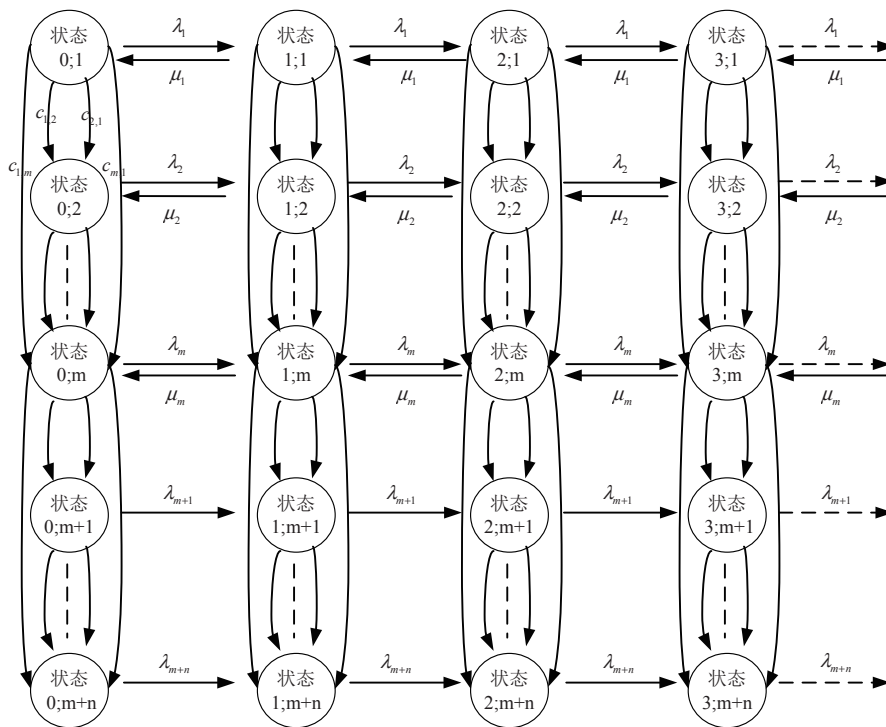


图7 系统状态转移图示

$\leq m+n, k \geq 0$. 令

$$U_{k;i}^{(N)}(t) = \frac{n_{k;i}(t)}{N}, \quad k \geq 0.$$

则 $U_{k;i}^{(N)}(t)$ 表示在时刻 t 、随机环境 $J(t) = i$ 下队列中至少有 k 个顾客的服务台在 N 个服务台中所占的个数比例.

我们令 $u_{k;i}^{(N)}(t) = E[U_{k;i}^{(N)}(t)]$, $k \geq 0$; $u_k^{(N)}(t) = (u_{k;1}^{(N)}(t), u_{k;2}^{(N)}(t), \dots, u_{k;m+n}^{(N)}(t))$ 和 $\mathbf{u}^{(N)}(t) = (u_0^{(N)}(t), u_1^{(N)}(t), u_2^{(N)}(t), \dots)$.

下面, 我们可以利用概率分析方法来建立向量 $\mathbf{u}^{(N)}(t)$ 所满足的无穷维微分向量方程组.

我们定义

$$C = \begin{pmatrix} -\lambda_1 - \sum_{i \neq 1}^{m+n} c_{1,i} & c_{1,2} & \dots & c_{1,m+n} \\ c_{21} & -\lambda_2 - \sum_{i \neq 2}^{m+n} c_{2,i} & \dots & c_{2,m+n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m+n,1} & c_{m+n,2} & \dots & -\lambda_{m+n} - \sum_{i \neq m+n}^{m+n} c_{m+n,i} \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_{m+n} \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} \mu_1 & & & & \\ & \mu_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \mu_m & \\ & & & & 0 \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 0 \end{pmatrix}.$$

我们可以得到 $\mathbf{u}^{(N)}(t)$ 所满足的微分方程组为

$$\frac{du_0^{(N)}(t)}{dt} = u_0^{(N)}(t)(C + D), \quad (4.1)$$

并且当 $k \geq 1$ 时, 有

$$\begin{aligned} \frac{du_k^{(N)}(t)}{dt} = & [u_{k-1}^{(N)}(t) - u_k^{(N)}(t)] DL_k(u_{k-1}^{(N)}(t), u_k^{(N)}(t)) \\ & + u_k^{(N)}(t)(C + D) - [u_k^{(N)}(t) - u_{k+1}^{(N)}(t)] A. \end{aligned} \quad (4.2)$$

4.3 固定点的计算方法

如果存在极限 $\pi_k = \lim_{t \rightarrow +\infty} \lim_{N \rightarrow \infty} u_k^{(N)}(t)$, $k \geq 1$, 即 $\pi = \lim_{t \rightarrow +\infty} \lim_{N \rightarrow \infty} u^{(N)}(t)$, 则

$$\pi_k = (\pi_{k,1}, \pi_{k,2}, \dots, \pi_{k,m}, \pi_{k,m+1}, \dots, \pi_{k,m+n}).$$

令

$$\begin{aligned} L_k(\pi_{k-1}, \pi_k) &= \sum_{r=1}^d C_d^r \left[\sum_{j=1}^{m+n} (\pi_{k-1;j} - \pi_{k;j}) \right]^{r-1} \left(\sum_{j=1}^{m+n} \pi_{k;j} \right)^{d-r} \\ &= \frac{1}{\sum_{j=1}^{m+n} (\pi_{k-1;j} - \pi_{k;j})} \left[\left(\sum_{j=1}^{m+n} \pi_{k-1;j} \right)^d - \left(\sum_{j=1}^{m+n} \pi_{k;j} \right)^d \right]. \end{aligned}$$

对于这个马氏变动环境下的超市模型, 它的固定点满足无穷维非线性的向量方程组

$$\pi_0(C + D) = 0, \quad (4.3)$$

当 $k \geq 1$ 时,

$$(\pi_{k-1} - \pi_k) L_k(\pi_{k-1}, \pi_k) D + \pi_k [C + D] - [\pi_k - \pi_{k+1}] A = 0. \quad (4.4)$$

为了求解这个固定点所满足的非线性向量方程组, 我们需要利用QBD过程的RG-分解. 为了读者方便, 我们在附录中给出了RG-分解的一些基本结果, 更详细的研究内容请参见专著Li (2010)及Li和Cao (2004).

定理 4.1 当这个马氏变动环境下的超市模型处于平稳状态时, 它的固定点的修正向量 $(\pi_0 e, \pi_1 e, \pi_2 e, \dots)$ 有双重指数结构 $\pi_k e = \rho^{(d^k-1)/(d-1)}, k \geq 0$. 特别地, $\pi_0 = \omega$, 其中 ω 为马氏链 $C + D$ 的平稳概率向量.

证明: 对 (4.4) 式左右两边同时乘以 $m + n$ 维分量全为 1 的列向量, 注意到 $[C + \text{diag}(De)]e = 0$, 我们化简(4.4)可得

$$(\pi_{k-1}De - \pi_k De)L_k(\pi_{k-1} - \pi_k) - (\pi_k - \pi_{k+1})Ae = 0, \quad k \geq 1.$$

令 $\pi_k = \eta_k \omega$, 则系数 L_k 可以化简为 $(\eta_{k-1}^d - \eta_k^d)/(\eta_{k-1} - \eta_k)$, 再结合 $\lambda = \omega De$, $\mu = \omega Ae$, $\rho = \lambda/\mu$, 我们可得

$$\rho(\eta_{k-1}^d - \eta_k^d) - (\eta_k - \eta_{k+1}) = 0.$$

于是, 我们有

$$\eta_k = \rho^{(d^k-1)/(d-1)}, \quad k \geq 1. \quad \square$$

由定理 4.1, 我们可得

$$L_k(\pi_{k-1}, \pi_k) = \frac{(\pi_{k-1}e)^d - (\pi_k e)^d}{\pi_{k-1}e - \pi_k e} = \frac{\eta_{k-1}^d - \eta_k^d}{\eta_{k-1} - \eta_k} \stackrel{\text{def}}{=} \zeta_k.$$

令

$$B_k = C + D(1 - \zeta_k) - A$$

和

$$Q = \begin{pmatrix} B_1 & \zeta_2 D & & & \\ A & B_2 & \zeta_3 D & & \\ & A & B_3 & \zeta_4 D & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}.$$

显然, Q 是一个不可约水平相依的 QBD 过程的无穷小生成元. 由于 $B_1 + \zeta_1 D = C + D - \mu I$, 所以这个矩阵 Q 是正常返的.

利用 Li (2010) 及 Li 和 Cao (2004) 的关于 QBD 过程 RG-分解的结果, 我们来计算矩阵 Q 的最大非正逆矩阵.

设矩阵序列 $\{R_k, k \geq 1\}$ 是下列非线性矩阵方程组的最小非负解

$$\zeta_{k+1} D + R_k B_{k+1} + R_k R_{k+1} A = 0,$$

设矩阵序列 $\{G_k, k \geq 2\}$ 是下列非线性矩阵方程组的最小非负解

$$A + B_k G_k + \zeta_{k+1} D G_{k+1} G_k = 0,$$

设矩阵 $\{U_k, k \geq 0\}$ 为

$$\begin{aligned} U_k &= B_{k+1} + \zeta_{k+2}D(-U_{k+1})^{-1}A \\ &= B_{k+1} + R_{k+1}A = B_{k+1} + \zeta_{k+2}DG_{k+1}. \end{aligned}$$

同时, 我们可得

$$R_0 = \zeta_1 D(-U_1)^{-1} \quad \text{和} \quad G_1 = \zeta_1(-U_1)^{-1}A.$$

依据R-测度 $\{R_k, k \geq 0\}$ 、G-测度 $\{G_k, k \geq 1\}$ 和U-测度 $\{U_k, k \geq 0\}$, 利用Li (2010)及Li和Cao (2004), 我们可以得到矩阵 Q 的RG-分解为

$$Q = (I - R_U)U_D(I - G_L),$$

其中

$$R_U = \begin{pmatrix} 0 & R_0 & & \\ & 0 & R_1 & \\ & & 0 & R_2 \\ & & & \ddots & \ddots \end{pmatrix}, \quad U_D = \text{diag}(U_0, U_1, U_2, \dots)$$

和

$$G_L = \begin{pmatrix} I & & & \\ G_1 & I & & \\ & G_2 & I & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}.$$

根据 Q 的RG-分解, 我们可得矩阵 Q 的最大非正逆矩阵为

$$Q^{-1} = (I - G_L)^{-1}U_D^{-1}(I - R_U)^{-1}. \quad (4.5)$$

由(4.4), 我们可以变换这个无穷维向量方程组为如下矩阵形式

$$(\pi_1, \pi_2, \pi_3, \dots) \begin{pmatrix} B_1 & \zeta_1 D & & \\ \mu I & B_2 & \zeta_2 D & \\ & \mu I & B_3 & \zeta_3 D \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix} = (-\omega \zeta_1 D, 0, 0, \dots).$$

因此, 我们可得

$$(\pi_1, \pi_2, \pi_3, \dots) = (-\omega \zeta_1 D, 0, 0, \dots)(I - G_L)^{-1}U_D^{-1}(I - R_U)^{-1}.$$

于是, 我们有

定理 4.2 马氏变动环境下的超市模型的固定点解为

$$\begin{cases} \pi_1 = \omega \zeta_1 D(-U_0)^{-1}, \\ \pi_k = \omega \zeta_1 D(-U_0)^{-1} R_0 R_1 \cdots R_{k-2}, \quad k \geq 2. \end{cases}$$

4.4 系统性能指标

令 Q 为任意一个服务台的稳态队长, 则在稳态下服务台的平均队长为

$$E[Q] = \sum_{k=1}^{\infty} k(\pi_k - \pi_{k+1})e = \sum_{k=1}^{\infty} \pi_k e = \sum_{k=1}^{\infty} \rho^{(d^k-1)/(d-1)}.$$

令 $E[S]$ 表示在稳态下到达顾客在超市模型中的平均逗留时间, 即从到达时刻算起, 直到完成服务离开系统的时刻为止的时间长度. 因为顾客到达系统后加入到最短队长为 k 的队列中的概率为 $(\pi_k - \pi_{k+1})L_d(\pi_k, \pi_{k+1})e$, $k \geq 0$, 所以平均逗留时间的均值为

$$\begin{aligned} E[S] &= \frac{1}{\mu}(\omega - \pi_1)L_d(\omega, \pi_1)e + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+1}{\mu}(\pi_k - \pi_{k+1})L_d(\pi_k, \pi_{k+1})e \\ &= \frac{1}{\mu}(1 - (\pi_1 e)^d) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+1}{\mu}((\pi_k e)^d - (\pi_{k+1} e)^d) \\ &= \frac{1}{\mu} \sum_{k=0}^{\infty} (\pi_k e)^d = \frac{1}{\mu} \sum_{k=0}^{\infty} \rho^{(d^{k+1}-d)/(d-1)}. \end{aligned}$$

其中 $(k+1)/\mu$ 表示 $k+1$ 个顾客进入队列后需要的平均逗留时间.

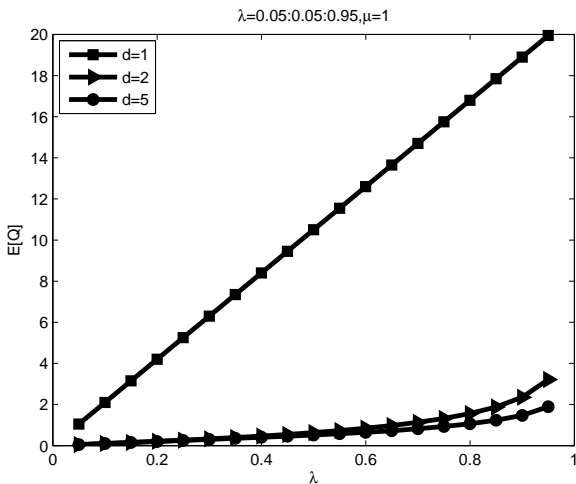


图8 当 $d = 1, 2, 5$ 时, $E[Q]$ 关于 λ 的变化

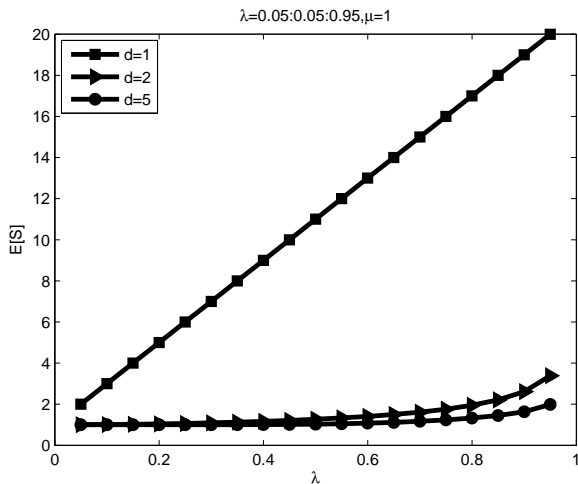


图9 当 $d = 1, 2, 5$ 时, $E[S]$ 关于 λ 的变化

设顾客的到达率 λ 为 $(0.05, 0.95)$ 之间的数, 服务台的服务率 μ 恒等于 1. 当选择数 $d = 1, 2, 5$ 时, 我们对马氏变动环境下的超市模型的 $E[Q]$ 和 $E[S]$ 进行了数值分析. 图 8 揭示了马氏变动环境下的超市模型中 $E[Q]$ 关于 λ 的变化, 我们可以看到 $E[Q]$ 随着 λ 的增加而增加; 而随着 d 的增加而减少. 图 9 揭示了马氏变动环境下的超市模型中 $E[S]$ 关于 λ 的变化, 我们可以看到 $E[S]$ 随着 λ 的增加而增加, 随着 d 的增加而减少.

§5. 结 束 语

在本文中, 我们简单地综述了国内外近年来对超市模型所获得的一些基本结果, 并进行了十分必要的推广. 我们的主要结果是考虑了服务台服务最长队列的一种新型超市模型、对到达过程的一般动态控制机制、通过数值算例研究了上述重要问题, 包括对顾客加入最短队列、随机加入队列、加入最长队列的不同超市模型进行了系统性能的数值比较, 给出它们效率的优劣分析. 最后, 我们对马氏变动环境下的超市模型进行了性能评价, 提供了固定点的计算方法, 并进行了数值分析. 本文的研究方法对于解决更加一般的、比较复杂的超市模型中的许多重要问题是比较有效的. 我们认为: 能够系统地发展超市模型的计算理论已经成为大型网络资源管理领域中的未来研究的重要课题.

附录A: RG-分解

在这个附录中, 我们介绍 QBD 的 RG-分解; 而对于一般不可约马氏过程的 RG-分解, Li (2010) 给出了系统性的讨论.

我们考虑一个不可约的连续时间的QBD过程 $\{(X_t, J_t), t \geq 0\}$, 它的无穷小生成元为

$$Q = \begin{pmatrix} A_1^{(0)} & A_0^{(0)} & & & \\ A_2^{(1)} & A_1^{(1)} & A_0^{(1)} & & \\ & A_2^{(2)} & A_1^{(2)} & A_0^{(2)} & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}, \quad (\text{A.1})$$

其中矩阵 $A_1^{(k)}$ ($k \geq 0$)是 m_k 阶的, 而其他矩阵的阶数可以顺便确定. 我们假设 $A_0^{(0)}e + A_1^{(0)}e \leq 0$ 和 $A_0^{(k)}e + A_1^{(k)}e + A_2^{(k)}e \leq 0$, $k \geq 1$.

令矩阵序列 $\{R_l : l \geq 0\}$ 和 $\{G_k : k \geq 1\}$ 分别为非线性矩阵方程组(A.2)和(A.3)的最小非负数解

$$A_0^{(l)} + R_l A_1^{(l+1)} + R_l R_{l+1} A_2^{(l+2)} = 0, \quad l \geq 0, \quad (\text{A.2})$$

$$A_0^{(k)} G_{k+1} G_k + A_1^{(k)} G_k + A_2^{(k)} = 0, \quad k \geq 1, \quad (\text{A.3})$$

则U-测度 $\{U_l : l \geq 0\}$ 为

$$U_l = A_1^{(l)} + R_l A_2^{(l+1)} = A_1^{(l)} + A_0^{(l)} G_{l+1}, \quad l \geq 0. \quad (\text{A.4})$$

当 $k \geq 1$ 时, 矩阵 U_k 是可逆的. 矩阵 U_0 是奇异的, 当且仅当这个QBD过程是常返的.

对于式(A.1)给出的QBD过程, 它的UL-型RG-分解为

$$Q = (I - R_U) \Psi_D (I - G_L), \quad (\text{A.5})$$

其中

$$R_U = \begin{pmatrix} 0 & R_0 & & & \\ & 0 & R_1 & & \\ & & 0 & R_2 & \\ & & & 0 & \ddots \\ & & & & \ddots \end{pmatrix},$$

$$\Psi_D = \text{diag}(U_0, U_1, U_2, U_3, \dots),$$

$$G_L = \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ G_1 & 0 & & & \\ & G_2 & 0 & & \\ & & G_3 & 0 & \\ & & & \ddots & \ddots \end{pmatrix}.$$

值得注意, 这个RG-分解仅仅需要QBD过程为不可约的, 而不需要任何其他条件.

令

$$X_k^{(l)} = R_l R_{l+1} R_{l+2} \cdots R_{l+k-1}, \quad k \geq 1, l \geq 0 \quad (\text{A.6})$$

和

$$Y_k^{(l)} = G_l G_{l-1} G_{l-2} \cdots G_{l-k+1}, \quad l \geq k \geq 1, \quad (\text{A.7})$$

则有

$$(I - R_U)^{-1} = \begin{pmatrix} I & X_1^{(0)} & X_2^{(0)} & X_3^{(0)} & \cdots \\ & I & X_1^{(1)} & X_2^{(1)} & \cdots \\ & & I & X_1^{(2)} & \cdots \\ & & & I & \cdots \\ & & & & \ddots \end{pmatrix} \quad (\text{A.8})$$

和

$$(I - G_L)^{-1} = \begin{pmatrix} I & & & & \\ Y_1^{(1)} & I & & & \\ Y_2^{(2)} & Y_1^{(2)} & I & & \\ Y_3^{(3)} & Y_2^{(3)} & Y_1^{(3)} & I & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}. \quad (\text{A.9})$$

如果QBD过程是水平独立的, 则有

$$R_k = R, \quad k \geq 1$$

和

$$G_l = G, \quad l \geq 2.$$

在这种情况下, 我们可以得到

$$(I - R_U)^{-1} = \begin{pmatrix} I & R_0 & R_0 R & R_0 R^2 & \cdots \\ & I & R & R^2 & \cdots \\ & & I & R & \cdots \\ & & & I & \cdots \\ & & & & \ddots \end{pmatrix} \quad (\text{A.10})$$

和

$$(I - G_L)^{-1} = \begin{pmatrix} I & & & & \\ G_1 & I & & & \\ GG_1 & G & I & & \\ G^2 G_1 & G^2 & G & I & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}. \quad (\text{A.11})$$

如果QBD过程是不可约的和正常返的, 则由专著Li (2010)及Li和Cao (2004)可得

$$\pi_0 = \varphi \nu_0 \quad (\text{A.12})$$

和

$$\pi_k = \varphi \nu_0 R_0 R_1 \cdots R_{k-1}, \quad k \geq 1, \quad (\text{A.13})$$

其中 ν_0 为马尔可夫链 $U = A_1^{(0)} + R_0 A_2^{(1)}$ 的平稳概率向量, 并且正则化常量 φ 为

$$\varphi = \frac{1}{1 + \sum_{k=0}^{\infty} \nu_0 R_0 R_1 \cdots R_k e}.$$

参 考 文 献

- [1] Vvedenskaya, N.D., Dobrushin, R.L. and Karpelevich, F.I., Queueing system with selection of the shortest of two queues: An asymptotic approach, *Problems of Information Transmissions*, **32(1)**(1996), 20–34.
- [2] Mitzenmacher, M.D., The power of two choices in randomized load balancing, Ph.D thesis, Department of Computer Science, University of California at Berkeley, 1996, 1–116.
- [3] Turner, S.R.E., The effect of increasing routing choice on resource pooling, *Probability in the Engineering and Informational Sciences*, **12(1)**(1998), 109–124.
- [4] Graham, C., Kinetic limits for large communication networks, In *Modelling in Applied Sciences* (Bellomo, N. and Pulvirenti, M., eds.), Birkhäuser, Basel, 2000a, 317–370.
- [5] Graham, C., Chaoticity on path space for a queueing network with selection of the shortest queue among several, *Journal of Applied Probability*, **37(1)**(2000b), 198–211.
- [6] Graham, C., Functional central limit theorems for a large network in which customers join the shortest of several queues, *Probability Theory and Related Fields*, **131(1)**(2005), 97–120.
- [7] Luczak, M.J. and Norris, J., Strong approximation for the supermarket model, *The Annals of Applied Probability*, **15(3)**(2005), 2038–2061.
- [8] Luczak, M.J. and McDiarmid, C., On the maximum queue length in the supermarket model, *The Annals of Probability*, **34(2)**(2006), 493–527.
- [9] Luczak, M.J. and McDiarmid, C., Asymptotic distributions and chaos for the supermarket model, *Electronic Journal of Probability*, **12(3)**(2007), 75–99.
- [10] Bramson, M., Lu, Y. and Prabhakar, B., Randomized load balancing with general service time distributions, *Proceedings of the ACM SIGMETRICS International Conference on Measurement and Modeling of Computer Systems*, **38(1)**(2010), 275–286.
- [11] Bramson, M., Lu, Y. and Prabhakar, B., Asymptotic independence of queues under randomized load balancing, *Queueing Systems*, **71(3)**(2012), 247–292.
- [12] Li, Q.L., Lui, J.C.S. and Wang, Y., A matrix-analytic solution for randomized load balancing models with PH service times, *Performance Evaluation of Computer and Communication Systems: Milestones and Future Challenges*, **6821**(2011), 240–253.

- [13] Li, Q.L. and Lui, J.C.S., Doubly exponential solution for randomized load balancing models with Markovian arrival processes and PH service times, <http://arxiv.org/abs/1009.4970>, 2010.
- [14] Vvedenskaya, N.D. and Suhov, Y.M., Dobrushin's mean-field approximation for a queue with dynamic routing, *Markov Processes and Related Fields*, **3**(1997), 493–526.
- [15] Mitzenmacher, M.D., Richa, A. and Sitaraman, R., The power of two random choices: A survey of techniques and results, *Handbook of Randomized Computing*, **1**(2001), 255–312.
- [16] Li, Q.L. and Dai, G.R., Recent progress on queueing processes in supermarket model, Submitted for publication, 2013.
- [17] Li, Q.L., *Constructive Computation in Stochastic Models with Applications: The RG-Factorizations*, Springer and Tsinghua Press, 2010.
- [18] Li, Q.L. and Cao, J., Two types of RG-factorizations of quasi-birth-and-death processes and their applications to stochastic integral functionals, *Stochastic Models*, **20**(3)(2004), 299–340.

Real-Time Dynamic Control in the Supermarket Models and Some Numerical Analysis

LI QUANLIN DU YE WANG MENG DAI GUIRONG

(School of Economics and Management Sciences, Yanshan University, Qinhuangdao, 066004)

The supermarket model is a dynamic randomized load balancing scheme for real-time dynamic control of large-scale parallel queuing network. It has many important practical applications in, for example, computer networks, cloud computing, manufacturing systems and transportation networks. In this paper, for the supermarket models we consider some important issues, such as, real-time dynamic control modes; efficiency comparison; mean-field black hole; Markov changing environment; stability; fixed point; system performance analysis. At the same time, we also study these important issues through some numerical examples, include performance comparison, and efficiency analysis for advantages and disadvantages among the supermarket models with either customers joining the shortest queue, or customers joining any queue randomly, or customers joining the longest queue. Further, we consider a more general supermarket model under an Markov changing environment, and provide performance evaluation for the supermarket model under an Markov changing environment.

Keywords: Supermarket model, randomized load balancing scheme, random changing environment, mean-field black hole, performance analysis, fixed point, stability.

AMS Subject Classification: 60J20, 60J28, 90B18, 90B22.