应用概率统计　第三十卷
第二期　2014年4月

Chinese Journal of Applied Probability
and Statistics Vol.30 No.2 Apr. 2014

二叉树模型的参数估计 *

郭明明　　吴述金*　　朱晓雨

(华东师范大学金融与统计学院, 上海, 200241)

摘　要

二叉树模型是期权定价中被广泛使用的模型之一, 其参数估计对于期权定价具有重要影响. 本文给出了一种二叉树模型参数估计方法, 该方法克服了二叉树模型经典参数估计方法的缺陷, 特别地, 消除了主观概率设定对参数估计的影响.

关键词: 二叉树模型, 参数估计, Hull-White估计.

学科分类号: O211.9.

§1. 引　　言

期权, 作为金融市场最重要的衍生产品之一, 对金融市场和投资人都具有十分重要的作用. 因此, 有关期权定价方式和方法的研究一直是数理金融领域热点问题之一. 期权定价的常用方法主要包括: Black-Scholes期权定价模型和二叉树模型, 其中Black-Scholes期权定价模型虽然具有许多优点, 但是它的推导过程难以为金融实务界所接受. 1979年Cox, Ross和Rubinstein等人提出了二叉树模型, 并且迅速为金融实务界接受和使用.

Cox, Ross和Rubinstein等人提出的二叉树模型假设标的资产在下一个时间点的价格只有上升和下降两种可能结果, 然后通过分叉的树枝来形象描述标的资产和期权价格的演进历程[1]. 一般地, 假设一只股票的当前价格是S_0, 以该股票为标的资产的欧式期权价格为V. 经过一个时间步(至到期日T)后该股票价格有可能上升到uS_0, 其相应的期权价值为U; 也有可能下降到dS_0, 其相应的期权价值为D. 采用无套利假设, 我们可以得到欧式期权的在t时刻的价值为

$$V = [qU + (1-q)D]\mathrm{e}^{-r\tau}, \tag{1.1}$$

其中$\tau = T - t > 0$为到期剩余时间, $r > 0$为无风险利润率, u为股价上升系数, d为股价下降系数,

$$q = \frac{\mathrm{e}^{r\tau} - d}{u - d}. \tag{1.2}$$

*高等学校学科创新引智计划(B14019)资助.

*通讯作者, E-mail: sjwu@stat.ecnu.edu.cn.

本文2013年11月6日收到, 2013年12月23日收到修改稿.

doi: 10.3969/j.issn.1001-4268.2014.02.007

从公式(1.1)可以看出, 如果使用二叉树模型进行期权定价, 我们必须先获得参数u和d的值. 事实上, 记R为股票在$[t, T]$时间段内的收益率, 则由股票的二叉树模型可得百分比收益率R服从表1的两点分布,

表1 百分比收益率R服从的分布

R	$d-1$	$u-1$
P	$1-p$	p

其中$p \in (0,1)$为在$[t, T]$时间段内股价上升的概率[2].

记μ为股价漂移参数, σ为股价波动率参数, 则

$$\begin{cases} \mu\tau = pu + (1-p)d - 1, \\ \sigma\sqrt{\tau} = \sqrt{p(1-p)}(u-d), \end{cases}$$

可以解得

$$\begin{cases} d = 1 + \mu\tau - \sqrt{\dfrac{p}{1-p}}\sigma\sqrt{\tau}, \\ u = 1 + \mu\tau + \sqrt{\dfrac{1-p}{p}}\sigma\sqrt{\tau}. \end{cases} \tag{1.3}$$

在已有二叉树模型的算法中, 公式(1.3)中参数的选择具有一定的主观性, 比如一种方法是令$ud = 1$从而确定出参数p, 然后再利用公式(1.3)计算出参数u和d. 在知名度较广的Hull-White算法[2]中直接取$p = 1/2$, 进而利用公式(1.3)计算出

$$\begin{cases} d = 1 + \mu\tau - \sigma\sqrt{\tau}, \\ u = 1 + \mu\tau + \sigma\sqrt{\tau}. \end{cases} \tag{1.4}$$

下文我们将说明, 主观选取股价上升概率p将会导致期权定价产生很大的误差, 然后给出股价上升概率p的估计方法, 从而提高二叉树模型进行期权定价的精度.

§2. 股价上升概率对期权定价的影响

由公式(1.2)和(1.3)可得

$$q = p + \frac{\mathrm{e}^{r\tau} - 1 - \mu\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\sqrt{p(1-p)}. \tag{2.1}$$

再把(2.1)代入(1.1)得

$$\begin{aligned} V &= [D + q(U-D)]\mathrm{e}^{-r\tau} \\ &= \Big\{D + (U-D)\Big[p + \frac{\mathrm{e}^{r\tau} - 1 - \mu\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\sqrt{p(1-p)}\Big]\Big\}\mathrm{e}^{-r\tau}. \end{aligned}$$

进而,

$$\frac{\partial V}{\partial p}=(U-D)\Big[1+\frac{\mathrm{e}^{r\tau}-1-\mu\tau}{2\sigma\sqrt{\tau}}\cdot\frac{1-2p}{\sqrt{p(1-p)}}\Big]\mathrm{e}^{-r\tau}.$$

当$p\approx 1/2$时, $\partial V/\partial p\approx(U-D)\mathrm{e}^{-r\tau}$, 即$\Delta V\approx(U-D)\mathrm{e}^{-r\tau}\Delta p$. 因此, 如果$U$和$D$相差较大时, 即使$p$在1/2附近, 取$p=1/2$也会导致期权价格$V$产生较大的误差. 因此, 主观地选取股价上升概率$p$将会导致期权定价产生很大的误差, 故我们需要给出股价上升概率p的估计方法.

§3. 股价上升概率p的估计

上节中我们已经指出股价上升概率p对期权定价精确度具有比较大的影响, 然而到目前为止我们还没有发现有关于p的估计结论, 因此, 在本节中我们将给出p的估计方法.

假设来自某资产A的价格的样本为$P_0,P_1,P_2,\ldots,P_n$, 其中取样时间间隔为Δt, 则我们可以计算出在每个Δt时间段内该标的资产的百分比收益率$R_{\Delta t}$为$R_1,R_2,\ldots,R_n$, 其中$R_k=(P_k-P_{k-1})/P_{k-1}$为第$k$个百分比收益率, $k=1,2,\ldots,n$. 假设资产A的二叉树模型中时间间隔为τ, 则在τ时间间隔内的收益率

$$R_\tau=\sqrt[\Delta t]{(1+R_{\Delta t})^\tau}-1,$$

因此,

$$R_{\Delta t}=\sqrt[\tau]{(1+R_\tau)^{\Delta t}}-1.\tag{3.1}$$

在第一节中, 我们已经定义了股票在τ时间段内的收益率R_τ, 并且R_τ服从表2的两点分布.

表2 百分比收益率R_τ服从的分布

R_τ	$d-1$	$u-1$
P	$1-p$	p

下面我们将利用$R_{\Delta t}$的样本值$R_1,R_2,\ldots,R_n$给出参数d, u和p的估计值.

首先, 利用(3.1)得$R_{\Delta t}$服从表3的两点分布.

表3 百分比收益率$R_{\Delta t}$服从的分布

$R_{\Delta t}$	$\sqrt[\tau]{d^{\Delta t}}-1$	$\sqrt[\tau]{u^{\Delta t}}-1$
P	$1-p$	p

计算$R_{\Delta t}$的前三阶矩得

$$\begin{cases} \mathsf{E}(R_{\Delta t}) = (1-p)\big(\sqrt[\tau]{d^{\Delta t}}-1\big) + p\big(\sqrt[\tau]{u^{\Delta t}}-1\big), \\ \mathsf{E}(R_{\Delta t}^2) = (1-p)\big(\sqrt[\tau]{d^{\Delta t}}-1\big)^2 + p\big(\sqrt[\tau]{u^{\Delta t}}-1\big)^2, \\ \mathsf{E}(R_{\Delta t}^3) = (1-p)\big(\sqrt[\tau]{d^{\Delta t}}-1\big)^3 + p\big(\sqrt[\tau]{u^{\Delta t}}-1\big)^3. \end{cases} \tag{3.2}$$

利用(3.2)的前两个方程, 与(1.3)类似求解可得

$$\begin{cases} \sqrt[\tau]{d^{\Delta t}} = 1 + \mathsf{E}(R_{\Delta t}) - \sqrt{\dfrac{p}{1-p}\cdot \mathsf{Var}\,(R_{\Delta t})}, \\ \sqrt[\tau]{u^{\Delta t}} = 1 + \mathsf{E}(R_{\Delta t}) + \sqrt{\dfrac{1-p}{p}\cdot \mathsf{Var}\,(R_{\Delta t})}. \end{cases} \tag{3.3}$$

由(3.2)的第二、三两个方程可得

$$\mathsf{E}(R_{\Delta t}^3) - \big(\sqrt[\tau]{d^{\Delta t}}-1\big)\mathsf{E}(R_{\Delta t}^2) = p\big(\sqrt[\tau]{u^{\Delta t}}-1\big)^2\big(\sqrt[\tau]{u^{\Delta t}}-\sqrt[\tau]{d^{\Delta t}}\big).$$

把(3.3)式代入上式得

$$p = \frac{x^2}{1+x^2},$$

其中$x=\sqrt{p/(1-p)}>0$满足

$$x^2 + \frac{\mathsf{E}(R_{\Delta t}^3) - \mathsf{E}(R_{\Delta t})\mathsf{E}(R_{\Delta t}^2) - 2\mathsf{E}(R_{\Delta t})\mathsf{Var}\,(R_{\Delta t})}{\sqrt{[\mathsf{Var}\,(R_{\Delta t})]^3}}x - 1 = 0.$$

解得

$$x = \frac{\sqrt{a^2+4}-a}{2},$$

其中

$$a = \frac{\mathsf{E}(R_{\Delta t}^3) - \mathsf{E}(R_{\Delta t})\mathsf{E}(R_{\Delta t}^2) - 2\mathsf{E}(R_{\Delta t})\mathsf{Var}\,(R_{\Delta t})}{\sqrt{[\mathsf{Var}\,(R_{\Delta t})]^3}}.$$

从而

$$p = \frac{2+a^2-a\sqrt{a^2+4}}{4+a^2-a\sqrt{a^2+4}}.$$

综上所述, 我们可以得到下面结论:

定理 3.1 假设某资产时间间隔为Δt的百分比收益率样本为$R_1, R_2, \ldots, R_n$, 则其时间间隔为τ的二叉树模型参数d, u和p的矩估计为

$$\begin{cases} \widehat{d} = \left(1+\mu_1 - S\sqrt{\dfrac{\widehat{p}}{1-\widehat{p}}}\right)^{\tau/\Delta t}, \\ \widehat{u} = \left(1+\mu_1 + S\sqrt{\dfrac{1-\widehat{p}}{\widehat{p}}}\right)^{\tau/\Delta t}, \\ \widehat{p} = \dfrac{2+a^2-a\sqrt{a^2+4}}{4+a^2-a\sqrt{a^2+4}}, \end{cases}$$

其中

$$a = \frac{\mu_3 - \mu_1\mu_2 - 2\mu_1 S^2}{S^3},$$
$$\mu_k = \frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n} R_m^k, \qquad k = 1, 2, 3,$$
$$S = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n}(R_m - \mu_1)^2}.$$

注记 1 定理3.1中关于股价上升概率p的估计值$\widehat{p} \in (0, 1)$, 因此定理3.1的估计是合理的.

如果采用对数收益率, 则(3.1)应该为

$$R_{\Delta t} = \frac{\Delta t}{\tau} \cdot R_\tau,$$

并且R_τ服从表4的两点分布,

表4 对数收益率R服从的分布

R_τ	$\ln d$	$\ln u$
P	$1-p$	p

从而$R_{\Delta t}$服从表5的两点分布.

表5 对数收益率$R_{\Delta t}$服从的分布

$R_{\Delta t}$	$\frac{\Delta t}{\tau}\ln d$	$\frac{\Delta t}{\tau}\ln u$
P	$1-p$	p

计算$R_{\Delta t}$的前三阶矩得

$$\begin{cases} \mathsf{E}(R_{\Delta t}) = (1-p)\dfrac{\Delta t}{\tau}\ln d + p\dfrac{\Delta t}{\tau}\ln u, \\ \mathsf{E}(R_{\Delta t}^2) = (1-p)\Big(\dfrac{\Delta t}{\tau}\ln d\Big)^2 + p\Big(\dfrac{\Delta t}{\tau}\ln u\Big)^2, \\ \mathsf{E}(R_{\Delta t}^3) = (1-p)\Big(\dfrac{\Delta t}{\tau}\ln d\Big)^3 + p\Big(\dfrac{\Delta t}{\tau}\ln u\Big)^3. \end{cases} \tag{3.4}$$

利用(3.4)的前两个方程, 与(1.3)类似求解可得

$$\begin{cases} \dfrac{\Delta t}{\tau}\ln d = \mathsf{E}(R_{\Delta t}) - \sqrt{\dfrac{p}{1-p}\cdot \mathsf{Var}(R_{\Delta t})}, \\ \dfrac{\Delta t}{\tau}\ln u = \mathsf{E}(R_{\Delta t}) + \sqrt{\dfrac{1-p}{p}\cdot \mathsf{Var}(R_{\Delta t})}. \end{cases} \tag{3.5}$$

由(3.4)的第二、三两个方程可得

$$\mathsf{E}(R_{\Delta t}^3)-\frac{\Delta t}{\tau}\ln d\cdot\mathsf{E}(R_{\Delta t}^2)=p\Big(\frac{\Delta t}{\tau}\ln u\Big)^2\Big(\frac{\Delta t}{\tau}\ln u-\frac{\Delta t}{\tau}\ln d\Big).$$

把(3.5)式代入上式得

$$p=\frac{x^2}{1+x^2},$$

其中$x=\sqrt{p/(1-p)}>0$满足

$$x^2+\frac{\mathsf{E}(R_{\Delta t}^3)-\mathsf{E}(R_{\Delta t})\mathsf{E}(R_{\Delta t}^2)-2\mathsf{E}(R_{\Delta t})\mathsf{Var}\,(R_{\Delta t})}{\sqrt{[\mathsf{Var}\,(R_{\Delta t})]^3}}x-1=0.$$

解得

$$x=\frac{\sqrt{a^2+4}-a}{2},$$

其中

$$a=\frac{\mathsf{E}(R_{\Delta t}^3)-\mathsf{E}(R_{\Delta t})\mathsf{E}(R_{\Delta t}^2)-2\mathsf{E}(R_{\Delta t})\mathsf{Var}\,(R_{\Delta t})}{\sqrt{[\mathsf{Var}\,(R_{\Delta t})]^3}}.$$

从而

$$p=\frac{2+a^2-a\sqrt{a^2+4}}{4+a^2-a\sqrt{a^2+4}}.$$

与定理3.1进行类似地推导可得下面结论:

定理 3.2　假设某资产时间间隔为Δt的对数收益率样本为$r_1,r_2,\ldots,r_n$, 则其时间间隔为τ的二叉树模型参数d, u和p的矩估计为

$$\begin{cases}\widehat{d}=\exp\Big\{\dfrac{\tau}{\Delta t}\Big(\mu_1-S\sqrt{\dfrac{\widehat{p}}{1-\widehat{p}}}\Big)\Big\},\\ \widehat{u}=\exp\Big\{\dfrac{\tau}{\Delta t}\Big(\mu_1+S\sqrt{\dfrac{1-\widehat{p}}{\widehat{p}}}\Big)\Big\},\\ \widehat{p}=\dfrac{2+a^2-a\sqrt{a^2+4}}{4+a^2-a\sqrt{a^2+4}},\end{cases}$$

其中

$$a=\frac{\mu_3-\mu_1\mu_2-2\mu_1S^2}{S^3},$$
$$\mu_k=\frac{1}{n}\sum_{m=1}^n r_m^k,\qquad k=1,2,3,$$
$$S=\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{m=1}^n(r_m-\mu_1)^2}.$$

注记 2　定理3.2中关于股价上升概率p的估计值$\widehat{p}\in(0,1)$, 因此定理3.2的估计也是合理的.

参 考 文 献

[1] Dixit, A.K. and Pindyck, R.S., The options approach to capital investment, *Harvard Business Review*, **73(3)**(1995), 105–115.

[2] Stampfli, J. and Goodman, V., *The Mathematics of Finance: Modeling and Hedging*, China Machine Press, Beijing, 2003.

Parameter Estimation of Binomial Model

Guo Mingming Wu Shujin Zhu Xiaoyu

(*School of Finance and Statistics, East China Normal University, Shanghai, 200241*)

Binomial model is one of widely used models, and its parameters have a great influence on option pricing. In this paper, a new parameter estimation is given for binomial model, which overcomes the fault of usual methods to estimate parameters of binomial models, especially, eliminate the influence of subjective probability.

Keywords: Binomial model, parameter estimation, Hull-White model.

AMS Subject Classification: 62F10, 62P05.