应用概率统计 第三十卷
第三期 2014年6月

Chinese Journal of Applied Probability
and Statistics Vol.30 No.3 Jun. 2014

白噪声分析中广义算子值函数的Bochner-Wick积分 *

韩 琦 王才士 成 丹

(西北师范大学数学与统计学院, 兰州, 730070)

摘 要

白噪声广义算子在白噪声分析理论及其应用中起着十分重要的作用. 本文主要讨论了白噪声广义算子值函数的积分及相关问题. 主要工作有: 引入了广义算子值测度的概念, 分别讨论了这种测度在象征和算子p-范数意义下的变差及相互关系; 借助于广义算子的Wick积运算, 引入了广义算子值函数关于广义算子值测度的一种积分 — Bochner-Wick积分, 讨论了这种积分的性质, 建立了相应的收敛定理并且展示了其在量子白噪声理论中的应用; 探讨了Bochner-Wick积分的Fubini定理及相关问题.

关键词: 白噪声空间, 广义算子值函数, 象征, Bochner-Wick积分.

学科分类号: O211.63.

§1. 引 言

在白噪声分析理论中, 关于广义算子和广义泛函的讨论主要有: Obata (1996)借助于广义算子的象征讨论了广义算子的解析刻画; Chung等(1999)利用W变换对广义的解析刻画定理给出了更简单的证明. 本文引入广义算子值测度的概念, 并讨论广义算子值函数关于广义算子值测度的积分. 借助于广义算子的Wick积运算, 定义了一种广义算子值函数关于广义算子值测度的积分, 称为Bochner-Wick积分. 讨论了这种积分的性质, 建立了相应的收敛定理并且展示了其在量子白噪声理论中的应用.

以下, 假定$(E)_C \subset (L^2)_C \subset (E)^*_C$为实Gel'fand三元组$E \subset H \subset E^*$上的白噪声分析框架, 其中$H = L^2(R)$, $E = S(R)$. 此外, 为便于表述, 将$(E)_C \subset (L^2)_C \subset (E)^*_C$简记为$(E) \subset (L^2) \subset (E)^*$.

∂_t表示(E)上的Hida微分算子, 对$\varphi \sim (\varphi_n) \in (E)$, 有$\partial_t\varphi \sim ((n+1)\varphi_{(n+1)}(t,\cdot))_{n\geq 0}$, 满足$\langle\langle \partial_t^* F, \varphi\rangle\rangle = \langle\langle F, \partial_t\varphi\rangle\rangle$, $F \in (E)^*$, $\varphi \in (E)$.

定义 1.1[3] 设$(\Omega, \mathcal{F})$表示任意可测空间, μ称为$(\Omega, \mathcal{F})$上取值于$(E)^*$的向量测度, 如果对任意一列互不相交的可测集A_n, $n = 0, 1, 2, \ldots$有

$$\mu\Big(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n\Big) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu(A_n),$$

其中级数的收敛是$(E)^*$ 中的弱收敛.

*国家自然科学基金(11061032, 71261023)资助.

本文2012年5月19日收到, 2014年3月6日收到修改稿.
doi: 10.3969/j.issn.1001-4268.2014.03.002

易见, 若μ是$(E)^*$值的向量测度, 则其S-变换$(S\mu)(A) = \langle\langle \mu(A), \phi_\xi \rangle\rangle$是一个实值测度. 其中$\phi_\xi(x) = \mathrm{e}^{\langle x,\xi\rangle-(1/2)|\xi|_0^2}$, $x \in E^*$.

定义 1.2[3] 设μ是$\mathcal{F} \to (E)^*$的向量测度, $A \in \mathcal{F}$, π是A的有限可测划分, 规定$|\mu|_p(A) = \sup\limits_{\pi} \sum\limits_{B\in\pi} \|F(B)\|_{2,p}$, $p \in R$, 则称$|\mu|_p$为μ的p变差 ($|\mu|_p$未必有限).

进一步, 若存在$p \in R$, 使得$|\mu|_p(E) < \infty$, 则称μ是有限变差向量测度.

注记 尽管$|\mu|_p(\Omega) < +\infty$, 即$\mu$是$(E)_{-p}$值的向量测度, 但不能认为$\mu$是$(E)_{-p}$ 上的向量测度, 因为其可列可加性的收敛意义, 是$(E)^*$中的弱收敛, 未必一定是以范数$\|\cdot\|_{2,p}$收敛, 这样虽然$\mu \ll |\mu|_p$, $(E)_p$是Hilbert空间, 但拉东–尼古丁定理也未必成立.

以下所讨论的向量测度均假定为有限变差的.

引理 1.1[3] 设μ是有限变差的向量测度, 则存在$p \in R$, $\|\mu\|_p$, 是非负数值测度.

定义 1.3[3] 称映射$X : \Omega \to (E)^*$是简单映射, 如果X可表示为下面形式

$$X = \sum_{i=1}^{n} X_i I_{A_i},$$

其中$X_i \in (E)^*$, $A_i \in \mathcal{F}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $n \geq 1$, $\{A_i\}$互不相交, 且$\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i = \Omega$.

定义 1.4[3] 对简单映射$X = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i I_{A_i}$, 定义Bochner-Wick积分

$$\int X(\omega) \diamond \mathrm{d}\mu = \sum_{i=1}^{n} X_i \diamond \mu(A_i).$$

由此定义可见, 对$\gamma \in R$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $2^{-2\alpha} + 2^{-2\beta} = 1$, 有

$$\left\| \int X(\omega) \diamond \mathrm{d}\mu \right\|_{2,\gamma} \leq \sum_{i=1}^{n} \|X_i\|_{2,\gamma+\alpha} \|\mu(A_i)\|_{2,\gamma+\beta} \leq \int \|X(\omega)\|_{2,\gamma+\alpha} \mathrm{d}|\mu|_{\gamma+\beta}.$$

定义 1.5[3] 称映射$X(\omega)$是关于μ强可测的, 若存在$p, q \in R$, 和简单映射序列$F_n(e)$, $n \geq 1$, 使得$\|X(\omega) - X_n(\omega)\|_{2,q} \to 0$ $(n \to \infty)$, $|\mu|_p -$ a.s..

定义 1.6[3] 设$X(\omega)$是强可测映射, 若存在$p, q \in R$和简单映射序列$X_n(\omega)$使得

$$\int \|X(\omega) - X_n(\omega)\|_{2,q} \mathrm{d}|\mu|_p \qquad (n \to \infty),$$

则称$X(\omega)$关于μ Bochner-Wick可积, 这时$\int X_n(\omega) \diamond \mathrm{d}\mu$强收敛到$(E)^*$中唯一元素, 记为$\int X(\omega) \diamond \mathrm{d}\mu$, 称之为$X(\omega)$关于$\mu$的Bochner-Wick积分.

引理 1.2[3] 强可测映射$X(\omega)$关于μ Bochner-Wick可积的充要条件是, 存在$p, q \in R$使得$\|X(\omega)\|_{2,q}$关于$|\mu|_p$可积, 即

$$\int \|X(\omega)\|_{2,q} \mathrm{d}|\mu|_p < +\infty.$$

引理 1.3[3] 设$X_n(\omega)$, $n\geq 1$是强可测映射序列, 若存在$q\in R$使$\|X(\omega)-X_n(\omega)\|_{2,q}\to 0$ $(n\to\infty)$, 则$X(\omega)$是强可测映射.

引理 1.4[3] (1) 线性性 设$X(\omega),Y(\omega)$关于μ Bochner-Wick可积, 对任意实数α,β有

$$\int[\alpha X(\omega)+\beta Y(\omega)]\diamond\mathrm{d}\mu=\alpha\int X(\omega)\diamond\mathrm{d}\mu+\beta\int Y(\omega)\diamond\mathrm{d}\mu.$$

(2) 设$X(\omega)$关于μ Bochner-Wick可积, 则存在$p,q,r\in R$使

$$\Big\|\int X(\omega)\diamond\mathrm{d}\mu\Big\|_{2,r}\leq\int\|X(\omega)\|_{2,q}\mathrm{d}|\mu|_p.$$

(3) 控制收敛定理 设$X(\omega),X_n(\omega)$, $n\geq 1$是强可测映射序列, $g(\cdot)$是$\mathcal{F}$可测函数, 若存在$p,q\in R$, 使得$g(\cdot)\in L^1(\mathrm{d}|\mu|_p)$和$\|X(\omega)\|_{2,q}\leq g(\omega)$, $|\mu|_p$ a.s., 则当$X_n(\omega)\xrightarrow[n\to\infty]{(E)_q}X(\omega)$时, $X(\omega)$关于μ Bochner-Wick可积, 且

$$\int X_n(\omega)\diamond\mathrm{d}\mu\xrightarrow[n\to\infty]{(E)_r}\int X(\omega)\diamond\mathrm{d}\mu.$$

引理 1.5[3] 设$X(\omega)$强可测且关于μ Bochner-Wick可积, 则其S-变换$SX(\omega)$关于测度$S\mu$可积, 且

$$S\int X(\omega)\diamond\mathrm{d}\mu=\int SX(\omega)\mathrm{d}S\mu.$$

引理 1.6[3] 设μ,ν都是$(\Omega,\mathcal{F})$上有限变差向量测度, $X(\omega_1,\omega_2)$是$\Omega^{\otimes 2}\to(E)^*$二元强可测映射. 若存在$p,q\in R$使得

$$\int\|X(\omega_1,\omega_2)\|_{2,q}\mathrm{d}|\mu|_p\times|\nu_p|<+\infty,$$

则 (1) $X(\omega_1,\omega_2)$关于$\mu\diamond\nu$ Bochner-Wick可积.

(2) $X(\cdot,\omega_2),X(\omega_1,\cdot)$分别关于$\mu,\nu$强可测且Bochner-Wick可积.

(3) $H(\omega_2)=\int X(\cdot,\omega_2)\diamond\mathrm{d}\mu$, $K(\omega_1)=\int X(\omega_1,\cdot)\diamond\mathrm{d}\nu$分别关于$\mu,\nu$强可测且Bochner-Wick可积.

(4) 下面等式成立

$$\int X(\omega_1,\omega_2)\diamond\mathrm{d}(\mu\diamond\nu)=\int\Big(\int X(\omega_1,\omega_2)\diamond\mathrm{d}\mu\Big)\diamond\mathrm{d}\nu=\int\Big(\int X(\omega_1,\omega_2)\diamond\mathrm{d}\nu\Big)\diamond\mathrm{d}\mu.$$

下面给出引理1.6的一个应用.

引理 1.7[3] 设$(\Omega,\mathcal{F})=(R,\mathcal{B})$, $\{W_t,t\in R\}$是$(s^*(R),\mathcal{B}(s^*(R)))$上的布朗运动, $\mu(A)=\int\mathbf{1}_A\mathrm{d}W_t$, $A\in\mathcal{B}$. 若存在$q\in R$, 使得$\int\|X(t,s)\|_{2,q}^2\mathrm{d}t\mathrm{d}s<+\infty$, 则下列各积分式有意义, 且等式成立

$$\int\partial_t^*\partial_s^*X(t,\omega)\mathrm{d}t\times\mathrm{d}s=\int\partial_t^*\Big(\int\partial_s^*X(t,\omega)\mathrm{d}t\Big)\mathrm{d}s=\int\partial_s^*\Big(\int\partial_t^*X(t,\omega)\mathrm{d}s\Big)\mathrm{d}t.$$

§2. 正　　文

$\mathcal{L}[(E),(E)^*]$中的元素称为白噪声分析框架$(E)\subset(L^2)\subset(E)^*$上的广义算子, 简称广义算子. 由Schwartz核定理可知

$$\mathcal{L}[(E),(E)^*]\cong\mathcal{B}[(E)\times(E)]\cong[(E)\otimes(E)]^*\cong(E)^*\otimes(E)^*.$$

定义 2.1　广义算子值函数$Z:\mathcal{F}\to\mathcal{L}[(E),(E)^*]$称为可测空间$(\Omega,\mathcal{F})$上的广义算子值测度, 若对任意一列两两不交的$\{F_n\}\subset\mathcal{F}$, 有

$$Z\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty}F_n\Big)=\sum_{n=1}^{\infty}Z(F_n),$$

其中收敛是象征意义下的收敛, 即$\forall\,\xi,\eta\in E$, 有

$$\widehat{Z\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty}F_n\Big)}(\xi,\eta)=\sum_{n=1}^{\infty}\widehat{Z(F_n)}(\xi,\eta).$$

注记 1　设Z是$(\Omega,\mathcal{F})$上的一个广义算子值测度. 对于每一对$\xi,\eta\in E$, 定义复值集函数$\widehat{Z}_{\xi,\eta}:\mathcal{F}\to C$如下:

$$\widehat{Z}_{\xi,\eta}(F)=\widehat{Z(F)}(\xi,\eta),\qquad F\in\mathcal{F}.$$

易见, 对于每一对$\xi,\eta\in E$, $\widehat{Z}_{\xi,\eta}$是$(\Omega,\mathcal{F})$上的复值测度.

注记 2　若Z是$(\Omega,\mathcal{F})$上的广义算子值测度(Generalized Operator Valued Measure, 简称为GOVM), 则对于有限多个两两不交的$\{F_k\}_{1\le k\le n}\subset\mathcal{F}$, 有

$$Z\Big(\bigcup_{k=1}^{n}F_k\Big)=\sum_{k=1}^{n}Z(F_k).$$

设$T\in\mathcal{L}[(E),(E)^*]$, $p\ge 0$, 规定

$$\|T\|_p=\sup\{\|T\varphi\|_{-p}\,|\,\varphi\in(E),\|\varphi\|_p=1\}.$$

称之为T的算子p-范数.

定义 2.2　假定Z是$(\Omega,\mathcal{F})$上的一个GOVM, $p\ge 0$, $F\in\mathcal{F}$, 规定

$$\|Z\|_p(F)=\sup_{\pi}\sum_{B\in\pi}\|Z(B)\|_p,$$

其中π是F上的有限可测划分, $\sup\limits_{\pi}$意味着对一切F的有限可测划分求上确界.

称集函数$\|Z\|_p:\mathcal{F}\to\overline{R}_+$为$Z$的$p$-变差, 而称$\|Z\|_p(F)$为$Z$在$F$上的$p$-变差.

若$\|Z\|_p(\Omega)<\infty$, 则称Z是p-有限变差的.

定理 2.1 若Z是$(\Omega,\mathcal{F})$上的一个p-有限变差的GOVM, 则其p-变差$\|Z\|_p$是有限可加的.

证明: 设$F_1,F_2\in\mathcal{F}$为个互不相交的可测集合. 记$F=F_1\cup F_2$, 对于F的任意一个有限可测划分π, $\{B\cap F_1|B\in\pi\}$和$\{B\cap F_2|B\in\pi\}$分别是F_1和F_2的有限可测划分. 于是

$$\begin{aligned}\sum_{B\in\pi}\|Z(B)\|_p &= \sum_{B\in\pi}\|Z(B\cap F_1)+Z(B\cap F_2)\|_p\\ &\le \sum_{B\in\pi}\|Z(B\cap F_1)\|_p+\sum_{B\in\pi}\|Z(B\cap F_2)\|_p\\ &\le \|Z\|_p(F_1)+\|Z\|_p(F_2).\end{aligned}$$

由此并注意到π的任意性, 可见

$$\|Z\|_p(F)\le\|Z\|_p(F_1)+\|Z\|_p(F_2).$$

另一方面, 对于任意$\varepsilon>0$, 由于$\|Z\|_p(F_1)\le\|Z\|_p(\Omega)<\infty$, 所以存在$F_1$的有限可测划分$\pi_1$使得

$$\|Z\|_p(F_1)-\varepsilon<\sum_{B\in\pi_1}\|Z(B)\|_p.$$

同理, 存在F_2的有限可测划分π_2使得

$$\|Z\|_p(F_2)-\varepsilon<\sum_{B\in\pi_2}\|Z(B)\|_p.$$

注意到$\pi_1\cup\pi_1$构成F的有限可测划分, 于是

$$\begin{aligned}\|Z\|_p(F_1)+\|Z\|_p(F_2)-2\varepsilon &< \sum_{B\in\pi_1}\|Z(B)\|_p+\sum_{B\in\pi_2}\|Z(B)\|_p\\ &\le \|Z\|_p(F).\end{aligned}$$

由ε的任意性可知

$$\|Z\|_p(F_1)+\|Z\|_p(F_2)\le\|Z\|_p(F).$$

综上

$$\|Z\|_p(F)=\|Z\|_p(F_1)+\|Z\|_p(F_2).\qquad\Box$$

定理 2.2 设Z是可测空间$(\Omega,\mathcal{F})$上的一个p-有限变差的GOVM, 其中$p\ge0$给定, 则其p-变差$\|Z\|_p$ σ-可加的充要条件是: Z关于算子p-范数σ-可加, 即对任意两两不交$\{F_n\}\subset\mathcal{F}$, 有

$$\Big\|Z\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty}F_n\Big)-\sum_{k=1}^{n}Z(F_k)\Big\|_p\to0\qquad(n\to\infty).$$

证明: 必要性显然.

下证充分性. 设$\{F_n\}\subset\mathcal{F}$两两不交, 再设$\pi$是$F=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}F_n$的任意一个有限可测划分, 则

$$\begin{aligned}\sum_{B\in\pi}\|Z(B)\|_p &= \sum_{B\in\pi}\Big\|Z\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty}B\cap F_n\Big)\Big\|_p=\sum_{B\in\pi}\Big\|\sum_{n=1}^{\infty}Z(B\cap F_n)\Big\|_p\\ &\le \sum_{B\in\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\|Z(B\cap F_n)\|_p=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{B\in\pi}\|Z(B\cap F_n)\|_p\\ &\le \sum_{n=1}^{\infty}\|Z\|_p(F_n).\end{aligned}$$

由π的任意性, $\|Z\|_p(F)\le\sum\limits_{n=1}^{\infty}\|Z\|_p(F_n)$, 证毕. □

定义 2.3 称映射$X:\Omega\to\mathcal{L}[(E),(E)^*]$是简单的GOVM, 如果$X$可表为下面的形式

$$X(\omega)=\sum_{i=1}^{n}X_iI_{A_i}(\omega),\qquad \omega\in\Omega,$$

其中$X_i\in\mathcal{L}[(E),(E)^*]$, $A_i\in\mathcal{F}$, $i=1,2,\ldots,n$, $n\ge 1$, A_i互不相交, 且$\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i=\Omega$.

命题 2.1 若Z是$(\Omega,\mathcal{F})$上的一个p-有限变差的GOVM, 则对任意的$\xi,\eta\in E$,

$$|\widehat{Z}_{\xi\eta}|(F)\le\|Z\|_p(F)\exp\Big\{\frac{1}{2}(|\xi|_p^2+|\eta|_p^2)\Big\}.$$

证明: 设π是F的任意有限可测划分, 则

$$\begin{aligned}\sum_{B\in\pi}\|\widehat{Z}_{\xi\eta}(B)\| &= \sum_{B\in\pi}\|\langle\langle Z(B)\phi_\xi,\phi_\eta\rangle\rangle\|\le\sum_{B\in\pi}\|Z(B)\|_p\|\phi_\xi\|_p\|\phi_\eta\|_p\\ &= \sum_{B\in\pi}\|Z(B)\|_p\exp\Big\{\frac{1}{2}(|\xi|_p^2+|\eta|_p^2)\Big\}\\ &\le \|Z\|_p(F)\exp\Big\{\frac{1}{2}(|\xi|_p^2+|\eta|_p^2)\Big\}.\end{aligned}$$ □

以下设$p\ge 0$给定, Z是$(\Omega,\mathcal{F})$上的一个p-有限变差的GOVM. 记$\mu_p(\cdot)=\|Z\|_p(\cdot)$, 并假定$\mu_p$是$\sigma$-可加的.

定义 2.4 称广义算子值映射$S:\Omega\to\mathcal{L}[(E),(E)^*]$是$p$-简单的, 如果

$$S(\omega)=\sum_{i=1}^{n}T_iI_{F_i}(\omega),\qquad \omega\in\Omega,$$

其中$\{F_1,F_2,\ldots.F_n\}\subset\mathcal{F}$是$\Omega$的一个有限可测划分, $\{T_1,T_2,\ldots,T_n\}\subset\mathcal{L}_p$, 这里

$$\mathcal{L}_p[(E),(E)^*]\equiv\{T\in\mathcal{L}[(E),(E)^*]\,|\,\|T\|_p<+\infty\}.$$

定义 2.5 称广义算子值映射$X:\Omega\to\mathcal{L}[(E),(E)^*]$是$p$-可测的, 如果存在一列$p$-简单的广义算子值映射$\{S_n\}_{n\ge1}$, 使得$\|X(\omega)-S_n(\omega)\|_p\xrightarrow{n\to\infty}0$, μ_p-a.e.于Ω.

定义 2.6 $L(\Omega,\mu_p;\mathcal{L}_p)=\left\{X:\Omega\to\mathcal{L}_p\,|\,X\text{是}p\text{-可测且}\int_\Omega\|X(\omega)\|_p\mu_p(\mathrm{d}\omega)<\infty\right\}$, 其中, $\mathcal{L}\equiv\mathcal{L}_p[(E),(E)^*]$. 注: $(\Omega,\mathcal{F})$上的p-简单广义算子值映射均属于$L(\Omega,\mu_p;\mathcal{L}_p)$.

注记 3 若$X\in L(\Omega,\mu_p;\mathcal{L}_p)$, 则有一列$p$-简单的广义算子值映射$\{S_n\}_{n\geq 1}$满足

$$\int_\Omega\|X(\omega)-S_n(\omega)\|_p\mu_p(\mathrm{d}\omega)\to 0\qquad(n\to\infty).$$

定义 2.7 设S是一个p-简单的广义算子值映射, 则规定

$$\int_\Omega S(\omega)\diamond Z(\mathrm{d}\omega)=\sum_{i=1}^n T_i\diamond Z(F_i),$$

其中$S(\omega)=\sum\limits_{i=1}^n T_iI_{F_i}(\omega)$, $\omega\in\Omega$, 称上述积分为S关于Z的Wick-型积分.

设$q>p$, 使得$3\mathrm{e}^2\|A^{-(q-p)}\|_{\mathrm{HS}}^2<1$, 记

$$C_{p,q}=\frac{1}{1-3\mathrm{e}^2\|A^{-(q-p)}\|_{\mathrm{HS}}^2},$$

其中A是谐振子.

定理 2.3 设$S:\Omega\to\mathcal{L}_p$是p-简单的, Z是$(\Omega,\mathcal{F})$上的一个p-有限变差的GOVM, 其p-变差$\mu_p\equiv\|Z\|_p$是σ-可加的, 则

$$\Big\|\int_\Omega S(\omega)\diamond Z(\mathrm{d}\omega)\Big\|_q\leq C_{p,q}\int_\Omega\|S(\omega)\|_p\mu_p(\mathrm{d}\omega).$$

证明: 设$S(\omega)=\sum\limits_{i=1}^n T_iI_{F_i}(\omega)$, 其中$\{T_i\}\subset\mathcal{L}_p$, 令$Y=\int_\Omega S(\omega)\diamond Z(\mathrm{d}\omega)$, 则$\forall\,\xi,\eta\in E$, 有

$$\widehat{Y}(\xi,\eta)=\sum_{i=1}^n \widehat{T_i\diamond Z(F_i)}(\xi,\eta)=\sum_{i=1}^n\widehat{T}_i(\xi,\eta)Z(F_i)(\xi,\eta)\mathrm{e}^{-\langle\xi,\eta\rangle}.$$

由此得

$$\begin{aligned}|\widehat{Y}(\xi,\eta)|&\leq\sum_{i=1}^n|\widehat{T}_i(\xi,\eta)|\cdot|\widehat{Z(F_i)}(\xi,\eta)|\cdot|\mathrm{e}^{-\langle\xi,\eta\rangle}|\\&\leq\sum_{i=1}^n\|T_i\|_p\|Z(F_i)\|_p\exp\left\{\frac{3}{2}(|\xi|_p^2+|\eta|_p^2)\right\}\\&\leq\sum_{i=1}^n\|T_i\|_p\mu_p(F_i)\exp\left\{\frac{3}{2}(|\xi|_p^2+|\eta|_p^2)\right\}\\&=\int_\Omega\Big(\sum_{i=1}^n\|T_i\|_pI_{F_i}(\omega)\Big)\mu_p(\mathrm{d}\omega)\exp\left\{\frac{3}{2}(|\xi|_p^2+|\eta|_p^2)\right\}\\&=\int_\Omega\|S(\omega)\|_p\mu_p(\mathrm{d}\omega)\exp\left\{\frac{3}{2}(|\xi|_p^2+|\eta|_p^2)\right\}.\end{aligned}$$

由广义算子的范数估计得, 当$q>p$, $3\mathrm{e}^2\|A^{-(q-p)}\|_{\mathrm{HS}}^2<1$时, 有

$$\|Y\varphi\|_{-q}\leq\frac{\displaystyle\int_\Omega\|S(\omega)\|_p\mu_p(\mathrm{d}\omega)}{1-3\mathrm{e}^2\|A^{-(q-p)}\|_{\mathrm{HS}}^2}\|\varphi\|_q.$$

故

$$\|Y\|_q\leq\frac{\displaystyle\int_\Omega\|S(\omega)\|_p\mu_p(\mathrm{d}\omega)}{1-3\mathrm{e}^2\|A^{-(q-p)}\|_{\mathrm{HS}}^2}.$$

即

$$\Big\|\int_\Omega S(\omega)\diamond Z(\mathrm{d}\omega)\Big\|_q\leq C_{p,q}\int_\Omega\|S(\omega)\|_p\mu_p(\mathrm{d}\omega).\qquad\square$$

定理 2.4　设$X\in L(\Omega,\mu_p;\mathcal{L}_p)$, $\{S_n\}_{n\geq1}$是一列p-简单的广义算子值映射, 满足

$$\int_\Omega\|X(\omega)-S_n(\omega)\|_p\mu_p(\mathrm{d}\omega)\xrightarrow{n\to\infty}0,\qquad\mu_p-\text{a.e.},$$

则$\Big\{\displaystyle\int_\Omega S_n(\omega)\diamond Z(\mathrm{d}\omega)\Big\}_{n\geq1}$关于算子$q$-范数收敛, 即存在广义算子$Y\in\mathcal{L}_q[(E),(E)^*]$, 使得

$$\Big\|Y-\int_\Omega S_n(\omega)\diamond Z(\mathrm{d}\omega)\Big\|_q\to0\qquad(n\to\infty).$$

证明:

$$\begin{aligned}\Big\|\int_\Omega S_m(\omega)\diamond Z(\mathrm{d}\omega)-\int_\Omega S_n(\omega)\diamond Z(\mathrm{d}\omega)\Big\|_q&=\Big\|\int_\Omega(S_m(\omega)-S_n(\omega))\diamond Z(\mathrm{d}\omega)\Big\|_q\\&\leq C_{p,q}\int_\Omega\|S_m(\omega)-S_n(\omega)\|_p\mu_p(\mathrm{d}\omega)\\&\to0\qquad(m,n\to\infty).\end{aligned}$$

可见$\Big\{\displaystyle\int_\Omega S_n(\omega)\diamond Z(\mathrm{d}\omega)\Big\}_{n\geq1}$关于算子$q$-范数是一个基本列, 从而有唯一的$Y\in\mathcal{L}_q[(E),(E)^*]$, 使得

$$\int_\Omega S_n(\omega)\diamond Z(\mathrm{d}\omega)\xrightarrow{n\to\infty}Y\ \text{关于}q\text{-范数}.\qquad\square$$

定义 2.8　称上述广义算子Y为映射X关于Z的Wick-型积分, 记作

$$Y=\int_\Omega X(\omega)\diamond Z(\mathrm{d}\omega).$$

定理 2.5　设$X\in L(\Omega,\mu_p;\mathcal{L}_p)$, 则$\displaystyle\int_\Omega X(\omega)\diamond Z(\mathrm{d}\omega)\in\mathcal{L}_q$, 且有估计

$$\Big\|\int_\Omega X(\omega)\diamond Z(\mathrm{d}\omega)\Big\|_q\leq C_{p,q}\int_\Omega\|X(\omega)\|_p\mu_p(\mathrm{d}\omega).$$

证明: 因为$X \in L(\Omega, \mu_p; \mathcal{L}_p)$, 所以存在一列$p$-基本的广义算子值映射$\{S_n\}_n \geq 1$, 满足

$$\Big\| \int_\Omega X(\omega Z(\mathrm{d}\omega)) - \int_\Omega S_n(\omega Z(\mathrm{d}\omega)) \Big\|_q \xrightarrow{n\to\infty} 0 \text{ 关于}q\text{-范数}.$$

于是, 对于任意的$\varepsilon > 0$, 存在N, 当$n > N$时, 有

$$\begin{aligned}
\Big\| \int_\Omega X(\omega) \diamond Z(\mathrm{d}\omega) \Big\|_q &= \Big\| \int_\Omega X(\omega) \diamond Z(\mathrm{d}\omega) - \int_\Omega S_n(\omega) \diamond Z(\mathrm{d}\omega) \\
&\quad + \int_\Omega S_n(\omega) \diamond Z(\mathrm{d}\omega) \Big\|_q \\
&\leq \Big\| \int_\Omega X(\omega) \diamond Z(\mathrm{d}\omega) - \int_\Omega S_n(\omega) \diamond Z(\mathrm{d}\omega) \Big\|_q \\
&\quad + \Big\| \int_\Omega S_n(\omega) \diamond Z(\mathrm{d}\omega) \Big\|_q \\
&\leq \varepsilon + \Big\| \int_\Omega S_n(\omega) \diamond Z(\mathrm{d}\omega) \Big\|_q \\
&< \infty.
\end{aligned}$$

所以$\int_\Omega X(\omega) \diamond Z(\mathrm{d}\omega) \in \mathcal{L}_q$.

而又有以上证明及前一定理知, 对任意的$\varepsilon' > 0$,

$$\begin{aligned}
\Big\| \int_\Omega X(\omega) \diamond Z(\mathrm{d}\omega) \Big\|_q &\leq \varepsilon + \Big\| \int_\Omega S_n(\omega) \diamond Z(\mathrm{d}\omega) \Big\|_q \\
&\leq \varepsilon + C_{p,q} \int_\Omega \|S_n(\omega)\|_p \mu_p(\mathrm{d}\omega) \\
&\leq \varepsilon + C_{p,q} \int_\Omega \|X(\omega)\|_p \mu_p(\mathrm{d}\omega) + \varepsilon'.
\end{aligned}$$

由$\varepsilon, \varepsilon'$的任意性,

$$\Big\| \int_\Omega X(\omega) \diamond Z(\mathrm{d}\omega) \Big\|_q \leq C_{p,q} \int_\Omega \|X(\omega)\|_p \mu_p(\mathrm{d}\omega). \qquad \square$$

容易证明, 积分具有线性性.

定理 2.6 若$X, Y \in L(\Omega, \mu_p; \mathcal{L}_p)$, 对任意实数$\alpha, \beta$, 有

$$\int_\Omega [\alpha X(\omega) + \beta Y(\omega)] \diamond Z(\mathrm{d}\omega) = \alpha \int_\Omega X(\omega) \diamond Z(\mathrm{d}\omega) + \beta \int_\Omega Y(\omega) \diamond Z(\mathrm{d}\omega).$$

定理 2.7 (控制收敛定理) 设广义算子值映射序列$\{X_n\}_{n\geq 1}$ p-可测, 且满足

(1) $\forall\, \delta > 0$, 有

$$\lim_{n\to+\infty} \mu_p[\|X_n - X\|_p \geq \delta] = 0,$$

其中X是一个p-可测的广义算子值函数.

(2) 存在$(\Omega, \mathcal{F}; \mu_p)$上的非负可积函数$g(\cdot)$, 使得

$$\|X_n(\omega)\|_p \leq g(\omega), \quad \mu_p - \text{a.e.于}\,\Omega, \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

则$X \in L(\Omega, \mu_p; \mathcal{L}_p)$且

$$\Big\| \int_\Omega X(\omega) \diamond Z(\mathrm{d}\omega) - \int_\Omega X_n(\omega) \diamond Z(\mathrm{d}\omega) \Big\|_q \to 0 \qquad (n \to \infty).$$

证明: 由条件(1)可知,

$$\|X_n(\omega) - X(\omega)\|_p \xrightarrow{\mu_p} 0 \qquad (n \to \infty).$$

从而有一子列$\{\|X_{n_k}(\omega) - X(\omega)\|_p\}_{k\geq 1}$, 使得

$$\|X_{n_k}(\omega) - X(\omega)\|_p \to 0, \quad \mu_p - \text{a.e.于}\,\Omega,$$

由此可见,

$$\|X(\omega)\|_p \leq g(\omega), \quad \mu_p - \text{a.e.于}\,\Omega.$$

从而$X \in L(\Omega, \mu_p; \mathcal{L}_p)$又

$$\begin{aligned}\Big\| \int_\Omega X(\omega) \diamond Z(\mathrm{d}\omega) - \int_\Omega X_n(\omega) \diamond Z(\mathrm{d}\omega) \Big\|_q &= \Big\| \int_\Omega (X(\omega) - X_n(\omega)) \diamond Z(\mathrm{d}\omega) \Big\|_q \\ &\leq C_{p,q} \int_\Omega \|(X(\omega) - X_n(\omega)\|_p \mu_p(\mathrm{d}\omega) \\ &\to 0 \qquad (n \to \infty). \qquad \Box\end{aligned}$$

定义 2.9 设$X(\omega)$为$(\Omega, \mathcal{F})$上的广义算子值映射, 且$X \in L(\Omega, \mu_p; \mathcal{L}_p)$. 则对任何$A \in \mathcal{F}$, $I_A X \in L(\Omega, \mu_p; \mathcal{L}_p)$. 于是$\int_A X \diamond Z(\mathrm{d}\omega) = \int_\Omega I_A X \diamond Z(\mathrm{d}\omega)$有意义, 称为$X(\omega)$关于$Z(\omega)$在$A$上的Wick-型不定积分.

由控制收敛定理及Wick-型不定积分的定义, 易证如下定理

定理 2.8 设$X \in L(\Omega, \mu_p; \mathcal{L}_p)$, $\{F_n\}_{n\geq 1} \subset \mathcal{F}$且$F_i \cap F_j = \emptyset$, $i \neq j$, 则有

$$\int_{\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n} X(\omega) \diamond Z(\mathrm{d}\omega) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{F_n} X(\omega) \diamond Z(\mathrm{d}\omega).$$

定理 2.9 设$X \in L(\Omega, \mu_p; \mathcal{L}_p)$, 则对每一对$\xi, \eta \in E$, 复值函数$\omega \longmapsto \widehat{X(\omega)}(\xi, \eta)$在$(\Omega, \mathcal{F})$上关于复值测度$\widehat{Z}_{\xi,\eta}$可积, 并且满足

$$\Big[\int_\Omega X(\omega) \diamond Z(\mathrm{d}\omega) \Big]^{\widehat{}}(\xi, \eta) = \mathrm{e}^{-\langle \xi, \eta \rangle} \int_\Omega \widehat{X(\omega)}(\xi, \eta) \widehat{Z}_{(\xi,\eta)}(\mathrm{d}\omega).$$

这里$\Big[\int_\Omega X(\omega) \diamond Z(\mathrm{d}\omega) \Big]^{\widehat{}}(\xi, \eta)$表示关于$\int_\Omega X(\omega) \diamond Z(\mathrm{d}\omega)$取象征.

证明: 易见$\omega \longmapsto \widehat{X(\omega)}(\xi,\eta)$是可测函数. 又因

$$|\widehat{X(\omega)}(\xi,\eta)| \le \|X(\omega)\|_p \exp\Big\{\frac{1}{2}(|\xi|_p^2+|\eta|_p^2)\Big\}, \qquad \omega\in\Omega.$$

而由命题2.1

$$|\widehat{Z}_{\xi\eta}|(F) \le \mu_p(F)\exp\Big\{\frac{1}{2}(|\xi|_p^2+|\eta|_p^2)\Big\}, \qquad F\in\mathcal{F}.$$

于是

$$\int_\Omega |\widehat{X(\omega)}(\xi,\eta)|\,|\widehat{Z}_{(\xi,\eta)}|(\mathrm{d}\omega) \le \exp\{|\xi|_p^2+|\eta|_p^2\}\int_\Omega \|X(\omega)\|_p\mu_p(\mathrm{d}\omega).$$

可见复值函数$\widehat{X(\cdot)}(\xi,\eta)$关于复值测度$\widehat{Z}_{\xi\eta}$可积. 利用收敛定理易得

$$\Big[\int_\Omega X(\omega)\diamond Z(\mathrm{d}\omega)\Big]^{\widehat{}}(\xi,\eta) = \mathrm{e}^{-\langle\xi,\eta\rangle}\int_\Omega \widehat{X(\omega)}(\xi,\eta)\widehat{Z}_{(\xi,\eta)}(\mathrm{d}\omega). \qquad \square$$

注记 4 作为向量值的广义算子值函数的Bochner-Wick积分, 没有类似于普通Lebesgue积分的Hölder和Minkowski不等式性质成立.

下面考虑应用.

设$T>0$是一个给定的正数, $l,m\ge 0$为非负整数. 考虑区间$[0,T]$上的广义算子值映射$t\longmapsto \partial_t^{*l}\partial_t^m$, 其中$\partial_t$为Hida微分算子, ∂_t^*为∂_t的对偶.

在量子白噪声理论中, 上述映射称为(l,m)-阶量子白噪声. 令

$$W_{l,m}(F)=\int_F \partial_t^{*l}\partial_t^m\mathrm{d}t, \qquad F\in\mathcal{B}[0,T],$$

其中$\mathcal{B}[0,T]$表示$[0,T]$上的Borel σ-代数. 可以证明, $W_{l,m}$是$([0,T],\mathcal{B}[0,T])$上的一个GOVM. 此外, 还可以证明: 存在$p\ge 0$使得$W_{l,m}$是p-有限变差的, 并且其p-变差满足

$$\|W_{l,m}\|_p(F)=\int_F \|\partial_t^{*l}\partial_t^m\|_p\mathrm{d}t, \qquad F\in\mathcal{B}[0,T].$$

设X是区间$[0,T]$上的一个广义算子值映射, 满足$X\in L([0,T],\mu_p;\mathcal{L}_p)$, 其中$\mu_p=\|W_{l,m}\|_p$. 可以证明

$$\int_{[0,T]} X(t)\diamond W_{l,m}(\mathrm{d}t)=\int_{[0,T]} X(t)\diamond\partial_t^{*l}\partial_t^m\mathrm{d}t.$$

上式右端表示量子白噪声积分[6]. 这说明, 量子白噪声积分可视为我们所提出的Bochner-Wick积分的一个特例.

至此, 已经建立起了Wick-型积分的基本框架. 有关Wick-型积分的Fubini定理的讨论也将是一件非常有意义的事情. 限于篇幅, 仅给出关于广义算子值函数Wick-型积分的Fubini定理的内容及证明的设想, 即有关Bocher-Wick积分的Fubini定理的展望.

对$(\Omega,\mathcal{F})$上有限变差的GOVM Z,Y, 我们设法在$(\Omega^{\otimes 2},\mathcal{F}^{\otimes 2})$上定义一类新的GOVM—Wick-型乘积测度$Z\diamond Y$. 直观上, 对于$A,B\in\mathcal{F}$, 应定义$(Z\diamond Y)(A\times B)=Z(A)\diamond Y(B)$. 然

而Wick-型乘积测度如何从环扩张到最小σ-代数上, 有技术上的困难. 本文设想通过U-泛函方法直接在$(\Omega^{\otimes 2},\mathcal{F}^{\otimes 2})$上定义Wick-型乘积测度, 以回避测度扩张问题.

已经知道$\widehat{Z},\widehat{Y}$是二个实值测度, 并且可以使得μ_p,ν_p也是二个实值测度, 这里$\mu_p=\|Z\|_p$, $\nu_p=\|Y\|_p$. 若令$U(\delta)=(\widehat{Z}\times\widehat{Y})(A\times B)$, 则$U(\delta)$是一个$U$-泛函, 一般地应有

定理 2.10　对$H\in\mathcal{F}^{\otimes 2}$, 则$U(\delta)=(\widehat{Z}\times\widehat{Y})(H)$是一个$U$-泛函.

引理 2.1　设Z是p-变差的GOVM, $H\in\mathcal{F}^{\otimes 2}$, $H(\omega_1)$表示H在ω_1处的截口, 则$H(\omega_1)$是关于Z的p-可测映射.

引理 2.2　设Z,Y都是$(\Omega,\mathcal{F})$上的p-变差的GOVM, $X(\omega_1,\omega_2)$是$\Omega^{\otimes 2}\to\mathcal{L}[(E),(E)^*]$二元$p$-可测映射, 即存在$p$-简单的广义算子值映射$X_n(\omega_1,\omega_2)$, $n\geq 1$, 使得

$$\|X_n(\omega_1,\omega_2)-X_n(\omega_1,\omega_2)\|_p\to 0\quad (n\to 0),\qquad \mu_p\times\nu_p-\text{a.s.}.$$

则对μ_p a.s $-\,\omega_1$, $X(\omega_1,\cdot)$关于ν_p可测的, 对ν_p a.s $-\,\omega_2$, $X(\omega_2,\cdot)$关于μ_p强可测的.

定理 2.11　$Z,Y,X(\omega_1,\omega_2)$同引理2.2, 若

$$\int\|X(\omega_1,\omega_2)\|_p\mathrm{d}\mu_p\times\nu_p<+\infty,$$

则　(1) $X(\omega_1,\omega_2)$关于$\mu_p\times\nu_p$ Bochner-Wick可积.

(2) $X(\cdot,\omega_2),X(\omega_1,\cdot)$分别关于$Z,Y$ p-可测且Bochner-Wick可积.

(3) $H(\omega_2)=\displaystyle\int X(\cdot,\omega_2)\diamond\mathrm{d}Z$, $K(\omega_1)=\displaystyle\int X(\omega_1,\cdot)\diamond\mathrm{d}Y$分别关于$Z,Y$ p-可测且Bochner-Wick可积.

(4) 下面等式成立

$$\int X(\omega_1,\omega_2)\diamond\mathrm{d}(Z\diamond Y)=\int\Big(\int X(\omega_1,\omega_2)\diamond\mathrm{d}Z\Big)\diamond\mathrm{d}Y=\int\Big(\int X(\omega_1,\omega_2)\diamond\mathrm{d}Y\Big)\diamond\mathrm{d}Z.$$

参 考 文 献

[1] Obata, N, Wick product of white noise operators and its application to quantum stochastic differential equations, *RIMS Kokyuroku*, **957**(1996), 167–185.

[2] Chung, D.M., Chung, T.S. and Ji, U.C., A characterization theorem for operators on white noise functionals, *Journal of the Mathematical Society of Japan*, **51(2)**(1999), 437–447.

[3] 宁克标, 白噪声分析中的Bochner-Wick积分, *应用概率统计*, **12(3)**, 1996, 239–246.

[4] Wang, C.S., Delta functions of observables and Radon - Nikodym derivatives of spectral measures, *Infinite Dimensional Analysis, Quantum Probability and Related Topics*, **12(3)**(2009), 427–437.

[5] Han, Q., Wang, C.S. and Zhou, Y.L., Convolution of functionals of discrete-time normal martingales, *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, **86(2)**(2012), 224–231.

[6] 黄志远, 王才士, 让光林, *量子白噪声分析*, 湖北科学技术出版社, 2004.

[7] Huang, Z.Y. and Yan, J.A., *Introduction to Infinite Dimensional Stochastic Analysis*, Dordrecht: Kluwer Academic, 1999.

[8] Huang, Z.Y. and Luo, L.S., Wick calculus of generalized operators and its applications to quantum stochastic calculus, *Infinite Dimensional Analysis, Quantum Probability and Related Topics*, **1(3)**(1998), 455–466.

[9] Huang, Z.Y., Quantum white noises — white noise approach to quantum stochastic calculus, *Nagoya Mathematical Journal*, **129**(1993), 23–42.

[10] Kuo, H.H., *White Noise Distribution Theory*, CRC Press, 1996.

[11] 王才士, 陈金淑, 屈明双, B-值白噪声广义泛函的解析刻画, 数学物理学报, **27A(2)**(2007), 322–330.

Bochner-Wick Integrals of Generalized Operator Valued Function in White Noise Analysis

Han Qi Wang Caishi Cheng Dan

(*College of Mathematics and Statistics Science, Northwest Normal University, Lanzhou, 730070*)

Generalized operators of white noise play a very important role in the theory and application of white noise analysis. In the present thesis, we mainly discuss the integration of generalized operator-valued functions with respect to generalized operator-valued measures and related topics. The main work is as follows: First, a notion of generalized operator-valued measures is introduced, and variations of such a measure are investigated in the sense of symbol and operator p-norm, respectively. Secondly, an integral, called Bochner-Wick integral, of a generalized operator valued function with respect to a generalized operator valued measure is defined. Properties of the integral are examined and corresponding convergence theorems are established. Finally, the Fubini theorem for the integral is discussed and applications are shown.

Keywords: White noise space, generalized operator valued measure, symbol, Bochner-Wick integral.

AMS Subject Classification: 60F05.