应用概率统计 第三十卷
第三期 2014年6月

Chinese Journal of Applied Probability
and Statistics Vol.30 No.3 Jun. 2014

关于两两NQD随机序列的一个极限定理 *

穆 燕 汪忠志
(安徽工业大学数理学院, 马鞍山, 243002)

摘 要

设$(\xi_n)_{n\in\mathbf{N}}$为两两NQD随机序列, 且$\mathsf{E}|\xi_1|=\infty$, $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$是一列严格单调递增的凸序列. 本文将Feller (1946)关于独立同分布期望不存在随机序列的极限定理推广到两两NQD随机序列的情形.

关键词: 两两NQD随机序列, Borel-Cantelli引理, 强极限定理.

学科分类号: O211.4.

§1. 引 言

定义 1.1 称r.v.序列$(\xi_n)_{n\in\mathbf{N}}$为两两NQD (Pariwise Negatively Quadrant Dependent, NQD)的, 若对任意$i\neq j$均有

$$\mathsf{P}(\xi_i>s,\xi_j>t)-\mathsf{P}(\xi_i>s)\mathsf{P}(\xi_j>t)\leq 0,\qquad s,t\in R. \tag{1.1}$$

两两NQD序列是包含两两独立在内的非常广泛的一类随机序列, 许多负相关的概念都是在此基础上繁衍出来的, 著名的NA列[2]就是其特例之一. 因此对于两两NQD序列的研究就显得更为基本, 同时更加困难. 到目前为止, 已有大量文献讨论了两两NQD序列的极限性质, 其中包括Matula (1992)获得了同分布的两两NQD列的Kolmogorov型强大数定律; 王岳宝, 苏淳和刘许国(1998)在附加了某种混合条件后获得了同分布的两两NQD序列的Marcinkiwicz-Zygmund强大数定律和Baum-Katz完全收敛性定理; 甘师信和陈平炎(2008)讨论了两两NQD序列的强稳定性; 吴群英(2002)则讨论了两两NQD列的三级数定理, Kolmogorov-Chung型强大数定律, 获得了与独立场合一致的Baum-Katz完全收敛性定理. 但他们均是在假设随机变量数学期望存在的前提下研究NQD随机序列的极限性质, 本文我们讨论期望不存在时NQD随机序列的强极限性质, 将Feller在文献[1]中关于独立同分布期望不存在随机序列的强极限定理推广到两两NQD情形.

记$\mathbf{N}=\{0,1,2,\ldots\}$, $\mathbf{N}_+=\{1,2,3,\ldots\}$.

定义 1.2 称r.v.序列$(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$为凸序列, 若对任意$\forall n\in\mathbf{N}_+$均有$a_{n+1}-a_n\geq a_n-a_{n-1}$.

*国家自然科学基金(11071104)、安徽省自然科学基金(1408085MA04, 1308085QF113)和安徽工业大学研究生创新基金(D2011025)资助.

本文2013年7月18日收到, 2014年1月6日收到修改稿.

doi: 10.3969/j.issn.1001-4268.2014.03.006

§2. 主要结论

在给出主要结果及其证明之前, 我们先给出下面的引理:

引理 2.1 (见[7]) 设$(A_n)_{n\in\mathbf{N}_+}$为一列随机事件, 若$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\mathsf{P}(A_n)=\infty$, 则

$$\mathsf{P}(A_n,\text{i.o.})\geq\limsup_{n}\frac{\Big(\sum\limits_{i=1}^{n}\mathsf{P}(A_i)\Big)^2}{\sum\limits_{i,j=1}^{n}\mathsf{P}(A_i\cap A_j)}.$$

引理 2.2 (见[8]) 设ξ是非负随机变量, 则

$$\sum_{n=1}^{\infty}\mathsf{P}(\xi\geq n)\leq\mathsf{E}\xi\leq 1+\sum_{n=1}^{\infty}\mathsf{P}(\xi\geq n).$$

引理 2.3 (见[4]) 若$\{\xi_n\}_{n\in\mathbf{N}_+}$是两两NQD随机序列, $f(\cdot)$是单调函数($\nearrow$或$\searrow$), 则$\{f(\xi_n)\}_{n\in\mathbf{N}_+}$也是两两NQD随机变量序列.

引理 2.4 (见[3]) 设$\{\xi_n\}_{n\in\mathbf{N}_+}$为同分布两两NQD随机序列, 若$\mathsf{E}|\xi_1|<\infty$, 则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\xi_1+\cdots+\xi_n}{n}=\mathsf{E}\xi_1,\qquad\text{a.s.}.$$

下面给出本文的主要结果及其证明.

定理 2.1 设$(\xi_n)_{n\in\mathbf{N}}$是同分布两两NQD随机序列, $\mathsf{E}|\xi_1|=\infty$, $S_n=\sum\limits_{i=1}^{n}\xi_i$, $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$是一列严格递增的凸序列且首项$a_0=0$. 则

(1) 若$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\mathsf{P}(|\xi_n|>a_n)=\infty$, 则$\mathsf{P}(|S_n|>a_n,\text{i.o.})=1$.

(2) 若$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\mathsf{P}(|\xi_n|>a_n)<\infty$, 则$\mathsf{P}(|S_n|>a_n,\text{i.o.})=0$.

证明: (1) $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$是一列严格递增的凸序列且$a_0=0$, 易知$\{a_n/n\}_{n\in\mathbf{N}_+}$从某项$m$开始是非降的且趋向于$+\infty$.

假设上述结论不成立, 则$\exists\, c>0$, 使得对$\forall\, n\in\mathbf{N}$, 有$a_n\leq cn$. 由此有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\mathsf{P}(|\xi_1|>cn)\leq\sum_{n=1}^{\infty}\mathsf{P}(|\xi_1|>a_n)<\infty.$$

由引理2.2易知

$$\frac{\mathsf{E}|\xi_1|}{c}<\infty.$$

与$\mathsf{E}|\xi_1|=\infty$矛盾! 从而可知$\exists\, N>0$, 当$n>N$时, 有$a_{2n}>2n>n$.

由$\mathsf{E}|\xi_1|=\infty$ ($\mathsf{E}|\xi_1|$有意义, 当且仅当$\mathsf{E}\xi_1^+=\infty$, $\mathsf{E}\xi_1^-<\infty$或$\mathsf{E}\xi_1^+<\infty$, $\mathsf{E}\xi_1^-=\infty$), 不妨设$\mathsf{E}\xi_1^+=\infty$, $\mathsf{E}\xi_1^-<\infty$, 则由引理2.2知

$$\sum_{n=1}^{\infty}\mathsf{P}(\xi_1^-\geq n)<\infty.$$

于是

$$\sum_{n=1}^{\infty}\mathsf{P}(\xi_1^- \geq a_{2n}) < N + \sum_{n=N+1}^{\infty}\mathsf{P}(\xi_1^- \geq a_{2n}) < N + \sum_{n=N+1}^{\infty}\mathsf{P}(\xi_1^- \geq n) < \infty. \tag{2.1}$$

由于$(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$是严格递增的, 则对于$\forall\, n\in\mathbf{N}$, 有$a_{2n-1}<a_{2n}<a_{2n+1}$, 且$(\xi_n)_{n\in\mathbf{N}}$是同分布的, 于是

$$\sum_{n=1}^{\infty}\mathsf{P}(|\xi_{2n+1}|>a_{2n+1}) \leq \sum_{n=1}^{\infty}\mathsf{P}(|\xi_{2n}|>a_{2n}) \leq \sum_{n=1}^{\infty}\mathsf{P}(|\xi_{2n-1}|>a_{2n-1}).$$

显然$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\mathsf{P}(|\xi_{2n}|>a_{2n})$和$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\mathsf{P}(|\xi_{2n-1}|>a_{2n-1})$具有相同的敛散性, 又由于$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\mathsf{P}(|\xi_n|>a_n)=\infty$, 所以

$$\sum_{n=1}^{\infty}\mathsf{P}(|\xi_{2n}|>a_{2n})=\infty.$$

注意到$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\mathsf{P}(|\xi_n|>a_{2n})=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\mathsf{P}(|\xi_{2n}|>a_{2n})=\infty$ ($(\xi_n)_{n\in\mathbf{N}}$是同分布的)以及$\{|\xi_n|>a_{2n}\}\subseteq\{\xi_n^+>a_{2n}\}\cup\{\xi_n^->a_{2n}\}$, 则

$$\infty=\sum_{n=1}^{\infty}\mathsf{P}(|\xi_n|>a_{2n}) \leq \sum_{n=1}^{\infty}\mathsf{P}(\xi_n^+>a_{2n})+\sum_{n=1}^{\infty}\mathsf{P}(\xi_n^->a_{2n}). \tag{2.2}$$

由(2.1)和(2.2)式, 得$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\mathsf{P}(\xi_n^+>a_{2n})=\infty$. 由引理2.3知$(\xi_n^+)_{n\in\mathbf{N}}$仍是两两NQD随机序列. 令$A_n=(\xi_n^+>a_{2n})$, 由引理2.1, 有

$$\begin{aligned}
\mathsf{P}(A_n,\mathrm{i.o.}) &\geq \limsup_{n\to\infty}\frac{\Big(\sum\limits_{i=1}^{n}\mathsf{P}(A_i)\Big)^2}{\sum\limits_{i,j=1}^{n}\mathsf{P}(A_i\cap A_j)} \\
&\geq \limsup_{n\to\infty}\frac{\Big(\sum\limits_{i=1}^{n}\mathsf{P}(A_i)\Big)^2}{\sum\limits_{i=1}^{n}\mathsf{P}(A_i)+\sum\limits_{i\neq j,i,j=1}^{n}\mathsf{P}(A_i)P(A_j)} \\
&= \limsup_{n\to\infty}\frac{\Big(\sum\limits_{i=1}^{n}\mathsf{P}(A_i)\Big)^2}{\Big(\sum\limits_{i=1}^{n}\mathsf{P}(A_i)\Big)^2+\sum\limits_{i=1}^{n}\mathsf{P}(A_i)(1-\mathsf{P}(A_i))} \\
&\geq \limsup_{n\to\infty}\frac{\Big(\sum\limits_{i=1}^{n}\mathsf{P}(A_i)\Big)^2}{\Big(\sum\limits_{i=1}^{n}\mathsf{P}(A_i)\Big)^2+\sum\limits_{i=1}^{n}\mathsf{P}(A_i)}=1.
\end{aligned}$$

即得$\mathsf{P}(\xi_n^+>a_{2n},\mathrm{i.o.})=1$, 由此可知$\mathsf{P}(|\xi_n|>a_{2n},\mathrm{i.o.})=1$, 注意到$a_{2n}\geq 2a_n$, 于是

$$\mathsf{P}(|S_n-S_{n-1}|>2a_n,\mathrm{i.o.})=1 \implies \mathsf{P}(|S_n|+|S_{n-1}|>2a_n,\mathrm{i.o.})=1.$$

故$\mathsf{P}(|S_n| > a_n, \text{i.o.}) = 1$ (详细证明见附录1).

(2) 取$r \geq m$, 令

$$c_n = \begin{cases} (n/r)a_r, & \text{如果}\, n = 0, 1, \ldots, r; \\ a_n, & \text{如果}\, n = r+1, r+2, \ldots, \end{cases}$$

则$\{c_n\}_{n\in\mathbf{N}}$也是严格递增的凸序列. 再令

$$B(x) = (c_{n+1} - c_n)(x - n) + c_n, \qquad x \in [n, n+1),\ \ n = 0, 1, 2, \ldots.$$

注意到, $B'(x) = c_{n+1} - c_n$, $x \in [n, n+1)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, 易知$B'(x)$关于x是非降函数, 从而得到$B(x)$为严格递增的凸函数.

记$\eta_n = B^{-1}(|\xi_n|/2)$, $T_n = \eta_1 + \eta_2 + \cdots + \eta_n$, $\overline{S}_n = |\xi_1| + |\xi_2| + \cdots + |\xi_n|$, $n \in \mathbf{N}$, 又

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\mathsf{P}(a_n < \xi_1^+ \leq a_{n+1}) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mathsf{P}(\xi_n^+ > a_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mathsf{P}(|\xi_n| > a_n) < \infty,$$

同理,

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\mathsf{P}(a_n < \xi_1^- \leq a_{n+1}) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mathsf{P}(\xi_n^- > a_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mathsf{P}(|\xi_n| > a_n) < \infty.$$

由$\{a_n/n\}_{n\in\mathbf{N}_+}$是某项$m$开始递增到无穷的, 则

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{a_n} = 0.$$

选取适当的q和r且$q \leq r$, 使得

$$\sum_{n=q}^{\infty} (n+1)[\mathsf{P}(a_n < \xi_1^+ \leq a_{n+1}) + P(a_n < \xi_1^- \leq a_{n+1})] < \frac{1}{6},$$
$$\frac{r}{a_r}\Big[\int_0^{a_q} x\mathrm{d}\mathsf{P}(\xi_1^+ \leq x) + \int_0^{a_q} x\mathrm{d}\mathsf{P}(\xi_1^- \leq x)\Big] < \frac{1}{4}.$$

由$B(x)$是严格单调递增的凸函数, 易知$B^{-1}(x)$是严格单调递增的凹函数, 我们知

$$B^{-1}\Big(\frac{x+y}{2}\Big) \leq \max\{B^{-1}(x), B^{-1}(y)\} \leq B^{-1}(x) + B^{-1}(y).$$

所以

$$\begin{aligned} \frac{T_n}{n} &= \frac{B^{-1}(|\xi_1|/2) + B^{-1}(|\xi_2|/2) + \cdots + B^{-1}(|\xi_n|/2)}{n} \\ &\leq \frac{B^{-1}(\xi_1^+) + B^{-1}(\xi_2^+) + \cdots + B^{-1}(\xi_n^+) + B^{-1}(\xi_1^-) + B^{-1}(\xi_2^-) + \cdots + B^{-1}(\xi_n^-)}{n}. \quad (2.3) \end{aligned}$$

注意到

$$
\begin{aligned}
& \mathsf{E}B^{-1}(\xi_1^+)+\mathsf{E}B^{-1}(\xi_1^-) \\
= & \int_0^\infty B^{-1}(x)\mathrm{d}\mathsf{P}(\xi_1^+\le x)+\int_0^\infty B^{-1}(x)\mathrm{d}\mathsf{P}(\xi_1^-\le x) \\
= & \int_0^{c_r} B^{-1}(x)\mathrm{d}\mathsf{P}(\xi_1^+\le x)+\int_{c_r}^\infty B^{-1}(x)\mathrm{d}\mathsf{P}(\xi_1^+\le x) \\
& +\int_0^{c_r} B^{-1}(x)\mathrm{d}\mathsf{P}(\xi_1^-\le x)+\int_{c_r}^\infty B^{-1}(x)\mathrm{d}\mathsf{P}(\xi_1^-\le x) \\
= & \frac{r}{a_r}\Big(\int_0^{a_r} x\mathrm{d}\mathsf{P}(\xi_1^+\le x)+\int_0^{a_r} x\mathrm{d}\mathsf{P}(\xi_1^-\le x)\Big) \\
& +\sum_{n=r}^\infty\Big(\int_{c_n}^{c_{n+1}} B^{-1}(x)\mathrm{d}\mathsf{P}(\xi_1^+\le x)+\int_{c_n}^{c_{n+1}} B^{-1}(x)\mathrm{d}\mathsf{P}(\xi_1^-\le x)\Big) \\
\le & \frac{r}{a_r}\Big(\int_0^{a_q} x\mathrm{d}\mathsf{P}(\xi_1^+\le x)+\int_0^{a_q} x\mathrm{d}\mathsf{P}(\xi_1^-\le x)\Big) \\
& +\frac{r}{a_r}\sum_{n=q+1}^{r-1}\Big(\int_{a_n}^{a_{n+1}} x\mathrm{d}\mathsf{P}(\xi_1^+\le x)+\int_{a_n}^{a_{n+1}} x\mathrm{d}\mathsf{P}(\xi_1^-\le x)\Big) \\
& +\sum_{n=r}^\infty B^{-1}((c_{n+1})\mathsf{P}(c_n<\xi_1^+\le c_{n+1})+\mathsf{P}(c_n<\xi_1^-\le c_{n+1})) \\
\le & \frac{1}{4}+\frac{r}{a_r}\sum_{n=q+1}^{r-1}(n+1)\frac{a_{n+1}}{n+1}(\mathsf{P}(a_n<\xi_1^+\le a_{n+1})+\mathsf{P}(a_n<\xi_1^-\le a_{n+1})) \\
& +\sum_{n=r}^\infty(n+1)(\mathsf{P}(a_n<\xi_1^+\le a_{n+1})+\mathsf{P}(a_n<\xi_1^-\le a_{n+1})) \\
\le & \frac{1}{4}+\frac{1}{6}=\frac{5}{12}, \qquad \text{a.s.}\ (\text{当}\ n\to\infty).
\end{aligned} \tag{2.4}
$$

一般来说, $\{\eta_n\}_{n\in\mathbf{N}_+}$不再是两两NQD随机序列, 注意到$B(x)$是严格递增的且$\{\xi_n^+\}_{n\in\mathbf{N}_+}$与$\{\xi_n^-\}_{n\in\mathbf{N}_+}$都是两两NQD的, 由引理2.3知$\{B^{-1}(\xi_n^+)\}_{n\in\mathbf{N}_+}$和$\{B^{-1}(\xi_1^-)\}_{n\in\mathbf{N}_+}$仍然是两两NQD随机序列. 由(2.4)式可知$B^{-1}(\xi_n^+)$, $(n\in\mathbf{N}_+)$与$B^{-1}(\xi_1^-)$, $(n\in\mathbf{N}_+)$的期望都存在, 从而$\mathsf{E}B^{-1}(|\xi_1|/2)$存在. 由引理2.4关于两两同分布NQD随机序列的强大数定律, 知

$$
\mathsf{P}\Big(\lim_n\frac{B^{-1}(\xi_1^+)+B^{-1}(\xi_2^+)+\cdots+B^{-1}(\xi_n^+)}{n}=\mathsf{E}B^{-1}(\xi_1^+)\Big)=1 \tag{2.5}
$$

以及

$$
\mathsf{P}\Big(\lim_n\frac{B^{-1}(\xi_1^-)+B^{-1}(\xi_2^-)+\cdots+B^{-1}(\xi_n^-)}{n}=\mathsf{E}B^{-1}(\xi_1^-)\Big)=1. \tag{2.6}
$$

由(2.3)、(2.4)、(2.5)和(2.6)式, 可得

$$
\mathsf{P}\Big(\lim_n\frac{T_n}{n}\le\frac{5}{12}\Big)=1. \tag{2.7}
$$

即, 当$n\to\infty$时, $T_n\le(5/12)n$, a.s..

由于$B(x)$是严格递增的凸函数, 我们知对$\forall n\in\mathbf{N}$, $x_n\ge 0$, 有$B(x_1+x_2+\cdots+x_n)\ge B(x_1)+B(x_2)+\cdots+B(x_n)$ (具体证明见附录2). 故$\exists N\in\mathbf{N}$, 当$n>\max\{N,r,6\}$时, 由(2.7)式知

$$|S_n|\le\overline{S}_n=2(B(\eta_1)+B(\eta_2)+\cdots+B(\eta_n))\le 2B(T_n)\le 2B\Big(\frac{5n}{12}\Big),\qquad \text{a.s..}$$

当n为偶数时, 若$n/2>r$, 则

$$2B\Big(\frac{5n}{12}\Big)\le 2B\Big(\frac{n}{2}\Big)=2a_{n/2}\le a_n;$$

若$n/2\le r$, 则

$$2B\Big(\frac{5n}{12}\Big)\le 2B\Big(\frac{n}{2}\Big)=n\Big(\frac{a_r}{r}\Big)\le a_n.$$

当n为奇数时, $n-1$为偶数, 则

$$2B\Big(\frac{5n}{12}\Big)\le 2B\Big(\frac{n-1}{2}\Big)\le a_{n-1}<a_n$$

(这就是为什么我们要求$n>6$). 则$|S_n|\le a_n$, a.s..

从而得$\mathsf{P}(|S_n|>a_n,\text{i.o.})=0$. □

附　录

1. 证明若$(|S_n|+|S_{n-1}|>2a_n,\text{i.o.})=1$, 则$\mathsf{P}(|S_n|>a_n,\text{i.o.})=1$.

证明: 当$|S_n|\ge|S_{n-1}|$时, 则$\mathsf{P}(|S_n|>a_n,\text{i.o.})=1$; 当$|S_n|<|S_{n-1}|$时, 则$\mathsf{P}(|S_{n-1}|>a_n,\text{i.o.})=1$. 又$a_n\ge a_{n-1}$, 故$\mathsf{P}(|S_{n-1}|>a_{n-1},\text{i.o.})=1$.

综上得证$\mathsf{P}(|S_n|>a_n,\text{i.o.})=1$. □

2. 对$\forall x_n\ge 0$, 有$B(x_1+x_2+\cdots+x_n)\ge B(x_1)+B(x_2)+\cdots+B(x_n)$, 其中$B(0)=0$.

证明: 对任意固定的非负实数y, 令$f(x)=B(x+y)-B(x)$, $x\ge 0$, 则$f'(x)=B'(x+y)-B'(x)$, 由$B(x)$严格递增的凸函数知$f'(x)\ge 0$, 则$f(x)$非降, 从而$f(x)\ge f(0)$, 又$B(0)=0$, 故$B(x+y)\ge B(x)+B(y)$, 利用数学归纳法, 易知结论成立. □

参 考 文 献

[1] Feller, W., A limit theorem for random variables with infinite moments, *American Journal of Mathematics*, **68(2)**(1946), 257–262.

[2] Joag-Dev, K. and Proschan, F., Negative association of random variables with applications, *The Annals of Statistics*, **11(1)**(1983), 286–295.

[3] Matula, P., A note on the almost sure convergence of sums of negatively dependent random variables, *Statistics & Probability Letters*, **15(3)**(1992), 209–213.

[4] 王岳宝, 苏淳, 刘许国, 关于两两NQD列的若干极限性质, *应用数学学报*, **21(3)**(1998), 404–414.

[5] 甘师信, 陈平炎, 两两NQD列的强稳定性, *数学物理学报*, **28A(4)**(2008), 612–618.

[6] 吴群英, 两两NQD列的收敛性质, *数学学报*, **45(3)**(2002), 617–624.

[7] Yan, J.A., A simple proof of two generalized Borel-Cantelli lemmas, in *In Memoriam Paul-André Meyer — Séminaire de Probabilités XXXIX* (Editors: Émery, M. and Yor, M.), *Lecture Notes in Mathematics, Vol. 1874*, 77–79, Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2006.

[8] 林正炎, 陆传荣, 苏中根, *概率极限理论基础*, 高等教育出版社, 2006.

A Limit Theorem for Pairwise NQD Random Sequence

Mu Yan Wang Zhongzhi

(*School of Mathematics & Physics, Anhui University of Technology, Ma'anshan, 243002*)

Let $(\xi_n)_{n\in\mathbf{N}}$ be a sequence of pairwise negatively quadrant dependent random variables with $\mathsf{E}|\xi_1|=\infty$ and let $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ be a sequence of strictly increasing convex numbers. In this paper, the Feller (1946)'s work on independent identically distributed variables with infinite expectation is extended to the case of pairwise negative quadrant dependence random variables.

Keywords: Pairwise NQD random variables, Borel-Cantelli lemma, strong limit theorem.

AMS Subject Classification: 60F15.