应用概率统计 第三十卷
第三期 2014年6月

Chinese Journal of Applied Probability
and Statistics Vol.30 No.3 Jun. 2014

模型不确定和极端事件冲击下带通胀的最优投资组合选择问题研究 *

费为银 夏登峰 刘 鹏
(安徽工程大学金融工程系, 芜湖, 241000)

摘 要

本文研究了投资者在极端事件冲击下带通胀的最优投资组合选择问题, 其中投资者不仅对损失风险是厌恶的而且对模型不确定也是厌恶的. 投资者在风险资产和无风险资产中进行投资. 首先, 利用Itô公式推导考虑通胀的消费篮子价格动力学方程, 其次由通胀折现的终端财富预期效用最大化, 对含糊厌恶投资者的最优期望效用进行刻画. 利用动态规划原理, 建立最优消费和投资策略所满足的HJB方程. 再次, 利用市场分解的方法解出HJB方程, 获得投资者最优消费和投资策略的显式解. 最后, 通过数值模拟, 分析了含糊厌恶、风险厌恶、跳和通胀因素对投资者最优资产配置策略的影响.

关键词: 跳扩散过程, 含糊厌恶, 通胀, 投资组合, HJB方程, 模型不确定.

学科分类号: O211.63, F224.11.

§1. 引 言

关于最优投资组合选择问题的研究一直伴随着金融市场的发展, 在针对股票、利率资产和汇率资产等金融资产价格变化过程研究的初期, 大多数文献都假定资产价格变化由布朗运动驱动的随机微分方程来刻画, Merton (1969, 1971)和Samuelson (1969)首先提出用连续时间模型来研究动态投资组合选择问题是有代表性的. 他们在连续时间条件下分别构造了不同的最优消费投资决策模型. 由于上述描述的资产价格过程是连续变化的, 所以不能反映资产价格受到极端事件冲击下的跳行为. Bakshi等(1997)提到广泛的实证研究显示股票回报具有随机波动性和跳. 但单独的随机波动模型和跳模型在实证解释方面都存在一定的局限性, 只有将随机波动和跳跃行为结合起来才能很好的反应市场波动的连续性和间断跳跃性双重特征.

通过对跳的引入, 获得股票回报分布的 "偏峰" 和 "厚尾" 的特点. 如Bardhan和Chao (1996)发现了如果在一个基础资产交易的模型中存在不可料的跳, 那么模型是不完备的. 因此, 不可料的跳是不可通过基础资产对冲的. 许多实证和理论研究发现跳风险在投资组合选择, 风险管理和期权定价上有很大的影响. 例如, 最近在研究投资组合选择的文章中显

*国家自然科学基金(71171003, 71271003)、安徽省自然科学基金(10040606003)和安徽省高校自然科学基金(KJ2012B019, KJ2013B023)资助.

本文2013年12月12日收到.

doi: 10.3969/j.issn.1001-4268.2014.03.010

示: 从那些缺乏跳和忽略跳可能造成大量经济损失的行为中可以看出, 持有最优投资组合的投资者面对跳风险时, 他们的决策有很大的差异. 在通过Duffie等(2000)和Liu等(2003)提出的双跳模型发现投资者宁愿用一个标准的扩散模型也不愿承担一个杠杆或空头头寸. 他们的直觉认为资产价格路径因为跳而变得不连续了, 和纯扩散模型是不同的. 当跳产生后, 投资者的财富会从目前的值显著的改变, 这个改变不能在跳产生之前通过连续调整投资组合来对冲. 因此, 投资者使用一个大的杠杆或空头头寸可能会导致其财富减少. 他们同样证明了即使跳所产生的几率是很小的, 但是投资者也会大量减少在股票市场上的投资. 因为在单股票模型中股票没有多元化能力, 投资组合的扩散暴露与跳暴露是成比例的. 因此, 减少跳暴露将导致减少扩散暴露. 结果, 投资者将会避开投资大量不可预料的资产.

研究者在传统的投资策略模型中考虑含糊(Knight不确定)厌恶因素对投资模型带来的影响, 使得模型的建立更为贴合实际. Gilboa和Schmeidler (1989)最初提出的论述是由最大最小期望效用刻画的静态模型. 由Knight (1921)可知, 投资者在进行投资决策时, 面临两种不确定, 第一种被称作风险, 第二种被称为Knight不确定或者含糊. Chen和Epstein (2002)建立了多先验效用的连续时间跨期模型, 并对风险溢价和含糊溢价进行了阐述, 由于其模型仅考虑最坏情形下的决策问题, 对含糊的态度是极端否定的, 但在现实生活中, 不是所有的决策者都是完全的悲观主义者, 这使得其所建模型在一定程度上忽视了含糊所带来的积极影响.

近年来, 在动态资产配置中结合含糊厌恶的两种方法都得到了发展. 第一种是众所周知的多先验方法, 第二种是稳健性方法. 两种方法都已经用在经济和金融中建立模型不确定. Liu等(2005)采用第一种方法研究了资产定价中关于跳的不精确信息的含义. Maenhout (2004)提到对一个动态资产分配模型应用第二种方法, 一个投资者把他的财富分成两份, 一份股票, 一份无风险债券. 这个模型不确定是由预期回报或股票回报的一阶矩的不精确估计引起的. 他通过研究模型不确定在动态投资组合规则上的效果发现, 投资者的风险厌恶稳健性的增加会减少其在股票上的头寸. 在极端情形下, 投资者将对预期回报没有信心, 他将不会持有股票, 或不会参与到股票市场中来. Jin和Zhang (2011)在已有的研究基础上, 对跳扩散框架进行了推广, 确定了投资者的最优跳风险暴露及其在扩散风险暴露上影响.

国内外许多学者对通胀与最优投资组合选择的关系也有所关注. Gallagher和Taylor (2002)刻画了一个理论模型, 描述了Fama对于“代理人假设”解释的含义, 利用一个多变量的更新分解, 确认了美国过去四十年股票–通胀之谜的“代理人假设”解释. Munk等(2004)提供了一个幂效用的最优投资组合策略, 使得投资者能够在无风险债券和股票中进行投资, 该模型展示了均值–回复股票收益和实际利率的不确定性, 并利用美国股票、债券和通胀的相关数据对模型进行了校验. Fama和Schwert (1977)估计了1953–1971年期间不同的资产对冲预期和非预期通胀的程度, 他们发现美国政府债券和票据能够完全对冲预期通胀, 并且私人住宅的实际房产能够完全对冲预期和非预期通胀, 劳动力收入对预期和非预期通胀显示出很小的短期相关性, 然而最异常的结果是股票收益与预期通胀率是负相关的, 并且也可能负相关于非预期通胀率. Hondroyiannis和Papapetrou (2006)选择股票、汇率、房地产价格以及其他影响通货膨胀的因素, 运用ARDL模型对我国资产价格和通货膨胀的关系

进行实证分析. 结果表明各因素对通货膨胀的影响差异较大, 房地产价格和汇率两个指标作用显著, 股票作用较弱. Bensoussan等(2009)研究了投资者在消费和终端财富以随机通胀折现的前提下最大化投资者预期效用的最优消费和投资组合问题. Fei (2013)在带有马尔科夫机制和通胀的金融市场下给出通胀环境下的预期消费贴现效用最大化问题, 并通过马尔科夫机制转换过程的广义Itô公式推导最优策略的判定定理, 给出了最优消费和投资组合策略. Brennan和Xia (2002)采用等价鞅方法, 研究了通胀因素下投资者的最优资产配置问题. 部慧和汪寿阳(2010)认为通货膨胀风险很难规避, 因而提出构建和设计能对冲通胀风险的金融产品的思路. 对商品期货和各行业股票对冲通胀风险性质的研究结果显示, 商品期货可以对冲通货膨胀风险尤其是未预期通货膨胀风险, 但是行业股票不具备这种性质. 刘金全和王风云(2004)通过研究股票实际收益率与通货膨胀波动性之间的关系, 可以判断股票市场波动和宏观经济运行之间的联系. 他们发现通货膨胀率的波动能够影响股票实际收益率的变化, 这说明价格水平变化不仅影响消费品之间的替代, 也影响投资品之间的替代. 因此, 通过积极货币政策缓解通货紧缩压力, 可以增强股票市场的规模活性并形成收益率上升的稳定预期. 费为银和李淑娟(2012)研究了Knight不确定下带通胀的最优消费和投资模型. 吕会影等(2012)研究了投资者在通胀环境下基于随机微分效用的最优消费和投资问题, 采用随机微分效用函数刻画投资者的偏好, 并利用动态规划原理, 建立相应的HJB方程, 推导最优消费和投资策略. 费为银等(2012)在资产价格带跳环境下, 研究了通胀因素和跳对投资者资产配置的影响. Fei (2012)研究了含糊下的最优闲暇消费及投资组合等问题. 以上研究结果都为跳扩散、模型不确定环境下带通胀的投资组合模型的研究提供了理论方法的借鉴. 从上面综述表明, 投资者在模型不确定和极端事件冲击下带通胀的最优投资组合选择问题方面作出研究的还未出现.

本文基于现有研究, 在模型中引入投资者的中期消费及通胀因素, 在跳扩散及模型不确定厌恶环境下, 应用随机控制方法寻找投资者所采取的最优投资组合策略并探索通胀、跳扩散过程及投资者的含糊厌恶程度对投资者投资决策的影响, 具有一定的理论价值和经济意义.

文章的安排如下, 第2节对模型框架及结果进行了描述, 并结合含糊厌恶构建了模型的框架, 利用随机分析得到最优资产配置策略的近似表达式. 第3节进行数值分析, 并给出经济学解释. 总结放在第4节.

§2. 模型框架及结果

本节刻画了一个在连续时间经济状态下, 不完备金融市场下的模型, 其中资产价格服从$[0,T]$上多维跳扩散过程. 设$(\Omega,\mathcal{F},\mathsf{P})$是一个完备的概率空间, 其中$\Omega$是元素$\omega$的一族自然状态, $\mathcal{F}$是可观察事件的σ-代数, P是在$(\Omega,\mathcal{F})$上的概率测度. 产生经济状态的不确定主要是在概率空间$(\Omega,\mathcal{F},\mathsf{P})$上的$d$-维标准布朗运$B^S(t)=(B_1^S(t),\ldots,B_d^S(t))^\top$, 一维标准布朗运动$B^L(t)$和$(n-d)$-维的多元泊松过程$N(t)=(N_1(t),\ldots,N_{n-d}(t))^\top$, 其中$N_k(t)$表示在时间为$t$时第$k$类跳的数量, $B^L(t)$构建了通胀的不确定性. 由于通货膨胀和风险资产价

格是相关的, 故可设$B^S(t)$和$B^L(t)$是相关的, 并且有$d\times 1$的相关矩阵ρ. 在经济状态中通过自然域流给定信息流, 即右连续的和增广域流: $\mathbf{F}=\{\mathcal{F}_t=\mathcal{F}_t^S\vee\mathcal{F}_t^L\vee\mathcal{F}_t^N, t\in[0,T]\}$, 其中$\mathcal{F}_t^S=\sigma(B^S(s);0\le s\le t)$, $\mathcal{F}_t^L=\sigma(B^L(s);0\le s\le t)$, $\mathcal{F}_t^N=\sigma(N(s);0\le s\le t)$. 假设可观测事件是在最后获得, 即: $\mathcal{F}=\mathcal{F}_T$. 设$N_k$的随机强度为$\lambda_k(t)$, 第$k$类型跳的幅度为$J_k$, 其概率密度为$\Phi_k(t,\mathrm{d}x)$, 其中$\lambda_k(t)$是非负的, $\mathcal{F}_t$-可料的, 它代表在时间t时跳的速率, $\Phi_k(t,\mathrm{d}x)$是$\mathcal{F}_t$-可料的, 它表示如果在时间t存在一个跳, 这个跳的大小为x的概率. 我们用E_k表示第k类跳的大小所有可能取值的空间. 特别的, 我们设$E_k=(0,\infty)$, $E_k=(-1,0)$, $E_k=(-1,\infty)$分别为正, 负和混合跳的大小所有可能取值的空间. 为了简便, 本文仅考虑E_k为这三种类型.

本文考虑这个市场中有$n+1$个资产在时间$[0,T]$内连续交易, 其中一个资产是债券, 价格为$S_0(t)$满足

$$\mathrm{d}S_0(t)=S_0(t)r\mathrm{d}t,\qquad S_0(0)=1, \tag{2.1}$$

其中r表示常值无风险利率, 剩余的n个资产被称为股票, 它们的定价过程通过线性随机微分方程描述

$$\mathrm{d}S_i(t)=S_i(t-)[b_i(t)\mathrm{d}t+\sigma_i^b(t)\mathrm{d}B^S(t)+\sigma_i^q(t)(J\bullet\mathrm{d}N(t))],\qquad i=1,\ldots,n, \tag{2.2}$$

其中$J=(J_1,\ldots,J_{n-d})^\top$, $J\bullet\mathrm{d}N(t)$表示J和$\mathrm{d}N(t)$对应分量的乘积, 即: $J\bullet\mathrm{d}N(t)=(J_1\mathrm{d}N_1(t),\ldots,J_{n-d}\mathrm{d}N_{n-d}(t))^\top$. 无风险利率为$r$, 漂移系数为$b_i(t)$, d-维扩散系数向量为$\sigma_i^b(t)$和$(n-d)$-维跳系数向量为$\sigma_i^q(t)$. 设$Z(t)$表示消费篮子价格过程, 其动力学可以表示为如下形式(见Bensoussan等, 2009)

$$\mathrm{d}Z(t)=Z(t)(I\mathrm{d}t+\zeta\mathrm{d}B^L(t)),\qquad Z(0)=Z_0,$$

其中$Z(0)$为初始条件, I表示预期即期通货膨胀率, ζ表示通胀波动率. 且当消费篮子价格完全可观察时, Z_0为已知. 根据Itô公式, 我们推导得出对数篮子价格$L(t)=\ln Z(t)$, 满足

$$\mathrm{d}L(t)=\Big(I-\frac{1}{2}\zeta^2\Big)\mathrm{d}t+\zeta\mathrm{d}B^L(t). \tag{2.3}$$

本文主要研究在Merton问题的基础上, 结合含糊厌恶、风险厌恶、跳风险及通胀因素, 求终端财富与中期消费的预期效用最大化问题. 投资者考虑CRRA (常相对风险厌恶)效用, 并赋予某个初始财富W_0, 投资到上述的$n+1$个资产. 设$\pi(t)=(\pi_1(t),\ldots,\pi_n(t))$表示交易策略, 其中$\pi_i(t)$表示在$t$时刻, $\mathcal{F}_t$-可测的条件下持有第i个风险资产的股数. 与投资组合策略$\pi(t)$相关的财富过程W_t满足动力学方程

$$\begin{aligned}\mathrm{d}W_t\;&=\;[r+\pi(t)(b(t)-r\mathbf{1})]W_t\mathrm{d}t+W_t\pi(t)\Sigma_b(t)\mathrm{d}B(t)\\&\quad+W_{t-}\pi(t-)\Sigma_q(t)(J\bullet\mathrm{d}N(t))-C(t)\mathrm{d}t,\end{aligned} \tag{2.4}$$

其中$\mathbf{1}$表示分量为1的n-维列向量, Σ_b表示$n\times d$的矩阵, $\sigma_i^b(t)$表示其第i行, Σ_q表示$n\times(n-d)$的矩阵, $\sigma_i^q(t)$表示其第i行, $C(t)$表示t时刻的消费率. 从财富动力学方程我们可以看出, 在投资组合π中, $\pi\Sigma_b$和$\pi\Sigma_q$分别表示市场上的扩散和跳风险暴露.

投资者在根据需要进行模型设定的时候, 一般都会担心模型的错误设定, 而作出决策来应对最糟糕情况的发生. 一个极端事件对资产定价有很大影响, 对这样一个基本跳过程的参数进行足够精确地估计是很困难的, 而投资者对跳参数的不确定估计是含糊厌恶的. 投资者会根据点估计和相关模型, 选择最可信赖的模型(参考模型), 以及一些预防最糟糕情况发生的备选方案(备选模型). 投资者将会为了应对最糟糕情况发生, 而作出一个预防性的投资组合策略, 来使投资行为更加合理.

假设$\mathcal{P}(\Theta)$是与参考模型相关的一族概率测度, 存在每一个概率测度$\mathsf{P}(\xi)\in\mathcal{P}(\Theta)$, 有Radon-Nikodym导数$\xi_t=[\mathrm{d}\mathsf{P}(\xi)/\mathrm{d}\mathsf{P}]|_{\mathcal{F}_t}$. 根据Bremaud (1981), ξ_t可以用随机微分方程表示为

$$\xi_t=\xi_0+\sum_{k=1}^{n-d}\int_0^t\int_{E_k}(\theta_k(s)\varphi_k(s,z)-1)\xi_{s-}q_k(\mathrm{d}s,\mathrm{d}z),$$

其中$q_k(\mathrm{d}s,\mathrm{d}z)=\mathrm{d}N_k(t)-\lambda_k(t)\Phi_k(t,\mathrm{d}z)\mathrm{d}t$是补偿泊松测度, 存在与$\Theta$相关的参数向量$\theta_i(s)$和$\varphi_i(s,z)$是正的随机过程, 满足$\int_{E_k}\varphi_k(s,z)\Phi_k(s,\mathrm{d}z)=1$ $(k=1,\ldots,n-d)$, 使得$\varphi_k(s,z)\Phi_k(s,\mathrm{d}z)$是$E_k$上的密度函数. 为了简便起见, 下面我们用$\theta_k$, λ_k, $\varphi_k(z)$, $\Phi_k(\mathrm{d}z)$分别来表示$\theta_k(t)$, $\lambda_k(t)$, $\varphi_k(s,z)$, $\Phi_k(s,\mathrm{d}z)$.

可以注意到ξ使在参考模型中第k类跳的强度λ_k和分布$\Phi_k(\mathrm{d}z)$改变为在备选模型中的$\theta_k\lambda_k$和$\varphi_k(z)\Phi_k(\mathrm{d}z)$. 现考虑到一种情况: 投资者仅对第一类跳强度参数的不精确估计是含糊厌恶的, 而对其他的参数估计是感觉合理的. 设λ_1的点估计是$\widehat{\lambda}_1$, 相关的标准差是$\mathrm{std}(\widehat{\lambda}_1)$. 设$\Theta$是$\widehat{\lambda}_1$的标准差区间, 即$\Theta=(\widehat{\lambda}_1-\mathrm{std}(\widehat{\lambda}_1),\widehat{\lambda}_1+\mathrm{std}(\widehat{\lambda}_1))$. 投资者选择投资组合策略来应对最糟糕的情况发生, 其中与参考模型不同的仅第一类跳的强度$\widehat{\lambda}_1$, 存在某个$\theta_1^*\in\Theta$, 使得最糟糕的情况下的第一类跳的强度为$\lambda^*=\theta_1^*\widehat{\lambda}_1$, $\widehat{\Theta}=\Theta/\widehat{\lambda}_1$. 处理这样的模型不确定, 投资者仅需假设$\theta_k=1$ $(k=2,\ldots,n-d)$, $\varphi_k(z)=1$ $(k=1,\ldots,n-d)$, $\theta_1\in\widehat{\Theta}$来定义备选模型. 因此, ξ_t可表示为

$$\xi_t=\xi_0+\int_0^t\int_{E_1}(\theta_1-1)\xi_{s-}q_1(\mathrm{d}s,\mathrm{d}z).$$

换句话说, 仅第一类跳的强度不同, 备选模型和参考模型所有跳的分布和强度都相同, 即在备选模型中存在一个$\theta_1\in\widehat{\Theta}$使得$\widetilde{\lambda}=\theta_1\lambda_1$. 根据Liu等(2005)对以上的Merton问题做出一些改变. 我们开始在离散时间背景下刻画效用函数, 然后通过求极限, 推导出连续时间模型下的效用函数. 特别的, 固定一个时间周期Δt, 时刻t的效用被给定为

$$U_t=\frac{(C_t\mathrm{e}^{-L_t})^{1-\gamma}}{1-\gamma}\Delta t+\mathrm{e}^{-\beta\Delta t}\inf_{\mathsf{P}(\xi)\in\mathcal{P}(\Theta)}\Big\{\frac{1}{\phi}\psi(\mathsf{E}_t^{\xi}(U_{t+\Delta t}))\mathsf{E}_t^{\xi}\Big[\ln\Big(\frac{\xi_{t+\Delta t}}{\xi_t}\Big)\Big]+\mathsf{E}_t^{\xi}(U_{t+\Delta t})\Big\},\tag{2.5}$$

且$U_T=W_T^{1-\gamma}/(1-\gamma)$. 其中$C_t$为时刻$t$的消费, $\beta>0$为一个常主观折现率, E_t^{ξ}表示$\mathsf{P}(\xi)$下的条件期望, ϕ表示投资者的含糊厌恶程度. 若$\phi=0$, 则说明投资者完全信赖参考模型, $\psi(\mathsf{E}_t^{\xi}(U_{t+\Delta t}))$是一个标准化因子, $\mathsf{E}_t^{\xi}[\ln(\xi_{t+\Delta t}/\xi_t)]$是标准熵, 用来测量测度$\mathsf{P}(\xi)$和之间的差异.

令(2.5)中的Δt趋近于0, 则连续时间情形下可以写成

$$U_t=\inf_{\mathsf{P}(\xi)\in\mathcal{P}(\theta)}\Big\{\mathsf{E}_t^{\xi}\Big[\int_t^T \mathrm{e}^{-\beta(s-t)}\Big\{\frac{1}{\phi}\psi(U_s)H(\xi_s)+\frac{(C_s\mathrm{e}^{-L_s})^{1-\gamma}}{1-\gamma}\Big\}\mathrm{d}s+\mathrm{e}^{-\beta(T-t)}U_T\Big]\Big\},\quad(2.6)$$

其中$H(\xi_t)=\sum\limits_{k=1}^{n-d}\lambda_k\int_{E_k}[\theta_k\varphi_k(z)\ln(\theta_k\varphi_k(z))+1-\theta_k\varphi_k(z)]\Phi_k(\mathrm{d}z)$.

假设存在$\mathsf{P}(\xi^*)$使得(2.6)最优化, 可得

$$U_t=\mathsf{E}_t^{\xi^*}\Big[\int_t^T\exp\Big\{\int_t^s m_u\mathrm{d}u\Big\}u_1(C_s\mathrm{e}^{-L_s})\mathrm{d}s+\exp\Big\{\int_t^s m_s\mathrm{d}s\Big\}u_2(W_T\mathrm{e}^{-L_T})\Big],$$

其中$m_u=\beta-[(1-\gamma)/\phi]H(\xi_u)$, $u_1(x)=u_2(x)=\begin{cases}x^{1-\gamma}/(1-\gamma), & \forall x>0;\\ -\infty, & \forall x\le 0.\end{cases}$

设$V(t,W,L)$表示间接效用函数

$$V(t,W,L)=\sup_{C,\pi}\{U_t\}.\quad(2.7)$$

如Merton (1971)对跳扩散过程运用标准的随机控制方法和适当的Itô积分, 可以推导出最优投资组合权重π, 相关的间接值函数V可用下面的HJB方程求出

$$\begin{aligned}0\;=\;&\max_{C,\pi}\inf_{\mathsf{P}(\xi)\in\mathcal{P}(\Theta)}\Big\{u_1(C\mathrm{e}^{-L})-\beta V+V_t+W\Big[r+\pi(b(t)-r\mathbf{1})-\frac{C}{W}\Big]V_W\\&+\frac{1}{2}W^2\pi\Sigma_b\Sigma_b^\top\pi^\top V_{WW}+\Big(I-\frac{1}{2}\zeta^2\Big)V_L+W\pi\Sigma_b\rho\zeta V_{WL}+\frac{1}{2}\zeta^2V_{LL}\\&+\Big\{\sum_{k=1}^{n-d}\mathsf{E}^{\xi}[V(W+W\pi\Sigma_{qk}J_k)-V(W)]+\frac{1}{\phi}\psi(V)H(\xi_t)\Big\}\Big\},\end{aligned}\quad(2.8)$$

其中Σ_{qk}表示Σ_q的第k列. 解(2.7)中消费策略问题是一个凹优化问题. 一阶条件也是充分的, 即$\mathrm{e}^{-L}u_1'(C\mathrm{e}^{-L})=V_L(t,W,L)$, 于是最优反馈消费策略为

$$C^*(t,W,L)=\mathrm{e}^Lg_1(\mathrm{e}^LV_L(t,W,L)),$$

其中$g_1(\cdot)$是u_1'的反函数. 因此, 上述最小化问题就反应了含糊厌恶投资者担心参数的不精确估计. 因此, 投资者会作出决策来应对最糟糕的情况发生.

假设投资者考虑两种极端的情况, 即$\phi=0$和$\phi=\infty$. 当$\phi=0$时, 说明投资者是含糊中性的或对参考模型是极端信任的, 因此他没有考虑模型的错误设定, 可能会造成经济损失. 当$\phi=\infty$时, 说明投资者是极端谨慎的, 会做出非常保守的投资策略, 同样投资者可能会因为这种保守的投资策略而造成一定的经济损失.

假设Σ表示$n\times n$的矩阵(Σ_b,Σ_q)且Σ是可逆的. 对投资组合π来说, 利用$\pi_b=(\pi_{b1},\ldots,\pi_{bd})$和$\pi_q=(\pi_{q1},\ldots,\pi_{q(n-d)})$分别表示$\pi\Sigma_b$和$\pi\Sigma_q$. 它们分别表示在金融市场中的扩散和跳风险暴露. 用π_{qk}表示第k类跳暴露, π_{bi}表示第i类扩散暴露.

因$\pi=\pi\Sigma\Sigma^{-1}=\pi[\Sigma_b,\Sigma_q]\Sigma^{-1}=(\pi_b,\pi_q)\Sigma^{-1}$, 所以首先要求出最优暴露$\pi_b$和$\pi_q$再通过一个简单地旋转$\Sigma^{-1}$, 即可获得最优投资组合$\pi$. 下面假设间接值函数$V(t,W,L)=[W^{1-\gamma}/(1-\gamma)]f^{\gamma}(L,t)$. 定义相对风险溢价为

$$\upsilon=\begin{pmatrix}\upsilon^b\\ \upsilon^q\end{pmatrix}=\Sigma^{-1}[(b(t)-r\mathbf{1})+\Sigma_q(\lambda\alpha)],\tag{2.9}$$

其中$\upsilon^b=(\upsilon_1^b,\dots,\upsilon_d^b)^{\top}$, $\upsilon^q=(\upsilon_1^q,\dots,\upsilon_{n-d}^q)^{\top}$, $\lambda=(\lambda_1,\dots,\lambda_{n-d})^{\top}$, $\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_{n-d})^{\top}$, $\lambda\alpha=(\lambda_1\alpha_1,\dots,\lambda_{n-d}\alpha_{n-d})^{\top}$. 且$\alpha_k=\displaystyle\int_{E_k}z\Phi_k(\mathrm{d}z)$表示预期的第$k$类跳的大小, $k=1,\dots,n-d$. 如Jin和Zhang (2011), 本文假设仅考虑跳为负的情况下(跳为正的情况相似) $\Phi_k(\mathrm{d}z)=(1/\widehat{\varepsilon}_d)(1+z)^{1/\widehat{\varepsilon}_d-1}\mathrm{d}z$, 其中$\widehat{\varepsilon}_d$表示在参考模型中跳的大小的参数估计.

最优投资组合权重π^*是由$n-d+1$个市场的最优策略组成的向量通过Σ^{-1}旋转得到. 尤其, 第一个是纯扩散市场, 其中有一个无风险资产, 其价格由(2.1)给出, d个风险资产价格服从

$$\mathrm{d}S^D(t)=S^D(t-)((\upsilon^b+r\mathbf{1})\mathrm{d}t+\mathrm{d}B^S(t)),$$

且效用函数为

$$U^D=\mathsf{E}\Big[\int_0^T\mathrm{e}^{\int_0^s D_v\mathrm{d}v}u_1(C_s\mathrm{e}^{-L_s})\mathrm{d}s+\mathrm{e}^{\int_0^T D_s\mathrm{d}s}u_2(W_T\mathrm{e}^{-L_T})\Big].$$

第k个市场$(k=2,\dots,n-d+1)$是纯跳市场, 其中, 除了一个无风险资产外, 存在一个风险资产其价格服从

$$\mathrm{d}S_k^J(t)=S_k^J(t-)((\upsilon_k^q-\lambda_k\alpha_k+r)\mathrm{d}t+J_k\mathrm{d}N_k(t)),$$

且效用函数

$$U^J=\mathsf{E}\Big[\int_0^T u_1(C_s\mathrm{e}^{-L_s})\mathrm{d}s+u_2(W_T\mathrm{e}^{-L_T})\Big].$$

为了更容易分析, 假设纯扩散市场是完备的. 下面, 我们把这个原始的非完备的跳扩散市场分解为一个完备的纯扩散市场和一族单期的纯跳市场. 下面的结果是由(2.7)定义的$V(t,W,L)$计算得到的.

命题 2.1 最优值函数$V(t,W,L)$为

$$V(t,W,L)=\frac{W^{1-\gamma}}{1-\gamma}f^{\gamma}(L,t),\tag{2.10}$$

其中

$$\begin{aligned}f(L,t)\;=\;&\mathsf{E}_t\Big[\int_t^T Z_{t,s}^{1-1/\gamma}\exp\Big\{-r(s-t)\Big(1-\frac{1}{\gamma}\Big)-L_s(1-\gamma)+\frac{1}{\gamma}\int_t^s D_u\mathrm{d}u\Big\}\mathrm{d}s\\&+Z_{t,T}^{1-1/\gamma}\exp\Big\{-r(T-t)\Big(1-\frac{1}{\gamma}\Big)-L_T(1-\gamma)+\frac{1}{\gamma}\int_t^T D_u\mathrm{d}u\Big\}\Big],\end{aligned}\tag{2.11}$$

和

$$D_t=\sum_{k=1}^{n-d}\Big[(1-\gamma)\pi_{qk}^*(\upsilon_k^q-\lambda_k\alpha_k)+\lambda_k\int_{E_k}[(\pi_{qk}z+1)^{1-\gamma}-1]\Phi_k(\mathrm{d}z)\Big]+\frac{1-\gamma}{\phi}H(\xi_t^*)-\beta. \quad (2.12)$$

证明见附录.

命题 2.2 最优投资组合$\pi^*=(\pi_1^*,\ldots,\pi_n^*)$和最优消费$C^*$为

$$\pi^*=(\pi_{b1}^*,\ldots,\pi_{bd}^*,\pi_{q1}^*,\ldots,\pi_{q(n-d)}^*)\Sigma^{-1},\qquad C^*(t,W_t,L_t)=\mathrm{e}^{L_t}g_1(\mathrm{e}^{L_t}V_L(t,W_t,L_t)),$$

其中W_t为最优的财富过程, $g_1(\cdot)$为$u_1'(\cdot)$的反函数, $(\pi_{b1}^*,\ldots,\pi_{bd}^*)^\top=\upsilon^b/\gamma+\rho\zeta(f_L/f)$, 且$\pi_{qk}^*$满足如下最优化问题

$$\sup_{\pi_{qk}\in F_k}G_k(\pi_{qk})=\Big[\pi_{qk}(\upsilon_k^q-\lambda_k\alpha_k)+\frac{1}{1-\gamma}\lambda_k\int_{E_k}[(\pi_{qk}z+1)^{1-\gamma}-1]\Phi_k(\mathrm{d}z)\Big], \quad (2.13)$$

其中

$$F_k=\begin{cases}(0,\infty), & \text{if } E_k=(0,\infty);\\ (-\infty,1), & \text{if } E_k=(-1,0);\\ (0,1), & \text{if } E_k=(-1,\infty).\end{cases} \quad (2.14)$$

证明见附录.

§3. 数值分析

为了更好的说明含糊厌恶、风险厌恶, 跳及通胀因素对投资组合选择的影响, 本文选取了两个风险资产和一个无风险资产作为投资组合进行数值模拟, 具体分析如下.

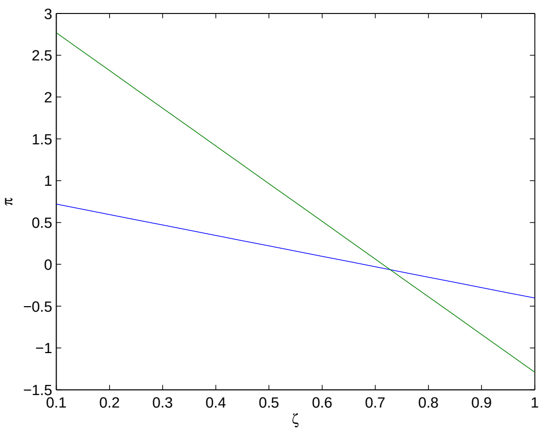

图1 通胀波动率ζ对投资组合权重π的影响

在图1中, 设$n=2$, $d=1$, $\phi=0.2$, $\upsilon_1^b=0.6731$, $\upsilon_1^q=4.226$, $I=0.07$, $\rho=0.5$, $r=0.05$, $\widehat{\lambda}_k=20.3084$, $\beta=0.1$. 由命题2.1和命题2.2中的公式可得图1, 研究预期通胀波动

率ζ对投资组合权重π的影响, 由图1可见随着通胀波动率的增大, 投资者在风险资产中的投资在减少, 使得金融市场波动比较剧烈, 投资环境的不稳定性增强, 此时投资者的担忧情绪上升, 从而相应的减少其风险资产的头寸. 并且, 由图1可明显看出, 通胀波动率对不同股票的影响也不相同, 斜率绝对值比较大的线表示价格波动率大的股票受到通胀波动率的影响较大, 斜率绝对值比较小的线表示价格波动率较小的股票受到通胀波动率的影响较小.

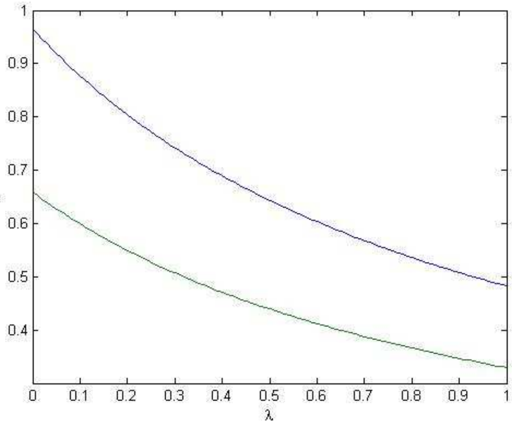

图2 跳的强度λ对投资组合权重π的影响

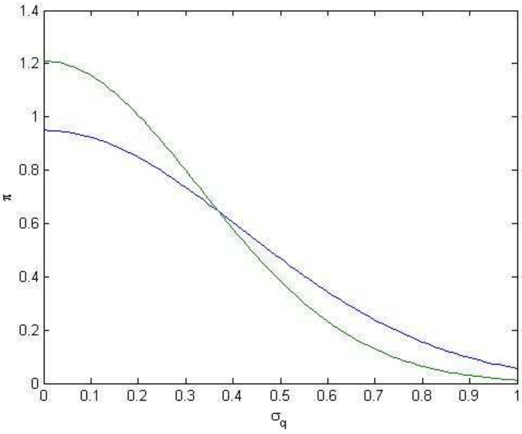

图3 跳的波动率σ_q对投资组合权重π的影响

在图2中, 设$n=2$, $d=1$, $\phi=0.2$, $\upsilon_1^b=0.6731$, $\upsilon_1^q=4.226$, $I=0.07$, $\rho=0.5$, $r=0.05$, $\widehat{\lambda}_k=20.3084$, $\beta=0.1$, $\gamma=0.3$, $\upsilon_1^b=0.6731$, $\upsilon_1^q=4.226$, $\zeta=0.2$. 由命题2.1和命题2.2中的公式可得图2, 可以看出投资组合权重π会随着跳强度λ的变化而变化. 当没有跳时($\lambda\to 0$), 投资者的投资在风险资产上的多头头寸最高. 现实生活中金融市场受到社会动荡、地震、海啸、洪水等突发事件冲击时, 股票等风险资产价格会出现大起大落乃至不连续的跳跃变化, 其所产生的跳风险影响着金融市场投资者的投资决策, 随着风险资产价格跳幅度的逐渐增大时, 投资者会逐渐减少在风险资产上的多头头寸.

在图3中, 设$n=2$, $d=1$, $\phi=0.2$, $\upsilon_1^b=0.6731$, $\upsilon_1^q=4.226$, $I=0.07$, $\rho=0.5$, $r=0.05$, $\widehat{\lambda}_k=20.3084$, $\beta=0.1$, $\gamma=0.3$, $\upsilon_1^b=0.6731$, $\upsilon_1^q=4.226$, $\zeta=0.2$. 由命题2.1和命题2.2中的公式可得图3, 图3中可以看出, 随着跳波动率σ_q的增大投资者在风险资产上的头寸在不断减小, 但在跳波动率小于0.1时, 波动不明显, 投资者能够承受这种波动带来的损失风险所以在风险资产上的头寸变化不明显, 当跳波动率大于0.1小于0.9时, 投资在风险资产上的头寸会急剧下降, 投资者不能承受这种跳波动带来的损失风险, 把大量资产从风险资产中撤出, 当跳波动率为0.4左右时, 两条线有一个交点, 我们可以看出, 跳波动率对价格波动率大的股票敏感度明显大于价格波动率小的股票. 当跳波动大于0.9时, 投资者对跳波动率的变化敏感度降低, 其在风险资产上的头寸几乎为零, 从而降低因大的跳波动率带来的经济损失.

在图4中, 设$n=2$, $d=1$, $\upsilon_1^b=0.6731$, $\upsilon_1^q=4.226$, $\rho=0.5$, $r=0.05$, $\beta=0.1$, $\mu=$

0.013, $\widehat{\lambda}_k = 20.3084$, $\sigma = 0.115$, $\gamma = 0.3$. 研究含糊厌恶程度ϕ对投资组合π的影响, 可以看出投资组合权重π随着含糊厌恶程度ϕ的增加而减少. 由于投资者是含糊厌恶的, 所以对股票回报的不精确估计所引起的模型不确定是含糊厌恶的, 随着投资者含糊厌恶程度的增加, 他对模型不确定的厌恶程度也会不断增加, 使得投资者在风险资产上的投资比例不断减小, 尤其是在极端事件冲击下, 模型的不确定性更大, 投资者的含糊厌恶程度就会增加, 投资者将会不断减小在风险资产的多头头寸. 当$\phi = 0.3$之后, 我们会发现投资在风险资产上的头寸趋于平缓, 说明投资者对此时的含糊厌恶程度不敏感了, 从而不会把风险资产上的投资作大的变动.

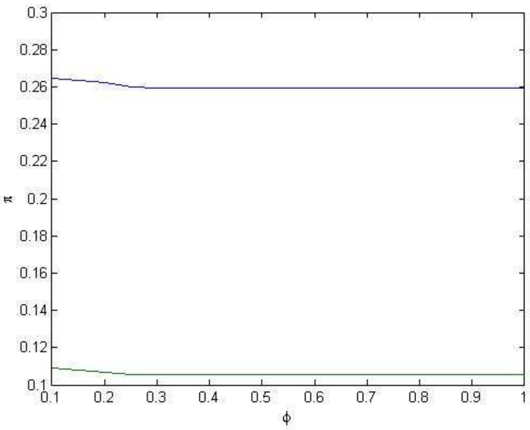

图4　含糊厌恶程度ϕ对投资组合权重π的影响

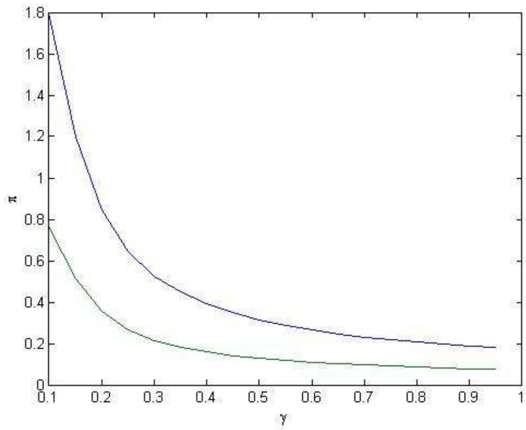

图5　风险厌恶程度γ对投资组合权重π的影响

在图5中, 设$n = 2$, $d = 1$, $v_1^b = 0.6731$, $v_1^q = 4.226$, $\rho = 0.5$, $r = 0.05$, $\beta = 0.1$, $\mu = 0.013$, $\widehat{\lambda}_k = 20.3084$, $\sigma = 0.115$, $\phi = 0.2$. 研究风险厌恶程度γ对投资组合π的影响, 可以看出投资组合权重π随着风险厌恶系数γ的增加而减少. 在投资者风险厌恶程度很小的情况下(一般风险厌恶系数小于0.2), 投资者通过无风险借贷, 以致在风险资产进行多头头寸迅速增大, 随着投资者风险厌恶程度的逐渐增加, 投资者可能不会再通过外部融资来购买风险资产, 所以其在风险资产上的头寸会迅速减小. 当投资者风险资产的厌恶程度接近1时, 投资者几乎将所有资产都投资在无风险资产上, 所以此时投资者对风险厌恶水平不再敏感, 其在风险资产上的头寸变化也趋于平缓.

总之, 风险厌恶、含糊厌恶和跳, 通胀因素都会影响投资者的投资组合选择, 投资者在根据自身不同的风险厌恶和含糊厌恶的情况下, 做出不同的投资组合选择. 而在有跳发生的情况下, 不管他的大小和方向如何, 都会使得市场的不稳定性增强, 跳幅越大, 市场动荡越明显, 从而加大风险资产的违约风险, 因此投资者会相应的减少甚至不配置风险资产, 而且在一定的通胀环境下, 投资者为了减少通胀带来的资产贬值压力, 会将自己的资产进行投资. 但在不同程度的通胀下各种资产价格变动是不一致的, 通涨的形成和发展也没有一个严格的时间和幅度的界定. 因此, 通胀情形下的资产配置策略须结合不同的通胀程度加

以分析, 投资者应当密切关注国家宏观政策的变化, 根据自身的风险承受能力进行投资, 把握好资产配置比例.

§4. 小 结

现实中, 由于模型的建立受到许多不确定因素的影响而使模型的准确性受到怀疑, 投资者因对模型的准确性产生怀疑而导致其对模型不确定的厌恶. 一方面, 投资者对风险有喜好, 中性或者厌恶等不同态度. 由于投资者在作投资组合决策的时候, 根据其含糊厌恶和风险厌恶程度, 来适时的调整投资组合, 减少损失风险, 从而获得最大利益, 所以有必要研究基于投资者的含糊厌恶与风险厌恶程度来确定最优投资组合选择问题. 同时, 资产价格也会受到极端事件冲击而产生跳行为, 资产价格路径因为跳而变得不连续了, 和纯扩散模型是不同的. 当跳产生后, 投资者的财富会从目前的值显著的改变, 这个改变不能在跳产生之前通过连续调整投资组合来对冲. 因此, 投资者使用一个大的杠杆或空头头寸可能会导致其财富减少. 为了避免这种损失风险, 投资者将会避开投资大量不可预料的资产. 现实生活中的中期消费和通胀因素也对投资者的投资组合选择产生重大影响. 本文研究了模型不确定和极端事件冲击下带通胀的最优资产组合选择问题. 在现有模型的基础上考虑通胀因素, 借助随机微分方程和随机控制理论, 得到投资者的最优资产配置策略, 并通过数值分析分别说明跳强度、含糊厌恶、风险厌恶、通胀对投资者投资决策的影响. 研究结果可以为投资者作出投资组合选择提供新的视角, 对现有模型的扩展具有较为重要的经济意义.

附录: 命题2.1-2.2的证明

命题2.1的证明: 假设存在ξ^*使得方程(2.7)有最优解, 我们可以推导出最优投资组合权重π和相关的间接值函数. HJB方程(2.7)可重写为

$$\begin{aligned}0 \;=\; & \max_{C,\pi}\inf_{\mathsf{P}(\xi)\in\mathcal{P}(\Theta)}\Big\{u_1(Ce^{-L})-\beta V+V_t+W\Big[r+\pi(b(t)-r\mathbf{1})-\frac{C}{W}\Big]V_W\\ & +\frac{1}{2}W^2\pi\Sigma_b\Sigma_b^\top\pi^\top V_{WW}+\Big(I-\frac{1}{2}\zeta^2\Big)V_L+W\pi\Sigma_b\rho\zeta V_{WL}+\frac{1}{2}\zeta^2V_{LL}\\ & +\Big\{\sum_{k=1}^{n-d}\lambda_k\int_{E_k}[V(W+W\pi\Sigma_{qk}z)-V(W)]\Phi_k(\mathrm{d}z)+\frac{1-\gamma}{\phi}VH(\xi_u)\Big\}\Big\},\end{aligned}\tag{A.1}$$

设$\mathbf{0}_d$表示$d\times1$阶矩阵中每一个元素都是0, $\mathbf{1}_{n-d}$表示$(n-d)$阶单位阵. 因此

$$\begin{aligned}\Sigma^{-1}\Sigma_q &= \begin{pmatrix}\mathbf{0}_d\\ \mathbf{1}_{n-d}\end{pmatrix},\\ \Sigma^{-1}(b(t)-r\mathbf{1}) &= \Sigma^{-1}[b(t)-r\mathbf{1}+\Sigma_q(\lambda\bullet\alpha)]-\Sigma^{-1}\Sigma_q(\lambda\bullet\alpha)\\ &= \begin{pmatrix}\upsilon^b\\ \upsilon^q\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\mathbf{0}_d\\ \mathbf{1}_{n-d}\end{pmatrix}(\lambda\bullet\alpha)=\begin{pmatrix}\upsilon^b\\ \upsilon^q-\lambda\bullet\alpha\end{pmatrix},\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}\pi(b(t)-r\mathbf{1}) &= \pi\Sigma\Sigma^{-1}(b(t)-r\mathbf{1})=(\pi\Sigma_b,\pi\Sigma_q)\begin{pmatrix}\upsilon^b\\ \upsilon^q-\lambda\bullet\alpha\end{pmatrix}\\ &= \pi\Sigma_b\upsilon^b+\pi\Sigma_q(\upsilon^q-\lambda\bullet\alpha).\end{aligned}$$

将上述方程和$WV_W=(1-\gamma)V$代入(A.1)式中得

$$\begin{aligned}0 &= \max_{C,\pi}\Big\{u_1(Ce^{-L})-\beta V+V_t+W\pi\Sigma_b\upsilon^bV_W-CV_W+rV_W+\frac{1}{2}W^2\pi\Sigma_b\Sigma_b^\top\pi^\top V_{WW}\\ &\quad+\Big(I-\frac{1}{2}\zeta^2\Big)V_L+W\pi\Sigma_b\rho\zeta V_{WL}+\frac{1}{2}\zeta^2V_{LL}+W\pi\Sigma_q(\upsilon^q-\lambda\bullet\alpha)V_W\\ &\quad+\sum_{k=1}^{n-d}\lambda_k\int_{E_k}[V(W+W\pi\Sigma_{qk}z)-V(W)]\Phi_k(\mathrm{d}z)+\frac{1-\gamma}{\phi}VH(\xi_t^*)\Big\}.\end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned}0 &= \max_{C,\pi}\Big\{u_1(Ce^{-L})+V_t+(W\pi_b\upsilon^b-C+r)V_W+\frac{1}{2}W^2\pi_b\pi_b^\top V_{WW}+\Big(I-\frac{1}{2}\zeta^2\Big)V_L\\ &\quad+W\pi\Sigma_b\rho\zeta V_{WL}+\frac{1}{2}\zeta^2V_{LL}+D_tV\Big\},\end{aligned}$$

其中D_t由(2.12)式给出.

由Karatzas等(1987), 定义Radon-Nikodym鞅Z为

$$Z_t=\exp\Big\{-\int_0^t\upsilon^b(s)\mathrm{d}B^S(s)-\frac{1}{2}\int_0^t\|\upsilon^b(s)\|^2\mathrm{d}s\Big\}.$$

在纯扩散市场中定义一个与Z相关的过程η满足

$$\eta_t=Z_t\exp\Big\{-\int_0^t[D_s+r]\mathrm{d}s\Big\}.$$

设$Z_{t,T}=Z_T/Z_t$和$\eta_{t,T}=\eta_T/\eta_t$. 由Karatzas等(1987)的定理5.2, 当$t\in[0,T]$时, 在纯扩散市场中的最优终端财富和最优消费为$W_{t,T}^*=y^{-1/\gamma}\eta_{t,T}^{-1/\gamma}$和$C_{t,s}^*=y^{-1/\gamma}\eta_{t,s}^{-1/\gamma}$, 其中

$$y=W_t^{-\gamma}\Big\{\mathsf{E}_t\Big[\int_t^Te^{-r(s-t)}Z_{t,s}\eta_{t,s}^{-1/\gamma}\mathrm{d}t+e^{-r(T-t)}Z_{t,T}\eta_{t,T}^{-1/\gamma}\Big]\Big\}^\gamma.$$

即

$$\begin{aligned}y &= W_t^{-\gamma}\Big\{\mathsf{E}_t\Big[\int_t^TZ_{t,s}^{1-1/\gamma}\exp\Big\{-r(s-t)\Big(1-\frac{1}{\gamma}\Big)+\frac{1}{\gamma}\int_t^sD_v\mathrm{d}v\Big\}\mathrm{d}s\\ &\quad+Z_{t,T}^{1-1/\gamma}\exp\Big\{-r(s-t)\Big(1-\frac{1}{\gamma}\Big)+\frac{1}{\gamma}\int_t^TD_v\mathrm{d}v\Big\}\Big]\Big\}^\gamma.\end{aligned}$$

又因最优预期效用函数可以表示为

$$V(t,W,L)=\mathsf{E}_t\Big[\int_t^T\exp\Big\{\int_t^sD_v\mathrm{d}v\Big\}u_1(C_{t,s}^*e^{-L_s})\mathrm{d}s+\exp\Big\{\int_t^TD_v\mathrm{d}v\Big\}u_2(W_{t,T}^*e^{-L_T})\Big],$$

由此可得(2.11)式. □

命题2.2的证明: 由(A.1)式, 我们可以注意到, 如果第k类跳大小的范围在$(0,\infty)$上, 那么跳暴露满足$\pi\Sigma_{qk}\geq 0$; 如果第k类跳的大小的范围在$(-1,0)$上, 那么跳暴露满足$\pi\Sigma_{qk}\leq 1$; 如果第k类跳的大小的范围在$(-1,\infty)$上, 那么跳暴露满足$0\leq\pi\Sigma_{qk}\leq 1$. 因此, 在(2.13)式中的$F_k$满足(2.14).

现假设所有的跳都是正的, 其他的情况可以由类似地处理. 把(2.10)式代入(A.1)中, 求π的一阶导, 得

$$\begin{aligned}0 &= [(b(t)-r\mathbf{1})-\gamma\Sigma_b\Sigma_b^\top\pi^\top]W^{1-\gamma}f^\gamma(L,t)+\gamma\Sigma_b\rho\zeta W^{1-\gamma}f^{\gamma-1}(L,t)f_L(L,t)\\ &\quad +W^{1-\gamma}f^\gamma(L,t)\sum_{k=1}^{n-d}\lambda_k\int_{E_k}(1+\pi\Sigma_{qk}z)^{-\gamma}\Sigma_{qk}z\Phi_k(\mathrm{d}z)+\sum_{k=1}^{n-d}y_k\Sigma_{qk},\end{aligned}\tag{A.2}$$

其中$(y_1,\ldots,y_{n-d})$是拉格朗日乘子, 满足$\pi\Sigma_{qk}\geq 0$时$y_k=0$或者$\pi\Sigma_{qk}=0$时$y_k\geq 0$ $(k=1,\ldots,n-d)$. 由(2.8)式可得

$$\Sigma_q\upsilon^q=[\Sigma_{q1},\ldots,\Sigma_{q(n-d)}](\upsilon_1^q,\ldots,\upsilon_{n-d}^q)^\top=\sum_{k=1}^{n-d}\Sigma_{qk}\upsilon_k^q.$$

所以(A.2)可写为

$$\begin{aligned}0 &= \Sigma_b W^{1-\gamma}f^\gamma(L,t)\Big(\upsilon^b-\gamma\pi_b^\top+\gamma\rho\zeta\frac{f_L(L,t)}{f(L,t)}\Big)+\sum_{k=1}^{n-d}\Sigma_{qk}Z_k\\ &= \Sigma\begin{pmatrix}\upsilon^b-\gamma\pi_b^\top+\gamma\rho\zeta\dfrac{f_L(L,t)}{f(L,t)}\\ Z\end{pmatrix},\end{aligned}$$

其中$Z=(Z_1,\ldots,Z_{n-d})^\top$, 且对$k=1,\ldots,n-d$,

$$Z_k=W^{1-\gamma}f^\gamma(L,t)\Big(\upsilon_k^q-\lambda_k\alpha_k+\lambda_k\int_{E_k}(1+\pi_{qk}z)^{-\gamma}z\Phi_k(\mathrm{d}z)\Big)+y_k=0.\tag{A.3}$$

因此

$$\upsilon^b-\gamma\pi_b^\top+\gamma\rho\zeta\frac{f_L(L,t)}{f(L,t)}=0.$$

由于Σ是可逆的, 对于每一个k, 求(A.3)式中π_{qk}的一阶导, 可获得最优化问题的解π_{qk}^*满足

$$\max_{\pi_{qk}\geq 0}W^{1-\gamma}f^\gamma(L,t)\Big(\upsilon_k^q-\lambda_k\alpha_k+\frac{\lambda_k}{1-\gamma}\int_{E_k}(1+\pi_{qk}z)^{1-\gamma}\Phi_k(\mathrm{d}z)\Big).$$

因此, 最优的π_b^*为

$$\pi_b^{*\top}(t,W,L)=\frac{\upsilon^b}{\gamma}+\rho\zeta\frac{f_L(L,t)}{f(L,t)}.$$

最优π_{qk}^* $(k=1,\ldots,n-d)$结合π_b^*可得最优投资组合权重π^*. □

参 考 文 献

[1] Merton, R.C., Lifetime portfolio selection under uncertainty: the continuous-time case, *The Review of Economics and Statistics*, **51(3)**(1969), 247–257.

[2] Merton, R.C., Optimum consumption and portfolio rules in a continuous-time model, *Journal of Economic Theory*, **3(4)**(1971), 373–413.

[3] Samuelson, P.A., Lifetime portfolio selection by dynamic stochastic programming, *The Review of Economics and Statistics*, **51(3)**(1969), 239–246.

[4] Bakshi, G., Cao, C. and Chen, Z., Empirical performance of alternative option pricing models, *The Journal of Finance*, **52(5)**(1997), 2003–2049.

[5] Bardhan, I. and Chao, X., On martingale measures when asset returns have unpredictable jumps, *Stochastic Processes and their Applications*, **63(1)**(1996), 35–54.

[6] Duffie, D., Pan, J. and Singleton, k., Transform analysis and asset pricing for affine jump-diffusions, *Econometrica*, **68(6)**(2000), 1343–1376.

[7] Liu, J., Longstaff, F.A. and Pan, J., Dynamic asset allocation with event risk, *The Journal of Finance*, **58(1)**(2003), 231–259.

[8] Gilboa, I. and Schmeidler, D., Maxmin expected utility with non-unique prior, *Journal of Mathematical Economics*, **18(2)**(1989), 141–153.

[9] Knight, F.H., *Risk, Uncertainty and Profit*, Houghton Mifflin, Boston, 1921.

[10] Chen, Z.J. and Epstein, L., Ambiguity, risk, and asset returns in continuous time, *Econometrica*, **70(4)**(2002), 1403–1443.

[11] Liu, J., Pan, J. and Wang, T., An equilibrium model of rare-event premia and its implication for option smirks, *The Review of Financial Studies*, **18(1)**(2005), 131–164.

[12] Maenhout, P.J., Robust portfolio rules and asset pricing, *The Review of Financial Studies*, **17(4)** (2004), 951–983.

[13] Jin, X. and Zhang, A., Ambiguity aversion, optimal portfolio choice and market decomposition with rare events, Working paper, 2011, www.ccfr.org.cn/cicf2011/papers/20110523013543.pdf.

[14] Gallagher, L.A. and Taylor, M.P., The stock return - inflation puzzle revisited, *Economics Letters*, **75(2)**(2002), 147–156.

[15] Munk, C., Sørensen, C. and Vinther, T.N., Dynamic asset allocation under mean-reverting returns, stochastic interest rates, and inflation uncertainty: are popular recommendations consistent with rational behavior?, *International Review of Economics & Finance*, **13(2)**(2004), 141–166.

[16] Fama, E.F. and Schwert, G.W., Asset returns and inflation, *Journal of Financial Economics*, **5(2)** (1977), 115–146.

[17] Hondroyiannis, G. and Papapetrou, E., Stock returns and inflation in Greece: a Markov switching approach, *Review of Financial Economics*, **15(1)**(2006), 76–94.

[18] Bensoussan, A., Keppo, J. and Sethi, S.P., Optimal consumption and portfolio decisions with partially observed real prices, *Mathematical Finance*, **19(2)**(2009), 215–236.

[19] Fei, W.Y., Optimal consumption and portfolio under inflation and Markovian switching, *Stochastics: An International Journal of Probability and Stochastic Processes*, **85(2)**(2013), 272–285.

[20] Brennan, M.J. and Xia, Y.H., Dynamic asset allocation under inflation, *The Journal of Finance*, **57(3)**(2002), 1201–1238.

[21] 部慧, 汪寿阳, 商品期货及其组合通胀保护功能的实证分析, 管理科学学报, **13(9)**(2010), 26–37.

[22] 刘金全, 王凤云, 资产收益率与通货膨胀率关联性的实证分析, 财经研究, **30(1)**(2004), 123–128.

[23] 费为银, 李淑娟, Knight不确定下带通胀的最优消费和投资模型研究, 工程数学学报, **29(6)**(2012), 799–806.

[24] 吕会影, 费为银, 余敏秀, 通胀环境下考虑随机微分效用的最优消费和投资问题研究, 数学理论与应用, **32(4)**(2012), 83–88.

[25] 费为银, 蔡振球, 夏登峰, 跳扩散环境下带通胀的最优动态资产配置, 管理科学学报, 即将发表, 2012.

[26] Fei, W.Y., Optimal consumption-leisure, portfolio and retirement selection based on α-maxmin expected CES utility with ambiguity, *Applied Mathematics – A Journal of Chinese Universities*, **27(4)**(2012), 435–454.

[27] Bremaud, P., *Point Processes and Queues: Martingale Dynamics*, Springer, Berlin, 1981.

[28] Karatzas, I., Lehoczky, J.P. and Shreve, S.E., Optimal portfolio and consumption decisions for a "small investor" on a finite horizon, *SIAM Journal on Control and Optimization*, **25(6)**(1987), 1557–1586.

An Investor's Optimal Portfolio with Rare Events and Model Uncertainty under Inflation

FEI WEIYIN XIA DENGFENG LIU PENG

(*Department of Financial Engineering, Anhui Polytechnic University, Wuhu, 241000*)

This paper is concerned with the optimal portfolio choice of an investor under the inflation and rare events impact, where the investor is aversive not only to the risk of loss but also to model uncertainty. An investor allocates his assets to the risky asset and the riskless asset. First, we obtain the dynamics of consumer-basket-price with inflation by using formula. Second, under maximizing the expected utility of intermediate consumption and terminal wealth discounted by inflation, the value function of ambiguity aversion investors is characterized. Through the dynamic programming principle, we derive the HJB equation satisfied by the value function of an investor's optimal consumption and portfolio. Third, applying market decomposition method to solving the HJB equation, the optimal consumption and portfolio policy for investors is obtained. Finally, the effect of the ambiguity aversion, risk aversion and inflation on an investor's optimal allocation strategy is analyzed by numerical simulation.

Keywords: Jump-diffusion process, ambiguity aversion, inflation, portfolio, HJB equation, model uncertainty.

AMS Subject Classification: 65C30, 91B28.