Markov切换具有Knight不确定下最优消费和投资组合研究 *

余敏秀 费为银 夏登峰
(安徽工程大学数理学院, 芜湖, 241000)

摘 要

本文在模型不确定环境和一般的半鞅市场条件下, 考虑来自于消费和终端财富预期效用最大化问题. 代理人以一初始资本和一随机禀赋(endowment)进行投资. 我们用鞅方法和对偶理论去寻求最优消费和投资组合问题的解, 首先, 利用对偶原理, 给出在适当的假设条件下, 该投资组合问题唯一解存在性的证明, 同时对该解进行刻画, 并推导出原问题和对偶问题的值函数是互为共轭的. 此外, 我们还考虑了一个跳扩散模型, 该跳扩散模型的系数依赖于一个Markov链, 且投资者对Markov链状态间的切换的速率是Knight不确定的. 在该模型中我们考虑代理人具有对数效用函数时, 可用随机控制方法推导其HJB方程, 并能给出HJB方程的数值解, 进而能推出最优消费和投资策略.

关 键 词: Knight不确定, 投资组合, Markov切换模型, 对偶理论, 鞅方法, 随机控制.

学科分类号: O211.63.

§1. 引 言

现代和古典经济行为理论都用效用函数去描述金融代理人来自于消费或终端财富的满意度. 从初始的随机禀赋开始, 金融代理人对金融资产之间财富分配就面临着不同程度的不确定. 如果金融市场是无套利的, 则代理人无需同市场博弈, 而只需以预期效用最大化这样一种方式去投资. 现已经有大量的文献对这方面的问题进行了研究, 这类文献中期望效用都是以一个能够准确的模拟未来股票价格演变的概率测度进行计算的. 如最早Merton (1969, 1971)考虑了在连续时间随机金融市场模型中效用最大化问题, 他用强假设(通常在现实中是不合理的)即股票价格带有常系数的动态Markov动力学, 在这个假设条件下, 他用随机动态规划方法和HJB方程解决了最优消费和投资问题. 然而, 实际上股票价格演变的概率测度选择面临模型不确定, 时常也称为含糊或是Knight (1921)不确定. 经济学家很早就意识到Knight不确定, 且在八十年代晚期Gilboa和Schmeidler (1989)及Schied (2007)建立了用以解释对风险和含糊厌恶的投资者偏好公理, 他们表明这些偏好都

*国家自然科学基金资助项目(71171003, 71271003, 11326121)、教育部人文社会科学规划基金项目(12YJA790041)、安徽省自然科学基金资助项目(1408085QA09, 1208085MG116)和安徽省高校自然科学基金资助项目(KJ2013B023)资助.
本文2013年3月5日收到, 2014年5月26日收到修改稿.
doi: 10.3969/j.issn.1001-4268.2014.04.003

可以借由一个一致稳健效用泛函的形式数值表达, 即

$$X \longmapsto \inf_{\mathsf{Q}\in\mathcal{Q}} \mathsf{E}_{\mathsf{Q}}[U(X)].$$

这里U是一个效用函数, $\mathcal{Q}$是一类概率测度, $\mathcal{Q}$中的元素可以解释为可能描述未来所有情景概率的先验模型, 对这些先验模型的期望效用取下确界是最糟糕的情形. Talay和Zheng (2002)就考虑了这种类型偏好下的最优投资决策分析. 此外, Quenez (2004)用随机控制方法解决了在稳健情形下的最优投资策略. Becherer (2006)和Muller (2005)运用倒向随机微分方程计算出最优投资组合的解. Schied (2004, 2008)研究了带稳健效用泛函及风险度量的最优投资问题. Burgert和Ruschendorf (2005)考虑了在模型不确定下的最优消费策略问题. 近年来, 随着对偶理论和鞅方法等技术被广泛应用后, 也存在大量文献对最优投资问题进行了相关的讨论, 如Schied和Wu (2005)及Gundel (2005)他们都借由对偶理论或是鞅方法解决了稳健优化问题. Follmer和Gundel (2006)探讨了在广义鞅测度下的稳健射影问题, 并得出最优投资组合选择. Cvitanic等(2001), Karatzas和Zitkovic (2003)及Hugonnier和Kramkov (2004)的文献考虑了代理人在收到某些额外随机禀赋时的最优消费过程. Bauerle和Rieder (2007)在Markov切换模型下, 算出最优投资组合问题的解. Hernandez-Hernandez和Schied (2007)解决了在一般罚项下, 带有对数效用下消费的稳健最大化问题. Fei (2007)研究了带预期的最优消费投资问题, 推广了现有的模型. Fei (2009)用最大最小效用的加权平均(即用α-MEU)研究了最优投资组合选择问题. 费为银和李淑娟(2012)研究了投资者在Knight不确定下带有通胀的最优消费和投资决策问题, 并就CRRA效用投资者, 建立了明确的最优消费投资公式. 费为银等(2013)探讨了Knight不确定下考虑负效用的消费投资问题. 夏登峰等(2010)讨论了变折现率下带含糊和预期的投资问题. 韩立岩和泮敏(2012)研究了基于奈特不确定性随机波动率期权定价问题. Wittmuss (2008)讨论了带随机禀赋的稳健最优消费问题. Wittmuss (2010)运用鞅方法和对偶理论等方法探讨了在模型不确定下最优动态消费流的问题(即效用函数只和消费流有关), 并得出消费和投资比率最优解的存在性和唯一性, 同时将其结果运用到Markov切换模型的应用中, 在该模型中的投资者带有对数和双曲绝对风险厌恶效用函数, 但只讨论了投资者是风险厌恶型和风险喜好型两种极端的情形, 并给出相应的最优消费和投资比率. 余敏秀等(2014)探讨了在模型不确定环境下最优动态投资问题(即效用函数只和终端财富有关). Fei和Fei (2013)运用次线性期望和G-布朗运动理论首次提出了随机控制的最优化原理, 并在此理论框架下考虑了最优消费和投资选择问题. 费为银等(2014)研究了奈特不确定和部分信息下的最优交易策略问题. 梁勇等(2014)讨论了Knight不确定及机制转换环境下带通胀的最优投资选择问题. 李娟等(2013)对奈特不确定下资产收益率发生紊乱的最优投资模型进行了研究. Fei (2012)在α极大极小预期不变替代弹性效用下, 探讨了无限时间区间上的投资者, 在区分含糊和含糊态度的最优消费闲暇、资产配置及退休选择问题, 且在给出最优退休时间的同时, 并推导出退休前及退休后最优消费闲暇和资产配置的闭型解. 石学芹等(2014)考虑

了奈特不确定环境下固定供款型养老基金最优投资策略问题.

本文是基于Wittmuss (2010)和余敏秀等(2014)的基础上所讨论的, 我们考虑代理人意识到未来风险以及不确定. 首先, 我们是在一般的半鞅框架下研究最优消费和投资问题, 代理人投资于股票市场, 并收到一份额外的随机禀赋. 我们借助于对偶理论、鞅方法去探讨这一消费和投资组合问题. 其次, 我们是在一个具体的Markov切换模型中, 用随机控制技术去计算最优消费和投资组合的策略. 当然我们指定所讨论的问题是一个稳健优化问题. 但我们与Wittmuss (2010)及余敏秀等(2014)的不同之处是: 我们模型中的效用函数不仅和消费流有关, 而且还和终端财富有关, 即代理人试图最大化

$$\inf_{\mathsf{Q}\in\mathcal{Q}} \mathsf{E}\Big[\Big(\int_0^T U_1(t,c_t)\mathrm{d}t + U_2(X_T^{x,c,\pi})\Big) + \gamma(\mathsf{Q})\Big], \tag{1.1}$$

其中, γ表示一个罚函数, 在后面我们将会用到这个表达式. 在本文中, 我们还要用到稳健偏好泛函和货币风险测度之间的联系. 众所周知, 风险度量就是把风险转化为一个实际值的过程, 而一个一致风险度量是风险度量ρ满足单调性, 凸性, 同质性和平移不变性. 凸性意味着多样化投资组合有一个更小的风险. 故对于一致风险度量, 有

$$\rho(X) = \sup_{\mathsf{Q}\in\mathcal{Q}} \mathsf{E}_{\mathsf{Q}}(-X).$$

而对于更一般的凸风险测度, 有

$$\rho(X) = \sup_{\mathsf{Q}\in\mathcal{Q}} (\mathsf{E}_{\mathsf{Q}}(-X) + \gamma(\mathsf{Q})).$$

另一方面, 当考虑含糊时, 由于我们假定代理人是不确定厌恶型, 这就意味着代理人此时总喜欢有一个可能的对冲, 以降低风险. 当然, 也会有含糊喜好的投资者, 对于这种投资者, 我们可以借由下面式子建模, 即

$$\sup_{\mathsf{Q}\in\mathcal{Q}} \mathsf{E}_{\mathsf{Q}}\Big(\int_0^T U_1(t,c_t)\mathrm{d}t + U_2(X_T^{x,c,\pi})\Big).$$

若是对介于含糊厌恶和含糊喜好者之间的投资者, 则可以借由α-MEU进行建模, 并去估计收益X, 也即

$$\alpha \inf_{\mathsf{Q}\in\mathcal{Q}} \mathsf{E}_{\mathsf{Q}}\Big[\int_0^T U_1(t,c_t)\mathrm{d}t + U_2(X_T^{x,c,\pi})\Big] + (1-\alpha)\sup_{\mathsf{Q}\in\mathcal{Q}} \mathsf{E}_{\mathsf{Q}}\Big(\int_0^T U_1(t,c_t)\mathrm{d}t + U_2(X_T^{x,c,\pi})\Big),$$

$\forall\, \alpha\in[0,1]$. 在本文中, 我们只考虑$\alpha=1$的特殊情形.

§2. 模型框架和对偶理论

在本节中, 由于我们是在一般的半鞅框架下研究最优消费投资组合问题, 且代理人投资于股票市场, 并收到一份额外的随机禀赋, 而且我们在本文中只考虑含糊厌恶投资者. 故代理人试图最大化(1.1)式.

首先, 我们给出这个问题的对偶函数. 像通常的效用最大化理论一样, 他的对偶问题是将其最大化问题转化成一个最小化问题. 当然, 这里的下确界是在相对应的对偶集$\mathcal{D}$上取得的, 而这个对偶集在某种程度上与等价鞅测度集$\mathcal{M}$有关. 在后面我们还将研究原最大化问题的解和对偶问题的解的性质及其他们之间的关系. 即要证明这两个问题的解是存在的、唯一的, 而且还是彼此共轭的. 最后还要证明原问题的解与对偶问题的解是等价的. 我们考虑一个代理人试图最大化来自于消费流和终端T时刻财富的效用, 也即(1.1)式, 该代理人被赋予一个初始资本并随着时间的推移收到一个额外的随机禀赋, 我们假设代理人将初始资本和随机禀赋投资到d个风险资产中. 设信息流$(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{0\le t\le T}, \mathsf{P})$满足通常的条件, 金融市场被假定是无套利的, 故等价于概率测度P的上鞅集$\mathcal{M}$非空, 投资组合过程为$\theta=(\theta_t)_{0\le t\le T}$, 且$\int_0^t \theta_u \mathrm{d}S_u$从下方有界, 初始资本记为$x$, 随机禀赋是一个非递减, 适应的RCLL过程且为$\mathcal{E}=(\mathcal{E}_t)_{0\le t\le T}$, 再令终端财富非负, 即

$$x+\mathcal{E}_T+\int_0^T \theta_t \mathrm{d}S_t \ge 0. \tag{2.1}$$

令$\pi_t^i=\theta_t^i S_t^i/X_t$表示$t$时刻投资到第$i$个风险资产上的财富比例, $\pi_t^i=(\pi_t^1,\ldots,\pi_t^2)$. 记$\mathcal{A}(x)$为满足(2.1)式的所有可能的消费投资组合$(c,\pi)$之集. 来自于消费和终端财富的效用可通过效用函数和一个罚项γ来描绘的稳健效用泛函来估计. 更精确地说, 是代理人试图最大化

$$\inf_{\mathsf{Q}\ll\mathsf{P}}\Big(\mathsf{E}_{\mathsf{Q}}\Big[\int_0^T U_1(t,c_t)\mathrm{d}t+U_2(X_T^{x,c,\pi})\Big]+\gamma(\mathsf{Q})\Big). \tag{2.2}$$

首先, 上式中的效用函数$U_1(t,x)$, $U_2(x)$从下方有界, 其次这个效用泛函和凸风险测度是紧密相联的, 故

$$\rho(Y):=\sup_{\mathsf{Q}\ll\mathsf{P}}(\mathsf{E}_{\mathsf{Q}}[-Y]-\rho(Y)).$$

罚函数γ被假定是从下方有界的, 且

$$\gamma(\mathsf{Q})=\sup_{Y\in L^\infty(\mathsf{P})}(\mathsf{E}_{\mathsf{Q}}[-Y]-\rho(Y)).$$

此外, 对于γ, $U_1(t,x)$, $U_2(x)$, 我们需要下面的假设.

假设 2.1 我们假定风险度量ρ是从下方连续, 即序列$(Y_n)\subset L^\infty(\mathsf{P})$单调递增到$Y\in L^\infty(\mathsf{P})$, 有$\rho(Y_n)\searrow\rho(Y)$. 且对所有$Y\in L_-^\infty(\mathsf{P})\setminus\{0\}$, $\rho(Y)$恒为正.

假设 2.2 对固定的时间$t\in[0,T]$, 效用函数$U_1(t,\cdot)$, $U_2(\cdot)$是严格凹、非递减、连续可微且对所有的$t\ge 0$, 有$\lim\limits_{x\to 0} U_{1x}(t,x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to 0} {U_2}'(x)=\infty$和$\lim\limits_{x\to\infty} U_{1x}(t,x)=0$, $\lim\limits_{x\to\infty} {U_2}'(x)=0$. 边际效用是介于两个单调递减连续函数之间, 即

$$K_1(x)\le U_{1x}(t,x)\le K_2(x), \qquad K_1(x)\le {U_2}'(x)\le K_2(x).$$

且 $\lim\limits_{x\to\infty}\sup[K_2(x)/K_1(x)]<\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty}\inf\limits_{t\in[0,T]}U_1(t,x)>0$, $\lim\limits_{x\to\infty}U_2(x)>0$. 特别有

$$\lim_{x\to\infty}\sup\Big(\sup_t\frac{xU_{1x}(t,x)}{U_1(t,x)}\Big)<1,\qquad \lim_{x\to\infty}\sup\Big(\frac{xU_2{}'(x)}{U_2(x)}\Big)<1.$$

为了避免估计

$$\mathsf{E}_{\mathsf{Q}}\Big(\Big[\int_0^T U_1(t,c_t)\mathrm{d}t+U_2(X_T^{x,c,\pi})\Big]+\gamma(\mathsf{Q})\Big)$$

的值, 限制优化问题中的测度集是必要的, 故令$\mathcal{Q}=\{\mathsf{Q}\ll\mathsf{P}|\gamma(\mathsf{Q})<\infty\}$, 则优化问题为

$$\max_{(c,\pi)\in\mathcal{A}(x)}\inf_{\mathsf{Q}\ll\mathsf{P}}\Big(\mathsf{E}_{\mathsf{Q}}\Big[\int_0^T U_1(t,c_t)\mathrm{d}t+U_2(X_T^{x,c,\pi})\Big]+\gamma(\mathsf{Q})\Big).\tag{2.3}$$

由于$\mathcal{A}(x)$为所有可能的消费投资组合(c,π)之集, 现在我们可定义最大化问题的值函数

$$u(x)=\sup_{(c,\pi)\in\mathcal{A}(x)}\inf_{\mathsf{Q}\in\mathcal{Q}}\Big(\mathsf{E}_{\mathsf{Q}}\Big[\int_0^T U_1(t,c_t)\mathrm{d}t+U_2(X_T^{x,c,\pi})\Big]+\gamma(\mathsf{Q})\Big).\tag{2.4}$$

若T时刻终端财富被立即消费, 则上式就成为Wittmuss (2010)所讨论的情形. 接下来我们将用对偶理论来刻画(2.4)的解. 设等价上鞅测度$\mathcal{M}$的弱*闭包(weak*-closure)集$\mathcal{D}$为对偶区域, 我们用$\mathcal{D}$来考虑该(2.4)式的对偶问题. 设每个$R\in\mathcal{D}$, 必有一非负且RCLL上鞅$Y^R=(Y_t^R)_{t\in[0,T]}$ (Y^R对密度过程R^r是上鞅, 其中R^r是R的唯一分解的正则部分). Y^R的存在性, Y^R及$\mathcal{D}$的性质可参见Karatzas和Zitkovic (2003). 记号$\langle R,\mathcal{E}_T\rangle$表示典则配对(canonical pairing), 且$\langle R,I_\Omega\rangle=1$. 若记$\mathcal{Q}_e:=\{\mathsf{Q}\in\mathcal{Q}|\mathsf{Q}\sim\mathsf{P}\}$, $\mathcal{U}_{\mathsf{Q}}(c)=\mathsf{E}_{\mathsf{Q}}\Big[\int_0^T U_1(t,c_t)\mathrm{d}t+U_2(X_T^{x,c,\pi})\Big]$, $u_{\mathsf{Q}}(x)=\sup\limits_{(c,\pi)\in\mathcal{A}(x)}\mathcal{U}_{\mathsf{Q}}(c)$. 故有$u(x)=\inf\limits_{\mathsf{Q}\in\mathcal{Q}}(u_{\mathsf{Q}}(x)+\gamma(\mathsf{Q}))$. 再由任一$t$时刻资本非负这一约束条件及Wittmuss (2010)的3.2节对偶部分类似推导, 可推出对偶问题的值函数

$$v(y)=\inf_{Z\in\mathcal{Z}}\Big(\inf_{R\in\mathcal{D}}\Big(\mathsf{E}\Big[Z\int_0^T V_1\Big(t,y\frac{Y_t^R}{Z_t}\Big)\mathrm{d}t+ZV_2\Big(y\frac{Y_T^R}{Z_T}\Big)\Big]\Big)+y\langle R,\mathcal{E}_T\rangle+\gamma(Z)\Big),\tag{2.5}$$

其中V_1是U_1的凸共轭函数, V_2是U_2的凸共轭函数, 即$V_1(t,y)=\sup\limits_{x\geq0}(U_1(t,x)-xy)$, $V_2(y)=\sup\limits_{x\geq0}(U_2(x)-xy)$, 且$Z=\mathrm{d}\mathsf{Q}/\mathrm{d}\mathsf{P}$, $\mathcal{Z}=\{\mathrm{d}\mathsf{Q}/\mathrm{d}\mathsf{P}|\mathsf{Q}\in\mathcal{Q}\}$; $Z_t=\mathsf{E}[\mathrm{d}\mathsf{Q}/\mathrm{d}\mathsf{P}|_{\mathcal{F}_t}]$. 为了记号的方便, 记

$$\mathcal{V}_{\mathsf{Q}}(Y^R)=\mathsf{E}_{\mathsf{Q}}\Big[\int_0^T V_1(t,Y_t^R)\mathrm{d}t+V_2(Y_T^R)\Big].$$

我们定义函数u_{Q}为在主观概率测度Q下的优化问题的解, 则我们可以定义一个与之相对应的对偶值函数$v_{\mathsf{Q}}(y)$为

$$v_{\mathsf{Q}}(y)=\inf_{R\in\mathcal{D}}\Big(\mathcal{V}_{\mathsf{Q}}\Big(y\frac{Y^R}{Z^{\mathsf{Q}}}\Big)+y\langle R,\mathcal{E}_T\rangle\Big).$$

注记 1 引入凸风险度量是被解释为对不同情形的测度Q中取最坏情形的方法. 当代理人依据给定的测度Q去评估效用, 这个解释似乎也是合理的, 且在这个测度下所有满足资本约束的策略也应该是被允许的. 因此, 对偶区域依赖于测度Q, 但是, 我们规定对市场的假设和交易策略仅与测度P有关. 用测度P而不是测度Q的原因就是我们用风险度量作为代理人的偏好模型, 而不是用真实的市场去作为模型. 此外, 最糟糕情形的测度可能会允许套利, 因此, 为了排除套利机会, 在测度P下我们限制一些允许条件是必要的.

为了应用对偶理论, 我们有下面的假设.

假设 2.3 假设存在$\mathsf{Q}_0\in\mathcal{Q}_e$, 使得对某$x>0$, 有$u_{\mathsf{Q}_0}(x)<\infty$成立.

这个假设是必须的, 类似于Karatzas和Zitkovic (2003)中为了确保在主观概率测度Q_0下, 原问题和对偶问题的解存在. 此外我们还可以得出u_{Q_0}和v_{Q_0}是对偶函数, 可以参见Karatzas和Zitkovic (2003)中定理3.10. 在我们所讨论的稳健情形下, 我们也有类似的结果, 即有下面的定理.

定理 2.1 若上面假设2.1, 2.2和2.3均成立, 则有

(1) 值函数u和v取唯一的有限值, 且满足$u'(\infty-)=0$及$v'(0+)=0$.

(2) 值函数u满足

$$\begin{aligned}u(x) &= \sup_{(c,\pi)\in\mathcal{A}(x)}\inf_{\mathsf{Q}\in\mathcal{Q}}\Big(\mathsf{E}_{\mathsf{Q}}\Big[\int_0^T U_1(t,c_t)\mathrm{d}t+U_2(X_T^{x,c,\pi})\Big]+\gamma(\mathsf{Q})\Big)\\ &= \inf_{\mathsf{Q}\in\mathcal{Q}}\sup_{(c,\pi)\in\mathcal{A}(x)}\Big(\mathsf{E}_{\mathsf{Q}}\Big[\int_0^T U_1(t,c_t)\mathrm{d}t+U_2(X_T^{x,c,\pi})\Big]+\gamma(\mathsf{Q})\Big).\end{aligned}$$

(3) 值函数u和v是相互共轭的, 即

$$u(x)=\inf_{y>0}(v(y)+xy),\qquad v(x)=\sup_{x>0}(u(x)-xy),$$

尤其v是凸的.

(4) v的导数满足

$$v'(\infty-)\in\Big[\inf_{R\in\mathcal{D}}\langle R,\mathcal{E}_T\rangle,\sup_{R\in\mathcal{D}}\langle R,\mathcal{E}_T\rangle\Big].$$

若$\mathcal{E}_T=0$, 则u和v的导数满足$u'(0+)=\infty$及$v'(\infty-)=0$.

(5) 存在对偶问题的一个解$(\widehat{\mathsf{Q}},\widehat{R})\in\mathcal{Q}\times\mathcal{D}$, 即

$$v(y)=\mathcal{V}_{\widehat{\mathsf{Q}}}\Big(y\frac{Y^{\widehat{R}}}{Z^{\widehat{\mathsf{Q}}}}\Big)+y\langle\widehat{R},\mathcal{E}_T\rangle+\gamma(\widehat{\mathsf{Q}}).$$

(6) 对任一$x>0$, 必存在一个最优消费投资策略$(\widehat{c},\widehat{\pi})\in\mathcal{A}(x)$, 若$(\widehat{\mathsf{Q}},\widehat{R})$是对偶问题的解, 对$y>0$, $x=-v'(y)$, 则

$$u(x)=\inf_{\mathsf{Q}\in\mathcal{Q}}(\mathcal{U}_{\mathsf{Q}}(\widehat{c})+\gamma(\mathsf{Q}))=\mathcal{U}_{\widehat{\mathsf{Q}}}(\widehat{c})+\gamma(\widehat{\mathsf{Q}})=u_{\widehat{\mathsf{Q}}}(x)+\gamma(\widehat{\mathsf{Q}}),$$

且$\widehat{c}_t = I_1(t, \widehat{y}Y_t^{\widehat{R}}/\widehat{Z}_t)$, $\widehat{X}_T^{x,c,\pi} = I_2(\widehat{y}Y_T^{\widehat{R}}/\widehat{Z}_T)$, 其中,

$$\widehat{Z} = \frac{\mathrm{d}\widehat{\mathsf{Q}}}{\mathrm{d}\mathsf{P}}, \qquad \widehat{Z}_t = \mathsf{E}[\widehat{Z}|\mathcal{F}_t], \qquad I_1(t,\cdot) = \Big(\frac{\partial U_1}{\partial x}(t,\cdot)\Big)^{-1}, \qquad I_2(\cdot) = \Big(\frac{\partial U_2}{\partial x}(\cdot)\Big)^{-1}.$$

为了证明上述定理2.1, 类似于Wittmuss (2010)的引理3.13, 我们有下面引理.

引理 2.1 存在$\widehat{Z} \in \mathcal{Z}$及$\widehat{R} \in \mathcal{D}$, 使得

$$v(y) = \mathsf{E}\Big[\widehat{Z}\int_0^T V_1\Big(t, y\frac{Y_t^{\widehat{R}}}{\widehat{Z}_t}\Big)\mathrm{d}t + \widehat{Z}V_2\Big(y\frac{Y_T^{\widehat{R}}}{\widehat{Z}_T}\Big)\Big] + y\langle \widehat{R}, \mathcal{E}_T\rangle + \gamma(\widehat{Z}).$$

我们和在前面对偶问题中$\mathcal{Q}_e$定义类似, 我们定义$\mathcal{Q}_e^f$表示满足条件$\mathsf{Q} \in \mathcal{Q}_e$且$u_{\mathsf{Q}}(x) < \infty$ (对某$x > 0$). 接下来, 我们证明这两个测度集上的对偶函数是相等的, 即我们有下面的引理.

引理 2.2 稳健问题(2.4)的对偶值函数满足

$$\widetilde{v}(y) = v(y) = \inf_{\mathsf{Q}\in\mathcal{Q}_e^f}(v_{\mathsf{Q}}(y) + \gamma(\mathsf{Q})) = \inf_{\mathsf{Q}\in\mathcal{Q}_e}(v_{\mathsf{Q}}(y) + \gamma(\mathsf{Q})).$$

引理 2.3 对任意$x > 0$, 必存在一个消费投资组合$(\widehat{c}, \widehat{\pi}) \in \mathcal{A}(x)$, 使得

$$\inf_{\mathsf{Q}\in\mathcal{Q}}\Big(\mathsf{E}_{\mathsf{Q}}\Big[\int_0^T U_1(t, \widehat{c}_t)\mathrm{d}t + U_2(\widehat{X}_T^{x,\widehat{c},\widehat{\pi}})\Big] + \gamma(\mathsf{Q})\Big) = u(x).$$

上面两个引理证明方法类似于Wittmuss (2010)中引理3.14和引理3.16的证明.

接下来, 我们可以用上面三个引理的结论来证明定理2.1.

证明: (1)~(3) 由于满足上述三个假设条件, 故由Schied (2007)中的定理2.3和2.5, 则可推出(1), (2)和(3)结论成立.

(4) 若$\mathcal{E}_T = 0$, 则由Schied (2007)中的定理2.3可直接得出$u'(0+) = \infty$及$v'(\infty-) = 0$. 若$\mathcal{E}_T > 0$, 由Karatzas和Zitkovic (2003)中的引理A.7, 对偶值函数$v(y)$的渐近性质, 可得

$$v'(\infty-) \in \Big[\inf_{R\in\mathcal{D}}\langle R, \mathcal{E}_T\rangle, \sup_{R\in\mathcal{D}}\langle R, \mathcal{E}_T\rangle\Big].$$

(5) 由引理2.1即可得出结论成立.

(6) 由引理2.3知, 对任意$x > 0$, 最优消费投资组合$(\widehat{c}, \widehat{\pi}) \in \mathcal{A}(x)$是存在的. 设$y > 0$, 且$v(y) + yx = u(x)$, 由于$v'(0+) = -\infty$和$v'(\infty-) = 0$, 故这样的$y$是存在的. 对$y$, 取对偶问题的解$(\widehat{\mathsf{Q}}, \widehat{R})$. 下面我们要证明$(\widehat{\mathsf{Q}}, \widehat{R})$是稳健问题的一个鞍点.

设$Z_1 \in \mathcal{Z}_e^f$, 其中$\mathcal{Z}_e^f = \{\mathrm{d}\mathsf{Q}/\mathrm{d}\mathsf{P}|\mathsf{Q} \in \mathcal{Q}_e^f\}$, 且定义

$$Z^\alpha = \alpha Z^1 + (1-\alpha)\widehat{Z}, \qquad \alpha \in (0,1].$$

则

$$v_{Z^\alpha}(y) + \gamma(Z^\alpha) \to v(y), \qquad (\alpha \to 0).$$

设$R^1\in\mathcal{D}$, 且R^1满足

$$\mathcal{V}_{Z^1}\Big(y\frac{Y^{R^1}}{\widehat{Z}^1}\Big)+\langle R^1,\mathcal{E}_T\rangle=v_{Z^1}(y).$$

定义$R^\alpha=\alpha R^1+(1-\alpha)\widehat{R}$, 可得到

$$\begin{aligned}v(y)&\le v_{Z^\alpha}(y)+\gamma(Z^\alpha)\\&\le \mathcal{V}_{Z^\alpha}\Big(y\frac{Y^{R^\alpha}}{Z^\alpha}\Big)+\langle R^\alpha,\mathcal{E}_T\rangle+\gamma(Z^\alpha)\\&\le \alpha(v_{Z^1}(y)+\gamma(Z^1))+(1-\alpha)(\widetilde{v}_{\widehat{Z}}(y)+\gamma(\widehat{Z})),\end{aligned}$$

其中$\widetilde{v}(y)=\inf\limits_{Z\in\mathcal{Z}}(v_Z(y)+\gamma(Z))$. 再由$v$的凸性, 则当$\alpha$趋于0时, 上面不等式右边趋于$v(y)$. 由对偶关系, 有

$$v_{Z^\alpha}+xy\ge u_{Z^\alpha},\qquad u_{Z^\alpha}+\gamma(Z^\alpha)\to u_{\widehat{Z}}+\gamma(\widehat{Z}).$$

因此, 有

$$u(x)=v(y)+yx=\lim_{\alpha\to0}(v_{Z^\alpha}(y)+xy+\gamma(Z^\alpha))\ge\lim_{\alpha\to0}(u_{Z^\alpha}(x)+\gamma(Z^\alpha))=u_{\widehat{Z}}(x)+\gamma(\widehat{Z}).$$

再由极大极小性质, 能得到$u(x)=u_{\widehat{Z}}+\gamma(\widehat{Z})$. 故由上面引理2.3, 有

$$u(x)=u_{\widehat{Z}}(x)+\gamma(\widehat{Z})\ge\mathcal{U}_{\widehat{Z}}(\widehat{c})+\gamma(\widehat{Z})\ge\inf_{\mathsf{Q}\in\mathcal{Q}}\mathcal{U}_{\mathsf{Q}}(\widehat{c})+\gamma(\widehat{Z})=u(x).$$

从而证明了$\langle\widehat{\mathsf{Q}},\widehat{R}\rangle$是一个鞍点.

下面证明

$$\widehat{c}_t=I_1\Big(t,y\frac{Y_t^{\widehat{R}}}{\widehat{Z}_t}\Big).$$

我们有

$$0\le V_1\Big(t,\frac{yY_t^{\widehat{R}}}{\widehat{Z}_t}\Big)+\frac{yY_t^{\widehat{R}}}{\widehat{Z}_t}\widehat{c}_t-U_1(t,\widehat{c}_t),\qquad 0\le V_2\Big(y\frac{Y_T^{\widehat{R}}}{\widehat{Z}_T}\Big)-U_2(X_T^{x,c,\pi}).$$

因此

$$\begin{aligned}0&\le \mathsf{E}_{\widehat{\mathsf{Q}}}\Big[\int_0^T V_1\Big(t,\frac{yY_t^{\widehat{R}}}{\widehat{Z}_t}\Big)\mathrm{d}t+\int_0^T\frac{yY_t^{\widehat{R}}}{\widehat{Z}_t}\widehat{c}_t\mathrm{d}t-\int_0^T U_1(t,\widehat{c}_t)\mathrm{d}t\Big]\\&\le \mathsf{E}_{\widehat{\mathsf{Q}}}\Big[\int_0^T V_1\Big(t,\frac{yY_t^{\widehat{R}}}{\widehat{Z}_t}\Big)\mathrm{d}t+\int_0^T\frac{yY_t^{\widehat{R}}}{\widehat{Z}_t}\widehat{c}_t\mathrm{d}t-\int_0^T U_1(t,\widehat{c}_t)\mathrm{d}t+V_2\Big(y\frac{Y_T^{\widehat{R}}}{\widehat{Z}_T}\Big)-U_2(X_T^{x,c,\pi})\Big]\\&\le v(y)+\mathsf{E}\Big[\int_0^T yY_t^{\widehat{R}}\widehat{c}_t\mathrm{d}t\Big]-y\langle\widehat{R},\mathcal{E}_T\rangle-u(x)\\&\le v(y)+yx-u(x)=0.\end{aligned}$$

所以有

$$0 = V_1\Big(t, \frac{yY_t^{\widehat{R}}}{\widehat{Z}_t}\Big) + \frac{yY_t^{\widehat{R}}}{\widehat{Z}_t}\widehat{c}_t - U_1(t, \widehat{c}_t).$$

从而$\widehat{c}_t = I_1(t, yY_t^{\widehat{R}}/\widehat{Z}_t)$. 同理证$\widehat{X}_T^{x,c,\pi} = I_2(yY_T^{\widehat{R}}/\widehat{Z}_T)$. □

显然, 如果$\mathcal{Q}$包含的唯一测度和测度P是等价的, 则我们所讨论的优化问题(2.4)就更容易了, 对这种特殊情形, 我们有下面的推论.

推论 2.1 若假设2.3和$\mathcal{Q}=\mathcal{Q}_e$成立, 且$\gamma$在$\mathcal{Q}$上严格凸, 则值函数$u$连续可微, u的对偶值函数v严格凸, 对每个$y>0$, 存在$\widehat{\mathsf{Q}}\in\mathcal{Q}$及$\widehat{R}\in\mathcal{D}$, 使得$v(y)=\mathcal{V}_{\widehat{\mathsf{Q}}}(yY^{\widehat{R}}/Z^{\widehat{\mathsf{Q}}})+y\langle\widehat{R},\mathcal{E}_T\rangle+\gamma(\widehat{\mathsf{Q}})$. 此外, $Y^{\widehat{R}}$是唯一的, 对任意$x>0$, 消费投资问题的最优解$(\widehat{c},\widehat{\pi})$是唯一的.

§3. Markov切换模型应用

在这一节, 我们要把上一部分推导的对偶理论结果应用到一个特定的市场模型中去, 而在这个特定的市场模型中, 一致效用泛函是通过一个具体的不确定集$\mathcal{Q}$和一个对数效用函数所给定, 且在该模型中, 我们可以通过建立相应的HJB方程来描述最优问题的解. 在我们的例子中, HJB方程是一个一般的微分方程, 而且我们可以通过利用MATLAB计算出该微分方程的数值解, 从而也就能计算出最优消费投资策略.

接下来我们考虑一个Markov切换模型, 即经济状态是借由一个连续时间的Markov链给出, 我们假定经济状态影响着一个简单的跳扩散模型的系数, 当然, 我们假定代理人是知道这些经济状态的. 对于代理人不知道将来可能会出现的经济状况, 即对不可观察的状态过程, 有一些这种情形下关于Markov切换模型研究的文献, 在那些文献中, 基本都应用了滤波技术才将问题得以解决. 据我们所知, 在面临模型不确定时, 还没有用滤波技术来研究该情形下Markov切换模型的研究. 这是因为: 由于一些参数是不可观察的, 所以滤波技术被应用. 信息的缺乏也是含糊性的来源, 滤波技术能给出一些参数, 而稳健方法也给出一些参数. 因此问题就出现了, 即, 含糊的哪一部分参数应当借助滤波技术去除? 哪一部分参数又可借助稳健方法去除? 或是先用滤波技术再用稳健方法? 还是先用稳健方法后用滤波技术? 为了避免上述问题出现, 所以在我们的例子中, 我们限定所有经济状态过程是可被观察到的.

在本文中, 代理人对Markov切换状态的速率是含糊的. 首先介绍我们的模型, 之后再证明我们的含糊集$\mathcal{Q}$满足前面的假设条件. 因为我们要用前面所讨论的对偶理论, 当然就需要研究对偶集. 最后, 我们再考虑对数效用函数的最优消费和投资组合问题, 并建立相应的HJB方程, 同时给出这些HJB方程的数值解及解的性质, 并就悲观投资者计算出其最优消费和投资策略, 即代理人试图最大化

$$\inf_{\mathsf{Q}\in\mathcal{Q}} \mathsf{E}_{\mathsf{Q}}\Big[\int_0^T \log(c_t)\mathrm{d}t + \log(X_T^{x,c,\pi})\Big].$$

设$(\Omega,\mathcal{F},(\mathcal{F}_t)_{t\le T},\mathsf{P})$为一带流概率空间, Ω为(W,Y)的路径空间, 这里的W是一个布朗运动, Y是一个对应状态空间$(e_1,e_2,\ldots,e_n)$上的连续时间Markov链, 生成元(Q矩阵)为

$$A=\begin{pmatrix} -\lambda^0 & \lambda^0 p_{1,2} & \cdots & \lambda^0 p_{1,n} \\ \lambda^0 p_{2,1} & -\lambda^0 & \cdots & \lambda^0 p_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda^0 p_{n,1} & \cdots & \lambda^0 p_{n,n-1} & -\lambda^0 \end{pmatrix},$$

其中λ^0是Markov链固定跳的速率, $\mathbb{P}=(p_{i,j})_{i,j=1,\ldots,n}$是一个随机矩阵, $(p_{i,i}=0,\ i=1,\ldots,n)$. Y可通过在给定Markov跳的时刻及转移矩阵$\mathbb{P}$的离散时间Markov链$\widetilde{Y}$条件下, 嵌入一个强度为$\lambda^0>0$的Poisson过程N来表示. 后面我们将会频繁使用Y的这个等价描述, 对这个证明, 为了方便, 我们在此只考虑$n=2$的情形. 若上面的信息流满足通常的条件, 且M_t是一个补偿泊松过程, 即$M_t=N_t-\lambda^0 t$. 注意到在概率测度Q下的密度为

$$\frac{\mathrm{d}\mathsf{Q}}{\mathrm{d}\mathsf{P}}=\mathcal{E}\Big(\int_0^{\cdot}\frac{(\lambda_s-\lambda^0)}{\lambda^0}\mathrm{d}M_s\Big)_T,$$

其中$(N_t)_{0\le t\le T}$是一个随机强度为$(\lambda_t)_{0\le t\le T}$的泊松过程, ($\mathcal{E}$表示随机指数). 设在外部市场因素$Y$下债券和股票的动力学方程为

$$\mathrm{d}S_t^0=S_t^0 r(Y_t)\mathrm{d}t,\qquad \mathrm{d}S_t=S_{t-}(\sigma(Y_t)\mathrm{d}W_t+b(Y_t)\mathrm{d}t+\delta(Y_{t-})\mathrm{d}N_t),$$

其中$\sigma>0$, 当然, 这个随机微分方程的解是存在的. 由于投资者以初始资本$x>0$投资在股票和债券上, 用以消费的消费率为c_t, 且假定在时刻t他投资在股票上的财富比例为π_t, 因此, 财富过程的随机微分方程为

$$\mathrm{d}X_t^{x,c,\pi}=\frac{X_{t-}^{x,c,\pi}\pi_{t-}}{S_{t-}}\mathrm{d}S_t+\frac{X_{t-}^{x,c,\pi}(1-\pi_{t-})}{S_{t-}^0}\mathrm{d}S_t^0-c_t\mathrm{d}t,\qquad X_0^{x,c,\pi}=x.$$

与前面类似, 我们要确保财富非负, 故

$$X_t^{x,c,\pi}\ge 0. \tag{3.1}$$

由于我们假定$\mathcal{A}(x)$为所有可能的消费投资机会集, 则对任意一个可能的消费投资机会, (3.1)式均成立. 在这种情形下, 一个效用函数为对数效用的悲观投资者的优化问题就成为

$$\max_{(c,\pi)\in\mathcal{A}(x)}\inf_{\mathsf{Q}\in\mathcal{Q}}\mathsf{E}_{\mathsf{Q}}\Big[\int_0^T U_1(c_t)\mathrm{d}t+U_2(X_T^{x,c,\pi})\Big].$$

由于我们考虑投资者对经济状态的转换速率是含糊的, 也即泊松过程N跳的速率是不确定的, 且我们假定不同经济状态之间的转移概率是已知的. 若设a_1,a_2为正的常数, 则出现在稳健效用泛函中的集$\mathcal{Q}$为

$$\mathcal{Q}=\Big\{\mathsf{Q}\Big|\frac{\mathrm{d}\mathsf{Q}}{\mathrm{d}\mathsf{P}}=\mathcal{E}\Big(\int_0^{\cdot}\frac{(\lambda_s-\lambda^0)}{\lambda^0}\mathrm{d}M_s\Big)_T,\ \lambda\in\Lambda\Big\},$$

Λ可被定义为

$$\Lambda=\{\lambda|\lambda_s\text{是一可料过程, 且}\lambda_s\in[a_1,a_2],\ a_1<\lambda^0<a_2\}.$$

由Wittmuss (2010)中引理4.1知, 假设2.1是成立的, 故我们可以用前面对偶理论的结果. 在这里, 我们用$\widetilde{U}_1$表示U_1的对偶函数, $\widetilde{U}_2$表示U_2的对偶函数, 因为要用对偶理论, 不妨设对偶集为

$$\mathcal{D}=\Big\{\mathsf{Q}\Big|\mathrm{d}\mathsf{Q}=\mathcal{E}\Big(-\int_0^\cdot\frac{b(Y_s)-r(Y_s)+\delta(Y_s)\nu_s}{\sigma(Y_s)}\mathrm{d}W_s+\int_0^\cdot\frac{\nu_s-\lambda^0}{\lambda^0}\mathrm{d}M_s\Big)_T\mathrm{d}\mathsf{P},\ \nu\in\mathcal{N}\Big\},$$

其中$\mathcal{N}=\Big\{\nu|\nu_s>0,\ \int_0^t\nu_s^2\mathrm{d}s<\infty\Big\}$, ν是可料的过程.

定理 3.1 若假设2.1和假设2.2均成立, 则(2.4)的对偶问题由下式给出, 即

$$v(y)=\inf_{\mathsf{Q}\in\mathcal{Q}}\inf_{D\in\mathcal{D}}\mathsf{E}_{\mathsf{Q}}\Big[\int_0^T\widetilde{U}_1\Big(y\frac{D_t}{S_t^0Z_t^0}\Big)\mathrm{d}t+\widetilde{U}_2\Big(y\frac{D_T}{S_T^0Z_T^0}\Big)\Big].$$

因此, 有

$$u(x)=\inf_{y>0}(v(y)+xy),$$

其中

$$D_t=\mathcal{E}\Big(-\int_0^\cdot\frac{b(Y_s)-r(Y_s)+\delta(Y_s)\nu_s}{\sigma(Y_s)}\mathrm{d}W_s+\int_0^\cdot\frac{\nu_s-\lambda^0}{\lambda^0}\mathrm{d}M_s\Big)_t.$$

证明: 我们将要证明$\mathcal{P}\subseteq\mathcal{D}\subseteq\mathcal{Y}(1)$, 这里$\mathcal{P}$是一局部等价鞅测度集, 且$\mathcal{Y}(1)$是Wittmuss (2010) Remark 3.7中的对偶集. 取$\mathsf{P}^*\in\mathcal{P}$, 则密度过程$D=(\mathrm{d}\mathsf{P}^*/\mathrm{d}\mathsf{P}|_{\mathcal{F}_t})_{0\le t\le T}$是一严格正鞅. 因此, 我们可以取随机对数

$$L_t:=\int_0^t\frac{1}{D_{s-}}\mathrm{d}D_s,\qquad 0\le t\le T,$$

这里L是一局部鞅. 应用鞅表示定理, 有$L_t=\int_0^t\theta_s^\nu\mathrm{d}W_s+\int\widetilde{\nu}_s\mathrm{d}M_s$, $0\le t\le T$, 其中, θ^ν, $\widetilde{\nu}$是满足L_t积分有定义的可料过程. 故

$$\frac{\mathrm{d}\mathsf{P}^*}{\mathrm{d}\mathsf{P}}=\mathcal{E}\Big(\int_0^\cdot\theta_s^\nu\mathrm{d}W_s+\int_0^\cdot\widetilde{\nu}_s\mathrm{d}M_s\Big)_T.$$

对在P^*下的股票折现过程$\widetilde{S}$, 由Girsanov定理, 有

$$\mathrm{d}\widetilde{S}_t=\widetilde{S}_t(\sigma(Y_t)\mathrm{d}\widetilde{W}_t+\delta(Y_t)\mathrm{d}\widetilde{M}_t+(\sigma(Y_t)\theta_t^\nu+\delta(Y_t)\widetilde{\nu}_t\lambda^0+b(Y_t)+\lambda^0\delta(Y_t)-r(Y_t))\mathrm{d}t).$$

这里$\widetilde{W}_t=W_t-\int_0^t\theta_s^\nu\mathrm{d}s$, 和$\widetilde{M}_t=M_t-\int_0^t\widetilde{\nu}_s\lambda^0\mathrm{d}s$是$\mathsf{P}^*$下的局部鞅. 因此, 若设$\widetilde{\nu}_t=(\nu_t-\lambda^0)/\lambda^0$, 只需

$$\theta_t^\nu=-\frac{b(Y_t)-r(Y_t)+\delta(Y_t)\lambda^0(\widetilde{\nu}_t+1)}{\sigma(Y_t)}=-\frac{b(Y_t)-r(Y_t)+\delta(Y_t)\nu_t}{\sigma(Y_t)},$$

就有$\widetilde{S}$是P^*下的局部鞅, 故$\mathsf{P}^* \in \mathcal{D}$. 又$D \in \mathcal{D}$是一个正局部鞅, 对$\widetilde{S}D$应用Itô公式, 故它也是一局部鞅, 而且还是一上鞅, 故$\mathcal{D} \subseteq \mathcal{Y}(1)$. 最后再由Wittmuss (2010) Remark 3.7, Schied (2007) Remark 2.7及引理2.2, 即可得出结论成立. □

接下来我们将借助于对偶问题的HJB方程来描绘最优消费和投资组合策略. 由于效用函数U_1, U_2明显满足假设2.2, 若存在$\mathsf{Q}_0 \in \mathcal{Q}$, 且$x > 0$, 使得$u_{\mathsf{Q}_0}(x) < \infty$, 则假设2.3也就满足了, 故可以应用前面对偶理论的结果.

令$z > 0$, 根据定理3.1, 对偶问题为

$$
\begin{aligned}
\widetilde{u}(z) &= \inf_{\nu\in\mathcal{N}} \inf_{\lambda\in\Lambda} \mathsf{E}_{\mathsf{Q}_\lambda}\Big[\int_0^T \widetilde{U}_1\Big(\frac{zD_t^\nu}{S_t^0 Z_t^\lambda}\Big)\mathrm{d}t + \widetilde{U}_2\Big(\frac{zD_T^\nu}{S_T^0 Z_T^\lambda}\Big)\Big] \\
&= \inf_{\nu\in\mathcal{N}} \inf_{\lambda\in\Lambda} \mathsf{E}_{\mathsf{Q}_\lambda}\Big[\int_0^T \Big(-1-\log\frac{zD_t^\nu}{S_t^0 Z_t^\lambda}\Big)\mathrm{d}t + \Big(-1-\log\frac{zD_T^\nu}{S_T^0 Z_T^\lambda}\Big)\Big],
\end{aligned}
$$

其中

$$
D_t^\nu = \mathcal{E}\Big(\int_0^\cdot \theta_s^\nu \mathrm{d}W_s + \int_0^\cdot \frac{\nu_s-\lambda^0}{\lambda^0}\mathrm{d}M_s\Big)_t, \qquad Z_t^\lambda = \mathcal{E}\Big(\int_0^\cdot \frac{\lambda_s-\lambda^0}{\lambda^0}\mathrm{d}M_s\Big)_t,
$$

$0 \le t \le T$, 则我们得到原问题的解

$$
u(x) = \min_{z>0}(\widetilde{u}(z) + xz) = \widetilde{u}\Big(\frac{1}{x}\Big) + 1.
$$

为了计算出上面原问题的解, 由Wittmuss (2010)中引理4.3, 对所有$t \ge 0$, 有

$$
\begin{aligned}
&\inf_{\nu\in\mathcal{N}} \inf_{\lambda\in\Lambda} \mathsf{E}_{\mathsf{Q}_\lambda}\Big[-1-\log\frac{D_t^\nu}{S_t^0 Z_t^\lambda}\Big] \\
=\ &\inf_{\lambda\in\Lambda} \mathsf{E}_{\mathsf{Q}_\lambda}\Big[-1+\int_0^t \Big(\frac{1}{2}(\theta_s^{\nu^*})^2 + \nu_s^* - \lambda_s + (\log\lambda_s - \log\nu_s^*) - r(Y_s)\Big)\mathrm{d}s\Big],
\end{aligned}
$$

其中

$$
\nu_s^* = \nu^*(Y_s, \lambda_s) = \begin{cases} \dfrac{\eta + \sqrt{\eta^2 + 4\sigma^2\lambda}}{2\delta(Y_s)^2}, & \text{if } \delta(Y_s) \ne 0; \\ \lambda_s, & \text{if } \delta(Y_s) = 0, \end{cases}
$$

这里$\eta = b(Y_s)\delta(Y_s) + \sigma(Y_s)^2$. 故由动态规划原理, 可定义

$$
\begin{aligned}
J(t,y,\nu,\lambda) &:= \mathsf{E}\Big[\int_0^T Z_t^\lambda \log\frac{S_t^0 Z_t^\lambda}{D_t^\nu}\mathrm{d}t + Z_T^\lambda \log\frac{S_T^0 Z_T^\lambda}{D_T^\nu}\Big] \\
&= \mathsf{E}_{\mathsf{Q}_\lambda}\Big[\int_0^T \log\frac{S_t^0 Z_t^\lambda}{D_t^\nu}\mathrm{d}t + \log\frac{S_T^0 Z_T^\lambda}{D_T^\nu}\Big].
\end{aligned}
$$

故值函数为

$$
V(t,y) := \inf_{\nu\in\mathcal{N}} \inf_{\lambda\in\Lambda} J(t,y,\nu,\lambda).
$$

从而$\widetilde{u}(z)=-1-\log z$. 下面利用经典的随机控制结果可得到相应的HJB方程. 设Markov链Y的生成元矩阵为A, 则在测度Q_λ下生成元可设为

$$A_t^\lambda=\begin{pmatrix} -\lambda_t & \lambda_t p_{1,2} & \cdots & \lambda_t p_{1,n} \\ \lambda_t p_{2,1} & -\lambda_t & \cdots & \lambda_t p_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_t p_{n,1} & \cdots & \lambda_t p_{n,n-1} & -\lambda_t \end{pmatrix}, \qquad 0\le t\le T,$$

其中$(\lambda_t)_{0\le t\le T}$是一个可料的随机过程, 它本身依赖于$Y$. 下面, 我们将证明下列HJB方程系统刻画了上面的值函数, 且HJB方程的解必须满足

$$\begin{aligned} v_t^i(t) &= \inf_{\lambda\in[a_1,a_2]}((1+t)c_i(\lambda)+(A^\lambda v(t,\cdot))_i) \\ &= \inf_{\lambda\in[a_1,a_2]}\Big((1+t)c_i(\lambda)+\lambda\Big(\sum_{j=1}^n p_{i,j}v^j(t)-v^i(t)\Big)\Big), \end{aligned} \tag{3.2}$$

其中, 边界条件为

$$v^i(0)=0, \qquad i=1,\dots,n. \tag{3.3}$$

且若$\delta(e_i)\neq 0$,

$$\begin{aligned} c_i(\lambda) &= \frac{1}{2}\left(\left[b(e_i)-r(e_i)+\delta(e_i)\left(\beta(e_i)+\sqrt{\beta(e_i)^2+\frac{\sigma(e_i)^2\lambda}{\delta(e_i)^2}}\right)\right]\Big/\sigma(e_i)\right)^2 \\ &\quad -\lambda+\beta(e_i)+\sqrt{\beta(e_i)^2+\frac{\sigma(e_i)^2\lambda}{\delta(e_i)^2}}+r(e_i) \\ &\quad +\left(\log\lambda-\log\left(\beta(e_i)+\sqrt{\beta(e_i)^2+\frac{\sigma(e_i)^2\lambda}{\delta(e_i)^2}}\right)\right)\lambda, \end{aligned}$$

若$\delta(e_i)=0$, 则

$$c_i(\lambda)=\frac{1}{2}\Big(\frac{b(e_i)-r(e_i)}{\sigma(e_i)}\Big)^2,$$

其中

$$\beta(e_i)=-\frac{(b(e_i)-r(e_i))\delta(e_i)+\sigma(e_i)^2}{2\delta(e_i)^2}.$$

定理 3.2　上面(3.2)式和(3.3)式存在唯一解$v\in C^1(\mathbf{R},\mathbf{R}^n)$, 且该解满足$v=V$, 若$\lambda^*$是一可测过程, 则(3.2)在$\widehat{\lambda}:=\lambda^*$处取得最小值, 而$\lambda^*$是来自集$\Lambda$的一个可行的控制策略, 且$\widehat{\nu}=\nu_s^*$, $V(t,y)=J(t,y,\widehat{\nu},\widehat{\lambda})$.

证明:　只证$n=2$的情形.

设$\nu \in \mathcal{N}$, λ是在$[a_1, a_2]$上取值的一个可料过程. 由前面定义知

$$\begin{aligned} J(t,y,\nu,\lambda) &= \mathsf{E}\Big[\int_0^T Z_t^\lambda \log\frac{S_t^0 Z_t^\lambda}{D_t^\nu}\mathrm{d}t + Z_T^\lambda \log\frac{S_T^0 Z_T^\lambda}{D_T^\nu}\Big] \\ &= \mathsf{E}_{\mathsf{Q}_\lambda}\Big[\int_0^T \log\frac{S_t^0 Z_t^\lambda}{D_t^\nu}\mathrm{d}t + \log\frac{S_T^0 Z_T^\lambda}{D_T^\nu}\Big] \\ &= \mathsf{E}_{\mathsf{Q}_\lambda}\Big[-\int_0^T \theta_s^\nu \mathrm{d}W_s + \int_0^T (\log\lambda_s - \log\nu_s)\mathrm{d}M_s^\lambda \\ &\quad + \int_0^T \Big(\frac{1}{2}(\theta_s^\nu)^2 + \nu_s - \lambda_s + r + (\log\lambda_s - \log\nu_s)\lambda_s\Big)\mathrm{d}s\Big], \end{aligned}$$

其中, $M_t^\lambda = N_t^\lambda - \displaystyle\int_0^T \lambda_s \mathrm{d}s$.

函数$J(t,y,\nu,\lambda)$在$\nu_s^* = \begin{cases} \beta + \sqrt{\beta^2 + \dfrac{\sigma^2 * \lambda_s}{\delta^2}}, & \text{if } \ \delta(Y_s) \neq 0 \\ \lambda_s, & \text{if } \ \delta(Y_s) = 0 \end{cases}$处取得最小.

现在选一函数$v \in C^1(\mathbf{R}\times\mathbf{R}^2, \mathbf{R})$, 使得$v(t,e_i) = v^i(t)$, $i=1,2$. 由Itô引理, 有

$$\begin{aligned} \mathrm{d}v(u-t, Y_t) &= -v_t(u-t, Y_{t-})\mathrm{d}t + v_y(u-t, Y_{t-})\mathrm{d}Y_t \\ &\quad + \triangle\, v(u-t, Y_t) - v_y(u-t, Y_{t-})\triangle Y_t \\ &= -v_t(u-t, Y_{t-})\mathrm{d}t + \triangle v(u-t, Y_t). \end{aligned}$$

由于$v \in C^1$, 故当且仅当Markov经济状态发生改变时才有一次跳$(0<t<T)$, 我们记$\widehat{Y}_t$为状态Y_t的对立状态, 则

$$\sum_{0\le t\le T} \triangle v(u-t, Y_t) = \sum_{0\le t\le T} (v(u-t, \widehat{Y}_{t-}) - v(u-t, Y_{t-}))(\mathrm{d}M_t^\lambda + \lambda_t \mathrm{d}t),$$

其中$M^\lambda = N - \displaystyle\int_0^T \lambda_s \mathrm{d}s$, 且$M^\lambda$是$\mathsf{Q}_\lambda$的鞅. 由于$\mathrm{d}t$项的系数在边界上连续, 所以有

$$\begin{aligned} &\int_0^u \mathrm{d}v(u-t, Y_t) = v(0, Y_u) - v(u, y) \\ =\ & \int_0^u (-v_t(u-t, Y_{t-}) + (v(u-t, \widehat{Y}_{t-}) - v(u-t, Y_{t-}))\lambda_t)\mathrm{d}t \\ & + \int_0^u (v(u-t, \widehat{Y}_{t-}) - v(u-t, Y_{t-}))\mathrm{d}M_t^\lambda \\ =\ & \int_0^u (-v_t(u-t, Y_t) + (v(u-t, \widehat{Y}_t) - v(u-t, Y_t))\lambda_t)\mathrm{d}t \\ & + \int_0^u (v(u-t, \widehat{Y}_{t-}) - v(u-t, Y_{t-}))\mathrm{d}M_t^\lambda \\ \ge\ & \int_0^u (1 + (u-t))c(Y_t, \lambda_t)\mathrm{d}t + \int_0^u (v(u-t, \widehat{Y}_{t-}) - v(u-t, Y_{t-}))\mathrm{d}M_t^\lambda \\ =\ & \int_0^u \Big(c(Y_t, \lambda_t) + \int_0^t c(Y_s, \lambda_s)\mathrm{d}s\Big)\mathrm{d}t + \int_0^u (v(u-t, \widehat{Y}_{t-}) - v(u-t, Y_{t-}))\mathrm{d}M_t^\lambda. \end{aligned}$$

由于v有界, 故

$$v(u,y)\le \mathsf{E}_{\mathsf{Q}}\Big[\int_0^u\Big(c(Y_t,\lambda_t)+\int_0^t c(Y_s,\lambda_s)\mathrm{d}s\Big)\mathrm{d}t\Big]\le J(u,y,\nu,\lambda).$$

取$\lambda^*(t,e_i)=\underset{\lambda\in\Lambda}{\operatorname{argmin}}((1+t)c_i(\lambda)+\lambda(v(t,\widehat{e}_i)-v(t,e_i)))$. 由于$c_i(\lambda)$是关于$\lambda$严格凸函数, 且可微, 因此, $\lambda^*(t,e_i)$要么取a_1, 要么取a_2, 或者满足下面的微分方程:

$$c_i'(\lambda)=\frac{v(t,\widehat{e}_i)-v(t,e_i)}{1+t}.$$

该方程右边是一个关于时间t的连续函数, 而$c_i'(\lambda)$严格单调减, $\lambda^*(t,e_i)$是t的连续函数. 故$\widehat{\lambda}_s=\lambda^*(u-s,Y_{s-})$是一个可容许策略. 又由(3.2)式, 得到$v=V$. □

引理 3.1 若微分方程(3.2)满足全局的Lipschitz条件, 则(3.2)有唯一解.

该引理证明类似于Wittmuss (2010)中的引理4.5证明.

若给定参数σ,δ和b, 可用MATLAB计算出上面的HJB方程的数值解, 同时有

$$\inf_{\lambda\in[a_1,a_2]}c_2(\lambda)>\inf_{\lambda\in[a_1,a_2]}c_1(\lambda)>0,$$

且$v^2>v^1$. 在这里, 我们只考虑两个状态之间的转换, 即$(i=1,2)$的情形, 这时对应的HJB方程, 也即(3.2)式为

$$\begin{cases} v_t^1(t)=\inf\limits_{\lambda\in[a_1,a_2]}((1+t)c_i(\lambda)+\lambda(v^2(t)-v^1(t))),\\ v_t^2(t)=\inf\limits_{\lambda\in[a_1,a_2]}((1+t)c_i(\lambda)+\lambda(v^1(t)-v^2(t))).\end{cases}$$

下面图1和图2是给定参数$a_1=1.2$, $a_2=30$, $T=7$, $r=0$, $\delta=[-0.7,-0.316]$, $b=[1,0.035]$, $\sigma=[1,1]$ (其中, δ,b,σ均是二维向量)时, 上式两个状态转换的HJB方程的数值模拟解和最优λ的模拟取值情况.

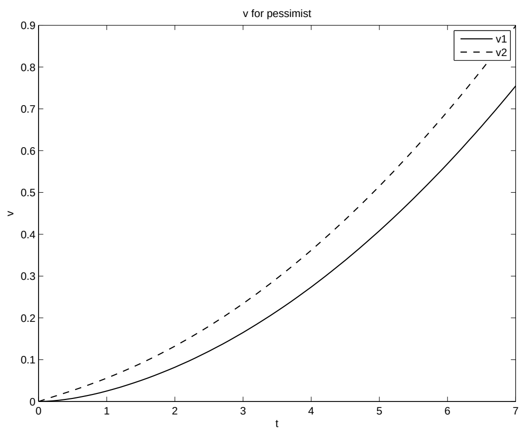

图1 对应的HJB方程的解

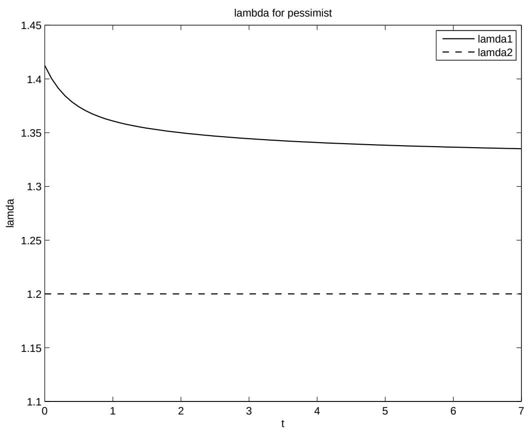

图2 满足对应的HJB方程解的最优λ的取值

由图1和图2知HJB方程的数值模拟解. 当数值模拟解出来后, 我们就可以根据下列命题求出悲观投资者的最优消费和投资策略.

命题 3.1 悲观投资者的最优财富过程为$\widehat{X}_t^{x,c,\pi}=x(S_t^0Z_t^{\widehat{\nu}})/D_t^{\widehat{\nu}}$, 最优消费率为$\widehat{c}_t=x(S_t^0Z_t^{\widehat{\nu}})/D_t^{\widehat{\nu}}$, 最优投资组合过程为

$$\widehat{\pi}(t,Y_t)=\begin{cases}\dfrac{b(Y_t)-r(Y_t)+\widehat{\nu}_t\delta(Y_t)}{\sigma(Y_t)^2}=\dfrac{\widehat{\lambda}_t-\widehat{\nu}_t}{\delta(Y_t)\widehat{\nu}_t}, & \text{if }\ \delta(Y_t)\neq 0,\\ \dfrac{b(Y_t)-r(Y_t)}{\sigma(Y_t)^2}, & \text{if }\ \delta(Y_s)=0,\end{cases}$$

其中x为初始资本, $\widehat{\lambda}$和$\widehat{\nu}$是定理3.2中的最优值.

证明: 由定理2.1可直接得出$\widehat{c}$, 又因为$I(y)=1/y$, $\widehat{z}=1/x$, 现考虑P下的鞅$R=(R_t)_{0\le t\le T}$, 且定义

$$R_t=\Big(\frac{\widehat{X}_t^{x,c,\pi}}{S_t^0}+\int_0^t\frac{\widehat{c}_u}{S_u^0}\mathrm{d}u\Big)D_t^{\widehat{\nu}},\qquad 0\le t\le T.$$

对$0\le t\le T$, 我们有

$$\begin{aligned}R_t&=\mathsf{E}[R_T|\mathcal{F}_t]=\mathsf{E}\Big[D_T^{\widehat{\nu}}\int_0^T\frac{\widehat{c}_u}{S_u^0}\mathrm{d}u|\mathcal{F}_t\Big]\\&=D_t^{\widehat{\nu}}\int_0^t\frac{\widehat{c}_u}{S_u^0}\mathrm{d}u+\mathsf{E}\Big[D_T^{\widehat{\nu}}\int_0^T\frac{xZ_u^{\widehat{\lambda}}S_u^0}{D_u^{\widehat{\nu}}S_u^0}\mathrm{d}u|\mathcal{F}_t\Big]\\&=D_t^{\widehat{\nu}}\int_0^t\frac{\widehat{c}_u}{S_u^0}\mathrm{d}u+x\int_t^TZ_t^{\widehat{\lambda}}\mathrm{d}u\\&=D_t^{\widehat{\nu}}\int_0^t\frac{\widehat{c}_u}{S_u^0}\mathrm{d}u+xZ_t^{\widehat{\lambda}}.\end{aligned}$$

与上面R_t定义进行比较, 故能得到

$$\widehat{X}_t^{x,c,\pi}=x\frac{S_t^0Z_t^{\widehat{\lambda}}}{D_t^{\widehat{\nu}}},$$

对$\widehat{X}_t^{x,c,\pi}=x(S_t^0Z_t^{\widehat{\lambda}})/D_t^{\widehat{\nu}}$应用Itô公式, 及Wittmuss (2010) (4.5)式, 有

$$\mathrm{d}\widehat{X}_t^{x,c,\pi}=\widehat{X}_{t-}^{x,c,\pi}\Big(-\theta_t^{\widehat{\nu}}\mathrm{d}W_t+\frac{\widehat{\lambda}_t-\widehat{\nu}_t}{\widehat{\nu}_t}\mathrm{d}M_t+\Big((\theta_t^{\widehat{\nu}})^2+\widehat{\nu}_t-\widehat{\lambda}_t+r_t+\lambda^0\frac{\widehat{\lambda}_t-\widehat{\nu}_t}{\widehat{\nu}_t}\Big)\mathrm{d}t\Big).$$

又根据财富演变过程的随机微分方程有

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\widehat{X}_t^{x,c,\pi}&=\widehat{X}_{t-}^{x,c,\pi}(\sigma(Y_t)\pi_t\mathrm{d}W_t+((b(Y_t)-r(Y_t))\pi_t+r(Y_t))\mathrm{d}t+\pi_t\delta(Y_t)\mathrm{d}N_t)\\&=\widehat{X}_{t-}^{x,c,\pi}(\sigma(Y_t)\pi_t\mathrm{d}W_t+\pi_t\delta(Y_t)\mathrm{d}M_t+((b(Y_t)-r(Y_t)+\lambda^0\delta(Y_t))\pi_t+r(Y_t))\mathrm{d}t).\end{aligned}$$

通过比较$\mathrm{d}W_t$和$\mathrm{d}M_t$项, 故可推出$\widehat{\pi}_t$. □

§4. 小　　结

本文是在模型不确定框架下, 利用稳健偏好和对偶理论处理了在同时带有消费和终端财富情形下的最优消费投资决策问题, 本文讨论的模型不同于Wittmuss (2010)的模型. 我们讨论的效用函数不但与消费有关, 还和终端财富有关, 这比只考虑消费而不考虑终端财富更符合市场实际, 因此具有一定的理论意义和实际应用价值. 基于模型不确定环境, 同时考虑通胀因素情形下, 利用对偶理论处理带动态消费流和终端财富效用的最优消费和投资策略问题有待进一步研究.

参 考 文 献

[1] Merton, R.C., Lifetime portfolio selection under uncertainty: the continuous-time case, *The Review of Economics and Statistics*, **51(3)**(1969), 247–257.

[2] Merton, R.C., Optimum consumption and portfolio rules in a continuous-time model, *Journal of Economic Theory*, **3(4)**(1971), 373–413.

[3] Knight, F.H., *Risk, Uncertainty and Profit*, Houghton Mifflin, Boston, 1921.

[4] Gilboa, I. and Schmeidler, D., Maxmin expected utility with non-unique prior, *Journal of Mathematical Economics*, **18(2)**(1989), 141–153.

[5] Schied, A., Optimal investments for risk- and ambiguity-averse preferences: a duality approach, *Finance and Stochastics*, **11(1)**(2007), 107–129.

[6] Talay, D. and Zheng, Z., Worst case model risk management, *Finance and Stochastics*, **6(4)**(2002), 517–537.

[7] Quenez, M.-C., Optimal portfolio in a multiple-priors model, *Seminar on Stochastic Analysis, Random Fields and Applications IV, Progress in Probability 58*, Birkhauser, Basel, 2004, 291–321.

[8] Becherer, D., Bounded solutions to backward SDE's with jumps for utility optimization and indifference hedging, *The Annals of Applied Probability*, **16(4)**(2006), 2027–2054.

[9] Muller, M., Market completion and robust utility maximization, PhD thesis, Humboldt University of Berlin, 2005.

[10] Schied, A., On the Neyman-Pearson problem for law-invariant risk measures and robust utility functionals, *The Annals of Applied Probability*, **14(3)**(2004), 1398–1423.

[11] Schied, A., Robust optimal control for a consumption-investment problem, *Mathematical Methods of Operations Research*, **67(1)**(2008), 1–20.

[12] Burgert, C. and Ruschendorf, L., Optimal consumption strategies under model uncertainty, *Statistics and Decisions*, **23(1)**(2005), 1–14.

[13] Schied, A. and Wu, C.-T., Duality theory for optimal investments under model uncertainty, *Statistics and Decisions*, **23(3)**(2005), 199–217.

[14] Gundel, A., Robust utility maximization for complete and incomplete market models, *Finance and Stochastics*, **9(2)**(2005), 151–176.

[15] Follmer, H. and Gundel, A., Robust projections in the class of martingale measures, *Illinois Journal of Mathematics*, **50(2)**(2006), 439–472.

[16] Cvitanic, J., Schachermayer, W. and Wang, H., Utility maximization in incomplete markets with random endowment, *Finance and Stochastics*, **5(2)**(2001), 259–272.

[17] Karatzas, I. and Zitkovic, G., Optimal consumption from investment and random endowment in incomplete semimartingale markets, *The Annals of Probability*, **31(4)**(2003), 1821–1858.

[18] Hugonnier, J. and Kramkov, D., Optimal investment with random endowments in incomplete markets, *The Annals of Applied Probability*, **14(2)**(2004), 845–864.

[19] Bauerle, N. and Rieder, U., Portfolio optimization with jumps and unobservable intensity process, *Mathematical Finance*, **17(2)**(2007), 205–224.

[20] Hernandez-Hernandez, D. and Schied, A., A control approach to robust utility maximization with logarithmic utility and time-consistent penalties, *Stochastic Processes and their Applications*, **117(8)** (2007), 980–1000.

[21] Fei, W.Y., Optimal consumption and portfolio choice with ambiguity and anticipation, *Information Sciences*, **177(23)**(2007), 5178–5190.

[22] Fei, W.Y., Optimal portfolio choice based on α-MEU under ambiguity, *Stochastic Models*, **25(3)** (2009), 455–482.

[23] 费为银, 李淑娟, Knight不确定下带通胀的最优消费和投资模型研究, 工程数学学报, **29(6)**(2012), 799–806.

[24] 费为银, 陈超, 梁勇, Knight不确定下考虑负效用的消费投资问题研究, 应用概率统计, **29(1)**(2013), 53–63.

[25] 夏登峰, 费为银, 刘宏建, 变折现率下带含糊和预期的投资问题研究, 应用概率统计, **26(3)**(2010), 270–276.

[26] 韩立岩, 泮敏, 基于奈特不确定性随机波动率期权定价, 系统工程理论与实践, **32(6)**(2012), 1175–1183.

[27] Wittmuss, W., Robust optimization of consumption with random endowment, *Stochastics An International Journal of Probability and Stochastic Processes: formerly Stochastics and Stochastics Reports*, **80(5)**(2008), 459–475.

[28] Wittmuss, W., Optimization of dynamic consumption streams under model uncertainty, PhD thesis, Berlin University of Technology, 2010.

[29] 余敏秀, 费为银, 吕会影, 模型不确定环境下最优动态投资问题的研究, 中国科学技术大学学报, **44(3)** (2014), 194–202.

[30] Fei, W.Y. and Fei, C., Optimal stochastic control and optimal consumption and portfolio with G-Brownian motion, http://arxiv.org/abs/1309.0209v1, 2013.

[31] 费为银, 李钰, 石学芹, 李娟, 奈特不确定和部分信息下的最优交易策略, 应用数学学报, **37(2)**(2014), 193–205.

[32] 梁勇, 费为银, 唐仕冰, 李帅, Knight不确定及机制转换环境下带通胀的最优投资问题研究, 数学杂志, **34(2)**(2014), 335–344.

[33] 李娟, 费为银, 石学芹, 李钰, 奈特不确定下资产收益率发生紊乱的最优投资模型研究, 高校应用数学学报A辑, **28(1)**(2013), 13–22.

[34] Fei, W.Y., Optimal consumption-leisure, portfolio and retirement selection based on α-maxmin expected CES utility with ambiguity, *Applied Mathematics: A Journal of Chinese Universities* (*Series B*), **27(4)**(2012), 435–454.

[35] 石学芹, 费为银, 李娟, 李钰, 奈特不确定环境下固定供款型养老基金最优投资策略研究, 中国科学技术大学学报, **44(3)**(2014), 188–193, 226.

Optimal Consumption and Portfolio with Ambiguity to Markovian Switching

Yu Minxiu　　Fei Weiyin　　Xia Dengfeng

(*School of Mathematics and Physics, Anhui Polytechnic University, Wuhu, 241000*)

This paper considers the problem of maximizing expected utility from consumption and terminal wealth under model uncertainty for a general semimartingale market, where the agent with an initial capital and a random endowment can invest. To find a solution to the investment problem we use the martingale method. We first prove that under appropriate assumptions a unique solution to the investment problem exists. Then we deduce that the value functions of primal problem and dual problem are convex conjugate functions. Furthermore we consider a diffusion-jump-model where the coefficients depend on the state of a Markov chain and the investor is ambiguity to the intensity of the underlying Poisson process. Finally, for an agent with the logarithmic utility function, we use the stochastic control method to derive the Hamilton-Jacobi-Bellmann (HJB) equation. And the solution to this HJB equation can be determined numerically. We also show how thereby the optimal investment strategy can be computed.

Keywords: Knight uncertainty, portfolio, Markovian switching, dual theory, martingale method, stochastic control.

AMS Subject Classification: 65C30, 91B28.