综述报告

正规部分因子设计的最优性理论与构造方法 *

赵 胜 利
(曲阜师范大学统计学院, 曲阜, 273165)

摘 要

部分因子设计在各类试验中应用广泛, 关于部分因子设计的最优性理论及构造方法是试验设计研究的核心内容. 1980年以来, 很多研究者对此进行了研究, 本文主要对其中涉及正规部分因子设计的最优性理论及构造方法进行归纳总结.

关键词: 正规部分因子设计, 分辨度, 最小低阶混杂, 纯净, 估计容量, 一般最小低阶混杂.

学科分类号: O212.6.

§1. 引 言

试验是人们认识自然、了解自然的重要手段, 它在各个学科领域, 如农业、工业、医药、生物、现代通讯、航空航天等, 都有十分广泛的应用, 许多重要的科学规律都是通过科学试验发现和证实的, 所以科学试验是人类赖以生存和发展的重要手段. 自从英国统计学家R.A. Fisher创立试验设计以来, 试验设计已经成为统计学的一个重要分支, 它的主要任务是研究设计的优良性准则、最优设计的构造和对试验得来的数据进行分析的方法, 以使试验安排最科学、实施试验最经济、效率和精度最高, 并由分析得出的决策最优. 著名统计学家G.E.P. Box曾说, 假如有10%的工程师使用各种试验设计方法, 产品的质量和数量都会得到很大提高. 由此可见对试验设计的研究和普及对经济发展起到重大的推动作用. 近年来, 工农业生产、生物医药、质量工程等领域的发展, 尤其是生命科学和临床医学的需要、产品质量的设计和改进, 对试验设计特别是因子设计提出了越来越多和越来越高的要求, 使得对因子设计的研究向更深层次发展, 在该研究领域产生了多种理论、方法和新成果.

因子设计(factorial design)在各类试验中应用非常广泛, 它常用于研究试验指标受各种因素(因子, factor)影响是否显著. 全设计(full design)是包含各个因子的所有水平(level)组

*国家自然科学基金项目(11171165, 11371223)、山东省高校优秀科研创新团队计划、曲阜师范大学应用概率统计优秀科研创新团队计划(0230518)和曲阜师范大学优秀青年教师学术资助计划资助.

本文2015年3月4日收到, 2015年4月16日收到修改稿.

doi: 10.3969/j.issn.1001-4268.2015.03.009

合的设计, 其优点是能够估计所有因子的主效应(main effect)及全部交互作用(interaction). 但是, 随着因子数的增加, 所有因子的水平组合数迅速增加. 例如, 10个二水平因子的所有水平组合数就达到了1024. 由于受经费等因素的限制, 如此数量的试验次数是一般试验所无法承受的. 这种情况下, 试验者只能选取全设计的一部分来实施试验, 称为部分因子设计(fractional factorial design). 如何从全部试验中挑选一个好的部分进行试验, 以达到试验安排最科学、实施试验最经济、效率和精度最高, 并由分析得出的决策最优的目的成为试验者最关心的问题. 这一问题使得对因子设计的最优性准则和构造方法的研究成为国际试验设计领域的一个长期的重要研究课题. 从上世纪80年代以来, 对试验设计的研究有很多优秀的成果和新的突破, 本文对这些成果做简要归纳总结.

§2. 基本概念

假设一个试验中有n个二水平因子$a_1, a_2, \ldots, a_n$, 共有2^n个不同的水平组合, 但是只能进行2^k次试验($k < n$). 令

$$\begin{aligned}
1 &= (-1, +1, -1, +1, \ldots, -1, +1, -1, +1)', \\
2 &= (-1, -1, +1, +1, \ldots, -1, -1, +1, +1)', \\
&\vdots \\
k &= (-1, -1, \ldots, -1, -1, +1, +1, \ldots, +1, +1)'
\end{aligned}$$

为k个2^k维向量, $H_k = H(1, 2, \ldots, k)$表示由独立列$1, 2, \ldots, k$生成的饱和设计, 即

$$H_k = \{1, 2, 12, 3, 13, 23, 123, \ldots, k, 1k, 2k, 12k, \ldots, 12\cdots k\},$$

其中, 12表示由1和2两个独立列对应元素的乘积生成的向量, 其它乘积列, 如13等类似得到. 记$N = 2^k$, 显然, H_k是一个$N \times (N-1)$阶矩阵. 如$H_3 = \{1, 2, 12, 3, 13, 23, 123\}$表示由3个8维向量1, 2, 3生成的饱和设计, 是一个8×7阶的矩阵, 如表1所示.

在H_k中选取n个列使其中包含k个独立列, 不失一般性, 可以假设包含独立列$1, 2, \ldots, k$. 把n个因子$a_1, a_2, \ldots, a_n$分别安排在选中的n个列上. 不妨设$a_1, a_2, \ldots, a_k$安排在列$1, 2, \ldots, k$上, 另外的$n-k$个因子安排在其余的列上, 得到$n-k$个独立的定义字(defining word), 这$n-k$个定义字生成一个群, 称为定义对照子群(defining contrast subgroup), 记为G. 定义对照子群G中除单位元I以外的每一个元素都称为定义字, 定义字中字母的个数称为该定义字的字长(wordlength). 由定义对照子群决定的设计称为正规设计(regular design), 否则称为非正规设计(nonregular design). 常用$2^{n-(n-k)}$或者2^{n-p} (其中$p = n - k$)表示有2^k个水平组合, p个独立列, 由p个独立的定义字决定的正规部分因子设计, 它是有2^n个水平组合的全设计的2^{-p}部分. 显然, 一个2^{n-p}设计d是一个$N \times n$阶矩阵, 它是饱和设计H_k的一个子阵, 下面称之为H_k的n维投影.

表1 3个二水平独立列生成的饱和设计H_3

1	2	12	3	13	23	123
−1	−1	+1	−1	+1	+1	−1
+1	−1	−1	−1	−1	+1	+1
−1	+1	−1	−1	+1	−1	+1
+1	+1	+1	−1	−1	−1	−1
−1	−1	+1	+1	−1	−1	+1
+1	−1	−1	+1	+1	−1	−1
−1	+1	−1	+1	−1	+1	−1
+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1

用1, 2, 3, 4, 5记5个因子, 把1, 2, 3分别安排在饱和设计H_3的列1, 2, 3上, 把4, 5分别安排在H_3的列12, 13上, 得到两个独立的定义字124和135, 这两个独立的定义字生成定义对照子群$G=\{I,124,135,2345\}$, 或者记为$I=124=135=2345$, 称之为定义关系(defining relation). 这个定义对照子群或者定义关系决定了一个2^{5-2}设计d_0, 它是2^5全设计的一个2^{-2}部分. 由定义对照子群或定义关系可以得到设计d_0的效应间的混杂关系(称为别名集, alias set):

$$
\begin{aligned}
&1=24=35=12345, \quad && 2=14=345=1235, \quad && 3=15=245=1234,\\
&4=12=235=1345, && 5=13=234=1245, && 23=45=125=134,\\
&25=34=123=145.
\end{aligned}
\tag{2.1}
$$

一般地, 一个2^{n-p}设计有2^n-1个效应(effect), 有$2^k-1\,(k=n-p)$个别名集, 每个别名集中有2^p个效应, 其它的2^p-1个效应包含在定义对照子群中. 在同一个别名集的2^p个效应中, 其中一个效应可估的充要条件是其它效应都可以忽略(见Mukerjee和Wu, 2006). 因此, 一个好的设计应该避免重要的效应之间的相互混杂. 通常情况下, 试验者认为因子的效应满足如下效应分层原则(见Wu和Hamada, 2000, 2009):

(1) 低阶效应比高阶效应重要;

(2) 同阶效应同等重要.

实际试验中经常根据需要采用因子的多个水平. 若每个因子的水平数都是$s\,(\geq 2)$, 我们称之为s水平设计(或对称设计), 当$s>2$时称为高水平设计. 若因子的水平数不完全相等, 这样的设计称为混合水平设计(或非对称设计). 高水平设计由于其能考察因子的非线性效应而受到试验者的青睐, 混合水平设计则由于其因子水平的多样性而具有更广泛的适用性. 某些混合水平的设计可以由低水平的设计用替换法构造得到, 相关构造方法可以参考Addelman (1962), Wu (1989), Wu等(1992).

在比较复杂的试验中, 往往要通过几个工序才能获得试验结果, 这些工序重复的难易

程度不同, 而试验中所考察的因子又分别属于不同的工序. 为了减少难重复的工序的重复次数, 试验者可以按重复的难易程度把因子分区, 最简单的是分为整区(whole-plot)和子区(sub-plot)两类因子. 在试验时, 先随机选定整区因子的某一个水平组合, 对选定的子区因子的水平组合随机实施试验, 然后再随机选定整区因子的另一个水平组合, 仍然对选定的子区因子的水平组合随机实施试验, 重复上述过程直至完成整个试验. 这样的试验方法可以使难重复的工序少做试验, 而容易重复的工序多做试验, 最终达到简化试验过程的目的. 这类试验称为裂区(split-plot)试验, 相应的设计称为裂区设计(split-plot design).

为了避免系统误差对试验结果的影响, 往往要求对试验进行随机化. 试验的随机化有一个前提条件, 就是各个试验单元要求具有同一性(homogeneity). 然而, 试验单元的同一性经常不能得到保证, 特别是试验次数较大时. 试验单元不具有同一性经常会给试验带来较大误差, 从而导致对试验结果的统计分析的精度下降. 解决这一困难的常用方法是将试验单元分成若干个组, 称为区组(block), 使得一个区组内的试验单元具有同一性, 而不同区组间的试验单元可以有较大差别.

假设一个试验中有r个因素会影响试验单元的同一性, 为简单起见, 假设每个因素都是二水平. 这r个因素称为区组因子, 对应的前面提到的因子称为处理因子. 将一个2^{n-p}设计d看成是饱和设计H_k的n维投影, 从H_k中再选取r个独立列, 把r个区组因子分别安排到这r个列上. 由于这r个独立列共有2^r个水平组合, 这2^r个水平组合把d的2^{n-p}个水平组合分成2^r个区组, 每个区组内有2^{n-p-r}个水平组合. 这样就得到一个区组设计, 记作$2^{n-p}:2^r$, 表示把一个2^{n-p}设计分成2^r个区组. 关于区组设计, 除了上面关于处理因子的假设, 人们常对区组因子进一步作如下假设, 统称为区组设计的效应分层原则:

(3) 区组主效应与区组交互作用同等重要;

(4) 区组因子与处理因子之间交互作用不显著.

根据效应分层原则, 试验者应该选择低阶效应之间的混杂最轻的设计实施试验. 研究者根据效应分层原则从不同的角度出发提出了不同的最优性准则, 如最大分辨度准则(见Box和Hunter, 1961)、最小低阶混杂准则(见Fries和Hunter, 1980)、纯净效应准则(见Wu和Chen, 1992)、最大估计容量准则(见Sun, 1993)、一般最小低阶混杂准则(见Zhang等, 2008).

§3. 最优性准则和最优设计的构造

3.1 最大分辨度准则

用$A_i(d)$表示2^{n-p}设计d中字长为i的定义字的个数, $i=1,2,\ldots,n$. 令

$$W(d)=(A_1(d),A_2(d),A_3(d),\ldots,A_n(d)).$$

称$W(d)$为设计d的字长型(wordlength pattern). $A_1(d)>0$意味着设计d的某一列全为1, 这样的列不能考察因子的主效应, 这是试验者不能容忍的, 而$A_2(d)>0$意味着设计d的某两

个列完全相同, 从而不能区分两个因子的主效应, 也是试验者不能容忍的. 因此, 一般只考虑$A_1(d) = A_2(d) = 0$的设计, 并把$W(d)$简化为

$$W(d) = (A_3(d), A_4(d), \ldots, A_n(d)). \tag{3.1}$$

令r是满足$A_i(d) \neq 0$的最小的i, 称r为设计d的分辨度(resolution). 注意到只考虑$A_1(d) = A_2(d) = 0$的设计d, 从而d的分辨度至少为3. 若设计d的分辨度为R, 则不存在d的c-阶交互作用与低于$(R-c)$-阶交互作用混杂. 因此, 一个好的设计应该有最大分辨度. 最大分辨度准则(见Box和Hunter, 1961)选取具有最大分辨度的设计为最优设计. 但是, 由于大多数情况下具有最大分辨度的设计太多, 在这些设计中进一步区分并选取最优设计成为下一步工作的重点.

3.2 最小低阶混杂准则

考虑如下三个2^{7-2}设计:

表2 三个2^{7-2}设计

设计	定义关系	两因子交互作用之间的混杂情况
d_1	$I = 1236 = 2347 = 1467$	$12 = 36$, $13 = 26$, $14 = 67$, $17 = 46$, $24 = 37$, $27 = 34$,$16 = 23 = 47$
d_2	$I = 1236 = 1457 = 234567$	$12 = 36$, $13 = 26$, $14 = 57$, $15 = 47$, $16 = 23$, $17 = 45$
d_3	$I = 12346 = 12357 = 4567$	$45 = 67$, $46 = 57$, $47 = 56$

以上三个设计的分辨度都是4, 哪一个最优呢? 根据效应分层原则, 因子的主效应最重要, 其次是两因子交互作用. 由于分辨度为4的设计不存在主效应和两因子交互作用之间的混杂, 两因子交互作用之间的混杂就成为这类设计中最严重的混杂关系. 在上述三个设计中, 设计d_3的两因子交互作用之间的混杂最轻, 故设计d_3是最优的. 注意到d_3只有一个长为4的定义字, 由此容易联想到长为4的定义字越少, 设计越好. 把这一想法推广, 就得到最小低阶混杂准则(见Fries和Hunter, 1980).

定义 3.1 设d_1, d_2是两个2^{n-p}设计, 且r是使得$A_i(d_1) \neq A_i(d_2)$的最小的i. 如果$A_r(d_1) < A_r(d_2)$, 则称设计d_1比d_2有更小的低阶混杂. 若不存在设计d比d_1有更小的低阶混杂, 则称d_1有最小低阶混杂(minimum aberration, MA), 或称d_1为最小低阶混杂设计, 简称为MA设计.

非正规设计在实际试验中有非常广泛的应用, 把最小低阶混杂准则推广到非正规设计有很多优秀的研究成果, 比如Deng和Tang (1999), Tang和Deng (1999), Xu和Wu (2001), Ye (2003), Pang和Liu (2010). 本文主要对正规因子设计的相关理论进行归纳总结, 对非正规设计的相关结果不再赘述.

由定义3.1可以看出, MA 2^{n-p}设计在所有2^{n-p}设计中顺序最小化字长型(3.1), 因此MA 2^{n-p}设计一定在所有2^{n-p}设计中具有最大分辨度. 上述三个设计的字长型分别是:

$$W(d_1) = (0, 3, 0, 0, 0), \qquad W(d_2) = (0, 2, 0, 1, 0), \qquad W(d_3) = (0, 1, 2, 0, 0).$$

显然, 这三个设计的分辨度都是4, 在最小低阶混杂准则下, d_3比d_2有更小的低阶混杂, d_2比d_1有更小的低阶混杂. 事实上, d_3是MA 2^{7-2}设计(见Mukerjee和Wu, 2006).

当设计的水平组合数比较小, 即$n-p$比较小, 或者设计的定义字比较少, 即p比较小时, MA 2^{n-p}设计的构造相对容易. Franklin (1984)给出了分辨度$R \geq 4$且$n-p \leq 9$时MA 2^{n-p}设计的构造结果, 同时也考虑了三水平MA设计的构造. Chen和Wu (1991)研究并给出了$p = 3, 4$时MA 2^{n-p}设计的理论构造方法. Chen (1992)给出了$p = 5$时MA 2^{n-p}设计的理论构造方法. Chen和Wu (1991), Chen (1992)中的方法很难再继续推广到$p \geq 6$的情形. Chen等(1993)给出了一个算法, 并借助计算机搜索得到了具有16, 32, 64个水平组合的二水平和具有27个水平组合的三水平的一些部分因子设计, 试验者可以根据自己的需要从中选取最好的设计. 由于借助计算机搜索得到最优设计受到算法及计算机运算速度的限制, 这类方法只能用于解决水平组合数较小的最优设计的搜索构造. 鉴于此, 研究者开始从其它角度研究MA设计的相关理论.

Chen和Hedayat (1996)提出了弱最小低阶混杂(weak minimum aberration)设计的概念并讨论了弱最小低阶混杂设计的构造方法. 由设计d是饱和设计H_k的n维投影, 把H_k中删除d以后得到的矩阵是H_k的$N-n-1$维投影, 称之为d的补设计. Tang和Wu (1996)建立了2^{n-p}设计与其补设计的字长型间的关系, 并利用这种关系获得了所有满足$2^{n-p}-n-1 = 1, \ldots, 11$的MA 2^{n-p}设计. Suen等(1997)得到了q水平设计与其补设计的字长型之间的关系, 并利用这种关系给出了其补设计中有$3, \ldots, 13$列时所有MA设计的构造方法.

如果一个设计经过行、列或者水平的置换可以得到另一个设计, 则称这两个设计是同构的. 同构设计被看作是相同的设计. 如何判断两个设计是否同构是一个很难解决的问题. Liu等(2011), Pang和Liu (2011)对此进行了研究, 提出了一个有效的方法, 明显的降低了用计算机搜索非同构设计时的难度. 令F表示饱和设计H_k的后$N/2$列构成的矩阵. Butler (2003)证明了当$5N/16+1 \leq n \leq N/2$时, 在同构意义下, 一个MA 2^{n-p}设计d一定是F的n维投影, 并且给出了d与其关于F的补设计的关系. Chen和Cheng (2006)证明了当$9N/32 < n \leq 5N/16$时, 一个MA 2^{n-p}设计d一定是由定义关系$I = 12345$决定的2^{5-1}设计加倍(double) $\log_2(N/16)$次以后得到的二阶饱和设计(second order saturated design)的投影. Cheng和Tang (2005)从统计模型出发提出了最小低阶混杂的一个一般性的理论, 为最小低阶混杂提供了一个统一的框架, 并为试验者找到合适的准则提供了一个系统的方法.

Mukerjee和Wu (2001)用有限投影几何作为工具, 建立了两类混合水平设计与其补设计的字长型的关系, 并构造了含有一个(或两个)四水平因子和其补设计中有不超过12个(或8个)二水平因子的最小低阶混杂混合水平设计, 以及含有一个九水平因子和其补设计中有不超过8个三水平因子的最小低阶混杂混合水平设计. Ai和Zhang (2005)利用参照设计

(consulting design)以及因子设计与编码理论的联系, 获得了混合水平设计与其参照设计的字长型的关系, 并通过这些关系建立了利用参照设计构造最小低阶混杂混合水平设计的理论方法. Zhang和Shao (2001)中构造了同时有二水平和四水平因子、三水平和九水平因子、四水平和十六水平因子的三类混合水平最小低阶混杂设计. Li等(2007)讨论了含有一个四水平因子和若干二水平因子的混合水平设计在(弱)最小低阶混杂准则下的性质和构造问题. 有关混合水平设计的最小低阶混杂理论在Mukerjee和Wu (2006)中有较为详细的介绍, 此处不再赘述.

关于裂区设计的最小低阶混杂准则, 可以参考Bingham和Sitter (1999a), Mukerjee和Wu (2006). Bingham和Sitter (1999a)给出了一个算法构造最小低阶混杂裂区设计, 并利用该算法构造了有8和16个水平组合的最小低阶混杂裂区设计. Bingham和Sitter (1999b)研究了裂区设计的字长型和分辨度的周期性, 利用这些结果以及水平组合数较小的最小低阶混杂裂区设计可以构造水平组合数较大的最小低阶混杂裂区设计. Yang等(2009)研究了高水平裂区设计的字长型和分辨度的周期性. Yang等(2007)研究了弱最小低阶混杂裂区设计的构造方法.

对一个$2^{n-p}:2^r$区组设计, 令$A_{i,0}$表示相应的2^{n-p}设计中长为i的定义字的个数, $A_{i,1}$表示与区组主效应或者其交互作用混杂的i阶处理效应的个数. 显然, $A_{1,1}\neq 0$意味着有处理主效应与区组效应混杂, 而根据效应分层原则, 一个好的区组设计应该避免处理主效应与区组效应的混杂. 因此, 试验者通常只考虑$A_{1,1}=0$的设计. 令

$$W_t=(A_{3,0},A_{4,0},\ldots,A_{n,0}),\qquad W_b=(A_{2,1},A_{3,1},\ldots,A_{n,1}).$$

分别称W_t和W_b为区组设计的处理字长型和区组字长型.

根据效应分层原则, 一个好的设计应该尽量减轻低阶处理效应之间以及低阶处理效应与区组效应的混杂. 因此, 研究者自然的希望找到能够同时顺序最小化W_t和W_b的区组设计. 但是, 遗憾的是这样的区组设计不存在(见Zhang和Park, 2000). 为了解决这一难题, Sun等(1997), Mukerjee和Wu (1999)提出了容许(admissibility)设计的概念并研究了容许设计存在的条件及构造方法. 但是, 由于大多数情况下, 容许设计的数量太多, 人们仍然需要从中选择更好的设计. Chen和Cheng (1999), Cheng和Wu (2002), Sitter等(1997), Zhang和Park (2000)把W_t和W_b组合在一起得到了如下四种不同的字长型:

$$\begin{aligned}
W_{\mathrm{scf}}&=(A_{3,0},A_{2,1},A_{4,0},A_{3,1},A_{5,0},A_{4,1},\ldots),\\
W_{\mathrm{cc}}&=(3A_{3,0}+A_{2,1},A_{4,0},10A_{5,0}+A_{3,1},\ldots),\\
W_1&=(A_{3,0},A_{4,0},A_{2,1},A_{5,0},A_{6,0},A_{3,1},\ldots),\\
W_2&=(A_{3,0},A_{2,1},A_{4,0},A_{5,0},A_{3,1},A_{6,0},\ldots).
\end{aligned}$$

如果一个区组设计顺序最小化某个字长型W_*, 则称其为最小低阶混杂W_*设计, 这里W_*是$W_{\mathrm{scf}},W_{\mathrm{cc}},W_1$或者$W_2$. Sitter等(1997)提出了字长型$W_{\mathrm{scf}}$, 并给出了有16, 32和64个水平

组合的最小低阶混杂$W_{\rm scf}$设计. Chen和Cheng (1999), Zhang和Park (2000)指出$W_{\rm scf}$中元素的排序没有遵从效应分层原则. Chen和Cheng (1999)提出了字长型$W_{\rm cc}$和W_2, 并对最小低阶混杂$W_{\rm cc}$设计的结构进行了研究. Cheng和Wu (2002)提出了字长型W_1和W_2, 并研究了最小低阶混杂W_1和W_2设计的构造方法. Zhang和Park (2000)也独立的提出了字长型W_2并研究了最小低阶混杂W_2设计的构造方法. 关于W_1和W_2的区别在Cheng和Wu (2002)中有详细的解释. Xu (2006)利用编码理论方法研究了四种字长型的最小低阶混杂设计的构造, 给出了全部有32和81个水平组合的最小低阶混杂设计, 以及具有64个水平组合不超过32个列的最小低阶混杂设计. Xu和Mee (2010)构造了具有128个水平组合8至64个列的最小低阶混杂W_1设计. Zhao等(2013a)研究了$A_{2,1}$的下界, 给出了达到该下界的设计的构造方法, 并证明了在一定条件下达到该下界的设计对字长型$W_{\rm scf}$, $W_{\rm cc}$和W_2是弱最小低阶混杂设计. Zhao和Li (2015)研究了关于四种字长型都是最小低阶混杂设计的区组设计的结构, 利用这些结论以及现有的MA 2^{n-p}设计可以构造一些关于四种字长型都是最小低阶混杂设计的区组设计. Ai和Zhang (2004b), Ai等(2006)研究了分区组混合水平设计在最小低阶混杂准则下的性质, 并构造了含有一个或者两个四水平因子和若干二水平因子的有16和32个水平组合的分区组混合水平最小低阶混杂设计. Li等(2005)讨论了有区组结构的序贯试验的最优初始设计的选择问题.

3.3 纯净效应准则

考虑如下两个2^{9-4}设计:

$$
\begin{aligned}
d_4:\ I &= 1236 = 1247 = 1258 = 13459 = 3467 = 3568 = 24569 = 4578 = 23579\\
&= 23489 = 12345678 = 15679 = 14689 = 13789 = 26789,\\
d_5:\ I &= 1236 = 1247 = 1348 = 23459 = 3467 = 2468 = 14569 = 2378 = 13579\\
&= 12589 = 1678 = 25679 = 35689 = 45789 = 123456789.
\end{aligned}
$$

两个设计的字长型分别是:

$$W(d_4) = (0,6,8,0,0,1,0), \qquad W(d_5) = (0,7,7,0,0,0,1).$$

在最小低阶混杂准则下, d_4优于d_5.

考虑上述两个设计的两因子交互作用之间的混杂情况:

$$
\begin{aligned}
d_4:\ & 12 = 36 = 47 = 58,\ 13 = 26,\ 14 = 27,\ 15 = 28,\ 16 = 23,\ 17 = 24,\ 18 = 25,\\
& 34 = 67,\ 35 = 68,\ 37 = 46,\ 38 = 56,\ 45 = 78,\ 48 = 57,\\
d_5:\ & 12 = 36 = 47,\ 13 = 26 = 48,\ 14 = 27 = 38,\ 16 = 23 = 78,\ 17 = 24 = 68,\\
& 18 = 34 = 67,\ 28 = 37 = 46.
\end{aligned}
$$

设计d_4有8个两因子交互作用不与主效应及其它两因子交互作用混杂, 这8个两因子交互作用是: 19, 29, 39, 49, 59, 69, 79, 89. 设计d_5有15个两因子交互作用不与主效应及其它两因子交互作用混杂, 这15个两因子交互作用是: 15, 25, 35, 45, 56, 57, 58, 59, 19, 29, 39, 49, 69, 79, 89. 根据效应分层原则, 主效应是最重要的, 其次是两因子交互作用. 上面两个设计都不存在主效应与两因子交互作用的混杂, 因此, 两因子交互作用之间混杂最轻的设计应该是好的. 在三因子交互作用与更高阶的交互作用可以忽略这一较弱的假设下, 考虑只包含主效应和两因子交互作用的效应的线性模型, 如果一个两因子交互作用不与主效应混杂, 也不与其它两因子交互作用混杂, 则这个两因子交互作用的效应的最小二乘估计就是无偏估计. 这样的两因子交互作用称为纯净的(见Wu和Chen, 1992).

定义 3.2 若一个主效应或两因子交互作用不与其它主效应或者两因子交互作用混杂, 则称这个主效应或者两因子交互作用是纯净的(clear).

对分辨度为4的设计, 应该选择纯净两因子交互作用最多的设计作为最优设计(见Wu和Hamada, 2000, 2009). 因此, 在纯净效应准则下, d_5优于d_4.

对纯净效应准则下最优设计的研究包含两个主要的方面: 一方面是什么条件下会存在包含纯净效应的设计; 另一方面是如何构造包含最多的纯净效应的设计. Chen和Hedayat (1998)研究并得到了分辨度是3或4的二水平正规设计包含纯净两因子交互作用的条件. Tang等(2002)研究了具有较多纯净两因子交互作用的二水平正规设计的构造方法, 构造了一些具有较多纯净两因子交互作用的设计, 其中部分设计具有最多的纯净两因子交互作用. Yang和Liu (2006), Yang等(2006a), Zhao和Zhang (2008a)改进了Tang等(2002)中的构造方法, 得到了一些新的具有更多纯净两因子交互作用的二水平正规设计. Wu和Wu (2002)利用图表示法证明了Wu和Hamada (2000)中的某些二水平正规设计具有最多的纯净两因子交互作用. Yang等(2005)研究了具有最多纯净两因子交互作用的分辨度为4的2^{n-p}设计的构造方法.

Ai和Zhang (2004a)推广了Chen和Hedayat (1998)的结果, 研究了一般的对称设计包含纯净主效应或者纯净两因子交互作用的条件, 并构造了含有最多纯净主效应或者纯净两因子交互作用的有16和32个水平组合的二水平设计, 以及有27和81个水平组合的三水平设计. Zhao和Zhang (2008b), Zhao等(2008)研究了同时含有二水平和四水平因子的混合水平设计包含纯净两因子交互作用成分的条件和构造具有较多纯净两因子交互作用成分的设计的方法, 其中构造的一些设计中含有的纯净两因子交互作用成分数达到了最大. Zi等(2007)研究了混合水平(非对称)设计包含纯净主效应和纯净两因子交互作用成分的条件.

Yang等(2006b)研究了二水平裂区设计的结构特点, 得到了二水平裂区设计包含各类纯净效应的充要条件. Zi等(2006)构造了一些具有较多纯净两因子交互作用的二水平裂区设计, 其中一些设计的纯净两因子交互作用数达到了最大. Zhao和Chen (2012a, 2012b)分别研究了含有一个四水平子区因子或者一个四水平整区因子和若干二水平因子的混合水平裂区设计的结构特点, 得到了这两类裂区设计包含各类纯净效应的充要条件. Wang等(2015)研究了在整区和子区各含有一个四水平因子和若干二水平因子的混合水平

裂区设计的结构特点, 得到了该类裂区设计包含各类纯净效应的条件. Yuan和Zhao (2015)研究了含有一个八水平因子(在整区或者子区)和若干二水平因子的混合水平裂区设计的结构特点, 得到了这两类裂区设计包含各类纯净效应的条件. 目前还没有关于如何构造含有较多纯净两因子交互作用的混合水平裂区设计的研究结果发表.

Li等(2006)研究了包含最多纯净两因子交互作用的区组设计与最小低阶混杂区组设计的关系. Chen等(2006)研究了包含纯净主效应和纯净两因子交互作用的区组设计存在的条件, 并研究了含有较多纯净两因子交互作用的区组设计的构造方法. Zhao等(2013b)研究了分辨度为4的区组设计的结构特点, 得到了此类设计含有纯净两因子交互作用的充要条件, 并给出了一个算法用于构造含有最多纯净两因子交互作用的分辨度至少为4的区组设计, 最后列出了全部含有最多纯净两因子交互作用的分辨度至少为4的有16和32个水平组合的区组设计.

3.4 最大估计容量准则

Sun (1993)提出了估计容量(estimation capacity)的概念, 其想法是选择一个设计使其能够估计尽可能多的包含所有主效应和部分两因子交互作用的模型. 令$E_r(d)$表示一个2^{n-p}设计d能够估计的包含所有主效应和r个两因子交互作用的模型的个数, 其中$1 \le r \le n(n-1)/2$. 这里需要强调的是同一个别名集中最多只能估计一个效应, 从而同一个别名集中最多只能有一个效应包含在模型中. 回顾第§1节中设计d_0的别名集(2.1), 当$r=1$时, 在其它两因子交互作用及三阶和三阶以上交互作用都可以忽略的假设下, 设计d_0能够估计的模型有4个, 这4个模型除了都包含主效应$1,\ldots,5$之外, 分别包含两因子交互作用23, 45, 25, 34, 因此, $E_1(d_0)=4$. 类似地, $r=2$时, 设计d_0能够估计的模型也有4个, 这4个模型除了都包含主效应$1,\ldots,5$之外, 分别包含两个两因子交互作用23与25, 23与34, 45与25, 45与34, 因此, $E_2(d_0)=4$. 显然, 当$3\le r\le 10$时, $E_r(d_0)=0$.

如果一个设计最大化所有的$E_r(d)$, $r=1,\ldots,n(n-1)/2$, 则称该设计有最大估计容量(maximum estimation capacity). Cheng和Mukerjee (1998), Cheng等(1999)研究了具有最大估计容量的设计的性质, 构造了一些具有最大估计容量的设计, 同时研究了最大估计容量设计和最小低阶混杂设计的联系, 证明了具有最大估计容量的设计的两因子交互作用在不含主效应的别名集中分布最均匀. 有关最大估计容量设计的相关理论还可以参考Mukerjee和Wu (2006).

3.5 一般最小低阶混杂准则

同样从效应分层原则出发, 为了找到最小化低阶效应之间混杂的设计, Zhang等(2008)从设计的别名集出发, 提出了一般最小低阶混杂准则. 令${}^{\#}_{i}C_j^{(k)}$表示与k个j-阶效应混杂的i-阶效应的个数, 并按照k对其排序, 得到下面的向量

$$ {}^{\#}_{i}C_j = ({}^{\#}_{i}C_j^{(0)}, {}^{\#}_{i}C_j^{(1)}, \ldots, {}^{\#}_{i}C_j^{(K_j)}), $$

其中$K_j = \binom{n}{j}$, 再根据效应分层原则对${}_i^{\#}C_j$进行排序, 得到如下向量

$$^{\#}C = ({}_1^{\#}C_1, {}_0^{\#}C_2, {}_1^{\#}C_2, {}_2^{\#}C_1, {}_2^{\#}C_2, {}_0^{\#}C_3, {}_1^{\#}C_3, {}_2^{\#}C_3, {}_3^{\#}C_1, {}_3^{\#}C_2, {}_3^{\#}C_3, \ldots). \tag{3.2}$$

向量(3.2)称为别名效应数型(aliased effect-number pattern). Zhang和Mukerjee (2009a)指出(3.2)中的某些项可以由前面的项决定, 比如${}_j^{\#}C_1^{(1)} = \sum\limits_{k\geq 1} k\, {}_1^{\#}C_j^{(k)}$, 并且对分辨度至少为3的设计, ${}_1^{\#}C_1$与${}_0^{\#}C_2$都是常数向量, 从而, 向量(3.2)可以被简化为

$$^{\#}C = ({}_1^{\#}C_2, {}_2^{\#}C_2, {}_1^{\#}C_3, {}_2^{\#}C_3, {}_3^{\#}C_2, {}_3^{\#}C_3, \ldots). \tag{3.3}$$

基于(3.3), 一般最小低阶混杂准则定义为:

定义 3.3 令$^{\#}C_l$是(3.3)式$^{\#}C$中的第l个分量, $^{\#}C(d_1)$和$^{\#}C(d_2)$分别是设计d_1和d_2的别名效应数型. 假设$^{\#}C_t$是使得$^{\#}C_l(d_1) \neq {}^{\#}C_l(d_2)$的第一个分量. 如果$^{\#}C_t(d_1) > {}^{\#}C_t(d_2)$, 则称$d_1$比$d_2$有更小的一般低阶混杂. 如果没有设计比$d$有更小的一般低阶混杂, 则称设计$d$有一般最小低阶混杂(general minimum lower-order confounding, GMC), 并称设计d为一般最小低阶混杂设计, 简称为GMC设计.

Hu和Zhang (2011)研究了最小低阶混杂设计的结构性质, 找到了一个设计最小化主效应与两因子交互作用所具有的混杂结构, 并进一步证明了一个设计具有这种结构的充要条件是最小化其字长型的第一项A_3. Zhang和Mukerjee (2009a)讨论了GMC 2^{n-p}设计的构造问题, 得到了2^{n-p}设计d与其补设计的别名效应数型间的关系, 并利用这种关系构造了满足$2^{n-p}-n-1=1,\ldots,15$的所有的GMC 2^{n-p}设计. Li等(2011)考虑了$5N/16+1 \leq n \leq N-1$时GMC 2^{n-p}设计的构造问题, 证明了饱和设计H_k的后n列构成的设计就是GMC 2^{n-p}设计. Cheng和Zhang (2010), Zhang和Cheng (2010)分别给出了$N/4+1 \leq n \leq 9N/32$和$33N/128 \leq n \leq 5N/16$时GMC 2^{n-p}设计的构造方法, Chen和Liu (2011)则给出了$5N/16 < n \leq N/2$, $9N/32 < n \leq 5N/16$和$17N/64 < n \leq 9N/32$三种情况下GMC 2^{n-p}设计的构造方法. 综合比较Chen和Liu (2011), Cheng和Zhang (2010), Li等(2011), Zhang和Cheng (2010)中的构造结果, 四篇文献中分别给出了不同范围内GMC 2^{n-p}设计的理论构造方法, 且在相互重叠区间部分构造的设计是同构的, 这四篇文献系统地解决了$N/4+1 \leq n \leq N-1$区间范围内所有GMC 2^{n-p}设计的理论构造问题. Zhou等(2013)讨论了2^{n-p}设计的别名效应数型的性质及其应用.

Li等(2013, 2015)分别把一般最小低阶混杂准则推广到三水平设计和高水平设计, 建立了三水平设计和高水平设计的一般最小低阶混杂准则与其它准则的联系. Wei等(2010)把一般最小低阶混杂准则推广到裂区设计, 建立了裂区设计的一般最小低阶混杂准则与其它准则的联系, 列出了32个水平组合不超过14个列的GMC 裂区设计.

Zhang和Mukerjee (2009b)把一般最小低阶混杂准则推广到区组设计, 称为B-GMC准则, 并建立了一个区组设计与其补设计在B-GMC准则下的对应关系, 给出了补设计中列数

较少时二水平和三水平区组设计的构造结果. Wei等(2014)也把一般最小低阶混杂准则推广到区组设计, 提出了与B-GMC不同的准则, 称为B^1-GMC准则, 并与B-GMC准则进行了比较. Zhang等(2011)把一般最小低阶混杂准则推广到多个区组变量的区组设计, 称为B^2-GMC准则, 并与B^1-GMC准则、区组设计的MA准则进行了比较, 列出了16, 32和64个水平组合的各种准则下的最优设计. Zhao等(2013), Zhao和Sun (2015), Zhao等(2015)研究了B^1-GMC准则下$2^{n-p}:2^r$设计的构造理论, 分别给出了$n\geq 5N/16+1$, $N/4+1\leq n\leq 9N/32$, $17N/64+1\leq n\leq 5N/16$三个区间范围内所有B^1-GMC准则下最优区组设计的构造方法, 从而系统解决了$n\geq N/4+1$范围内的B^1-GMC准则下最优区组设计的构造问题.

§4. 小　结

自从英国统计学家R.A. Fisher创立试验设计以来, 试验设计由于其广泛的应用背景而一直受到人们的关注, 其研究内容也随着世界经济的发展而不断扩展, 包括因子设计、正交设计、均匀设计、稳健参数设计、回归设计、混料设计、计算机试验设计等, 都是试验设计重要的研究方向. 本文主要对正规因子设计自1980年以来的最优性理论和构造方法进行了简要总结. 可以看出, 二水平设计的研究成果是最丰富的, 其它各类设计的研究成果相对较少. 究其原因, 大概是二水平设计的结构最简单, 其它各类设计结构相对比较复杂而研究方法比较少造成的. 进一步开发对此类设计研究的新方法应该是下一步的研究方向.

受篇幅所限, 本文没有对正交设计、均匀设计、稳健参数设计、回归设计、混料设计、计算机试验设计等研究领域的问题和研究成果进行梳理和归纳总结, 对因子设计的很多优秀的成果还没有包括进来, 对此深表遗憾!

参 考 文 献

[1] Addelman, S., Orthogonal main-effect plans for asymmetrical factorial experiments, *Technometrics*, **4(1)**(1962), 21–46.

[2] Ai, M.Y. and Zhang, R.C., s^{n-m} designs containing clear main effects or clear two-factor interactions, *Statistics and Probability Letters*, **69(2)**(2004a), 151–160.

[3] Ai, M.Y. and Zhang, R.C., Theory of minimum aberration blocked regular mixed factorial designs, *Journal of Statistical Planning and Inference*, **126(1)**(2004b), 305–323.

[4] Ai, M.Y. and Zhang, R.C., Characterization of minimum aberration mixed factorials in terms of consulting designs, *Statistical Papers*, **46(2)**(2005), 157–171.

[5] Ai, M.Y., Yang, G.J. and Zhang, R.C., Minimum aberration blocking of regular mixed factorial designs, *Journal of Statistical Planning and Inference*, **136(4)**(2006), 1493–1511.

[6] Bingham, D. and Sitter, R.R., Minimum-aberration two-level fractional factorial split-plot designs, *Technometrics*, **41(1)**(1999a), 62–70.

[7] Bingham, D. and Sitter, R.R., Some theoretical results for fractional factorial split-plot designs, *The Annals of Statistics*, **27(4)**(1999b), 1240–1255.

[8] Box, G.E.P. and Hunter, J.S., The 2^{k-p} fractional factorial designs part I, part II, *Technometrics*, **3(3)**(1961), 311–351 and **3(4)**(1961), 449–458.

[9] Butler, N.A., Some theory for constructing minimum aberration fractional factorial designs, *Biometrika*, **90(1)**(2003), 233–238.

[10] Chen, B.J., Li, P.F., Liu, M.Q. and Zhang, R.C., Some results on blocked regular 2-level fractional factorial designs with clear effects, *Journal of Statistical Planning and Inference*, **136(12)**(2006), 4436–4449.

[11] Chen, H. and Cheng, C.S., Theory of optimal blocking of 2^{n-m} designs, *The Annals of Statistics*, **27(6)**(1999), 1948–1973.

[12] Chen, H. and Cheng, C.S., Doubling and projection: a method of constructing two-level designs of resolution IV, *The Annals of Statistics*, **34(1)**(2006), 546–558.

[13] Chen, H. and Hedayat, A.S., 2^{n-l} designs with weak minimum aberration, *The Annals of Statistics*, **24(6)**(1996), 2536–2548.

[14] Chen, H. and Hedayat, A.S., 2^{n-m} designs with resolution III or IV containing clear two-factor interactions, *Journal of Statistical Planning and Inference*, **75(1)**(1998), 147–158.

[15] Chen, J., Some results on 2^{n-k} fractional factorial designs and search for minimum aberration designs, *The Annals of Statistics*, **20(4)**(1992), 2124–2141.

[16] Chen, J. and Liu, M.Q., Some theory for constructing general minimum lower order confounding designs, *Statistica Sinica*, **21(4)**(2011), 1541–1555.

[17] Chen, J., Sun, D.X. and Wu, C.F.J., A catalogue of two-level and three-level fractional factorial designs with small runs, *International Statistical Review*, **61(1)**(1993), 131–145.

[18] Chen, J. and Wu, C.F.J., Some results on s^{n-k} fractional factorial designs with minimum aberration or optimal moments, *The Annals of Statistics*, **19(2)**(1991), 1028–1041.

[19] Cheng, C.S. and Mukerjee, R., Regular fractional factorial designs with minimum aberration and maximum estimation capacity, *The Annals of Statistics*, **26(6)**(1998), 2289–2300.

[20] Cheng, C.S., Steinberg, D.M. and Sun, D.X., Minimum aberration and model robustness for two-level fractional factorial designs, *Journal of the Royal Statistical Society, Series B* (*Statistical Methodology*), **61(1)**(1999), 85–93.

[21] Cheng, C.S. and Tang, B., A general theory of minimum aberration and its applications, *The Annals of Statistics*, **33(2)**(2005), 944–958.

[22] Cheng, S.W. and Wu, C.F.J., Choice of optimal blocking schemes in two-level and three-level designs, *Technometrics*, **44(3)**(2002), 269–277.

[23] Cheng, Y. and Zhang, R.C., On construction of general minimum lower order confounding 2^{n-m} designs with $N/4+1 \leq n \leq 9N/32$, *Journal of Statistical Planning and Inference*, **140(9)**(2010), 2384–2394.

[24] Deng, L.Y. and Tang, B., Generalized resolution and minimum aberration criteria for Plackett-Burman and other nonregular factorial designs, *Statistica Sinica*, **9(4)**(1999), 1071–1082.

[25] Franklin, M.F., Constructing tables of minimum aberration p^{n-m} designs, *Technometrics*, **26(3)** (1984), 225–232.

[26] Fries, A. and Hunter, W.G., Minimum aberration 2^{k-p} designs, *Technometrics*, **22(4)**(1980), 601–608.

[27] Hu, J.W. and Zhang, R.C., Some results on two-level regular designs with general minimum lower-order confounding, *Journal of Statistical Planning and Inference*, **141(5)**(2011), 1774–1782.

[28] Li, P.F., Chen, B.J., Liu, M.Q. and Zhang, R.C., A note on minimum aberration and clear criteria, *Statistics and Probability Letters*, **76(10)**(2006), 1007–1011.

[29] Li, P.F., Liu, M.Q. and Zhang, R.C., Choice of optimal initial designs in sequential experiments, *Metrika*, **61(2)**(2005), 127–135.

[30] Li, P.F., Liu, M.Q. and Zhang, R.C., $2^m 4^1$ designs with minimum aberration or weak minimum aberration, *Statistical Papers*, **48(2)**(2007), 235–248.

[31] Li, P.F., Zhao, S.L. and Zhang, R.C., A theory on constructing 2^{n-m} designs with general minimum lower order confounding, *Statistica Sinica*, **21(4)**(2011), 1571–1589.

[32] Li, Z.M., Zhang, T.F. and Zhang, R.C., Three-level regular designs with general minimum lower-order confounding, *The Canadian Journal of Statistics*, **41(1)**(2013), 192–210.

[33] Li, Z.M., Zhao, S.L. and Zhang, R.C., On general minimum lower order confounding criterion for s-level regular designs, *Statistics and Probability Letters*, **99**(2015), 202–209.

[34] Liu, Y., Yang, J.F. and Liu, M.Q., Isomorphism check in fractional factorial designs via letter interaction pattern matrix, *Journal of Statistical Planning and Inference*, **141(9)**(2011), 3055–3062.

[35] Mukerjee, R. and Wu, C.F.J., Blocking in regular fractional factorials: a projective geometric approach, *The Annals of Statistics*, **27(4)**(1999), 1256–1271.

[36] Mukerjee, R. and Wu, C.F.J., Minimum aberration designs for mixed factorials in terms of complementary sets, *Statistica Sinica*, **11(1)**(2001), 225–239.

[37] Mukerjee, R. and Wu, C.F.J., *A Modern Theory of Factorial Designs* (*Springer Series in Statistics*), Springer Science+Business Media Inc., New York, 2006.

[38] Pang, F. and Liu, M.Q., Indicator function based on complex contrasts and its application in general factorial designs, *Journal of Statistical Planning and Inference*, **140(1)**(2010), 189–197.

[39] Pang, F. and Liu, M.Q., Geometric isomorphism check for symmetric factorial designs, *Journal of Complexity*, **27(5)**(2011), 441–448.

[40] Sitter, R.R., Chen, J. and Feder, M., Fractional resolution and minimum aberration in blocked 2^{n-k} designs, *Technometrics*, **39(4)**(1997), 382–390.

[41] Suen, C.Y., Chen, H. and Wu, C.F.J., Some identities on q^{n-m} designs with application to minimum aberration designs, *The Annals of Statistics*, **25(3)**(1997), 1176–1188.

[42] Sun, D.X., Estimation capacity and related topics in experimental designs, Ph.D. dissertation, University Waterloo, 1993.

[43] Sun, D.X., Wu, C.F.J. and Chen, Y., Optimal blocking schemes for 2^n and 2^{n-p} designs, *Technometrics*, **39(3)**(1997), 298–307.

[44] Tang, B. and Deng, L.Y., Minimum G_2-aberration for nonregular fractional factorial designs, *The Annals of Statistics*, **27(6)**(1999), 1914–1926.

[45] Tang, B., Ma, F., Ingram, D. and Wang, H., Bounds on the maximum number of clear two-factor interactions for 2^{m-p} designs of resolution III and IV, *The Canadian Journal of Statistics*, **30(1)**(2002), 127–136.

[46] Tang, B. and Wu, C.F.J., Characterization of minimum aberration 2^{n-k} designs in terms of their complementary designs, *The Annals of Statistics*, **24(6)**(1996), 2549–2559.

[47] Wang, J.X., Yuan, Y. and Zhao, S.L., Fractional factorial split-plot designs with two- and four-level factors containing clear effects, *Communications in Statistics - Theory and Methods*, **44(4)**(2015), 671–682.

[48] Wei, J.L., Li, P. ang Zhang, R.C., Blocked two-level regular designs with general minimum lower order confounding, *Journal of Statistical Theory and Practice*, **8(1)**(2014), 46–65.

[49] Wei, J.L., Yang, J.F., Li, P. ang Zhang, R.C., Split-plot designs with general minimum lower-order confounding, *Science China Mathematics*, **53(4)**(2010), 939–952.

[50] Wu, C.F.J., Construction of $2^m 4^n$ designs via a grouping scheme, *The Annals of Statistics*, **17(4)** (1989), 1880–1885.

[51] Wu, C.F.J. and Chen, Y., A graph-aided method for planning two-level experiments when certain interactions are important, *Technometrics*, **34(2)**(1992), 162–175.

[52] Wu, C.F.J. and Hamada, M., *Experiments: Planning, Analysis, and Parameter Design Optimization*, Wiley, New York, 2000.

[53] Wu, C.F.J. and Hamada, M.S., *Experiments: Planning, Analysis, and Optimization* (*Second Edition*), Wiley, New York, 2009.

[54] Wu, C.F.J., Zhang, R.C. and Wang, R.G., Construction of asymmetrical orthogonal arrays of the type $OA(s^k, s^m(s^{r_1})^{n_1}\cdots(s^{r_t})^{n_t})$, *Statistica Sinica*, **2(1)**(1992), 203–219.

[55] Wu, H.Q. and Wu, C.F.J., Clear two-factor interactions and minimum aberration, *The Annals of Statistics*, **30(5)**(2002), 1496–1511.

[56] Xu, H., Blocked regular fractional factorial designs with minimum aberration, *The Annals of Statistics*, **34(5)**(2006), 2534–2553.

[57] Xu, H. and Mee, R.W., Minimum aberration blocking schemes for 128-run designs, *Journal of Statistical Planning and Inference*, **140(11)**(2010), 3213–3229.

[58] Xu, H. and Wu, C.F.J., Generalized minimum aberration for asymmetrical fractional factorial designs, *The Annals of Statistics*, **29(4)**(2001), 1066–1077.

[59] Yang, G.J. and Liu, M.Q., A note on the lower bounds on maximum number of clear two-factor interactions for 2^{m-p}_{III} and 2^{m-p}_{IV} designs, *Communication in Statistics - Theory and Methods*, **35(5)**(2006), 849–860.

[60] Yang, G.J., Liu, M.Q. and Zhang, R.C., Weak minimum aberration and maximum number of clear two-factor interactions in 2^{m-p}_{IV} designs, *Science in China Series A: Mathematics*, **48(11)**(2005), 1479–1487.

[61] Yang, G.J., Liu, M.Q. and Zhang, R.C., A note on 2^{m-p}_{IV} designs with the maximum number of clear two-factor interactions, *Acta Mathematica Scientia*, **26A(6)**(2006a), 1153–1158.

[62] Yang, J.F., Li, P.F., Liu, M.Q. and Zhang, R.C., $2^{(n_1+n_2)-(k_1+k_2)}$ fractional factorial split-plot designs containing clear effects, *Journal of Statistical Planning and Inference*, **136(12)**(2006b), 4450–4458.

[63] Yang, J.F., Liu, M.Q. and Zhang, R.C., Some results on fractional factorial split-plot designs with multi-level factors, *Communications in Statistics - Theory and Methods*, **38(20)**(2009), 3623–3633.

[64] Yang, J.F., Zhang, R.C. and Liu, M.Q., Construction of fractional factorial split-plot designs with weak minimum aberration, *Statistics and Probability Letters*, **77(15)**(2007), 1567–1573.

[65] Ye, K.Q., Indicator function and its application in two-level factorial designs, *The Annals of Statistics*, **31(3)**(2003), 984–994.

[66] Yuan, Y. and Zhao, S.L., Mixed two- and eight-level fractional factorial split-plot designs containing clear effects, *Acta Mathematicae Applicatae Sinica*, in press, 2015.

[67] Zhang, R.C. and Cheng, Y., General minimum lower order confounding designs: an overview and a construction theory, *Journal of Statistical Planning and Inference*, **140(7)**(2010), 1719–1730.

[68] Zhang, R.C., Li, P., Zhao, S.L. and Ai, M.Y., A general minimum lower-order confounding criterion for two-level regular designs, *Statistica Sinica*, **18(4)**(2008), 1689–1705.

[69] Zhang, R.C., Li, P. and Wei, J.L., Optimal two-level regular designs with multi block variables, *Journal of Statistical Theory and Practice*, **5(1)**(2011), 161–178.

[70] Zhang, R.C. and Mukerjee, R., Characterization of general minimum lower order confounding via complementary sets, *Statistica Sinica*, **19(1)**(2009a), 363–375.

[71] Zhang, R.C. and Mukerjee, R., General minimum lower order confounding in block designs using complementary sets, *Statistica Sinica*, **19(4)**(2009b), 1787–1802.

[72] Zhang, R.C. and Park, D.K., Optimal blocking of two-level fractional factorial designs, *Journal of Statistical Planning and Inference*, **91(1)**(2000), 107–121.

[73] Zhang, R.C. and Shao, Q., Minimum aberration $(s^2)s^{n-k}$ designs, *Statistica Sinica*, **11(1)**(2001), 213–223.

[74] Zhao, S.L. and Chen, X.F., Mixed-level fractional factorial split-plot designs containing clear effects, *Metrika*, **75(7)**(2012a), 953–962.

[75] Zhao, S.L. and Chen, X.F., Mixed two- and four-level fractional factorial split-plot designs with clear effects, *Journal of Statistical Planning and Inference*, **142(7)**(2012b), 1789–1793.

[76] Zhao, S.L. and Li, P.F., Construction of minimum aberration blocked two-level regular factorial designs, *Communications in Statistics - Theory and Methods*, in press, 2015.

[77] Zhao, S.L., Li, P.F. and Karunamuni, R., Blocked two-level regular factorial designs with weak minimum aberration, *Biometrika*, **100(1)**(2013a), 249–253.

[78] Zhao, S.L., Li, P.F. and Liu, M.Q., On blocked resolution IV designs containing clear two-factor interactions, *Journal of Complexity*, **29(5)**(2013b), 389–395.

[79] Zhao, S.L., Li, P.F., Zhang, R.C. and Karunamuni, R., Construction of blocked two-level regular designs with general minimum lower order confounding, *Journal of Statistical Planning and Inference*, **143(6)**(2013c), 1082–1090.

[80] Zhao, S.L. and Sun, Q., On constructing general minimum lower order confounding two-level block designs, *Communications in Statistics - Theory and Methods*, in press, 2015.

[81] Zhao, S.L. and Zhang, R.C., Bound on the maximum number of clear two-factor interactions for $2^{n-(n-k)}$ designs, *Acta Mathematica Scientia*, **28(4)**(2008a), 949–954.

[82] Zhao, S.L. and Zhang, R.C., 2^m4^n designs with resolution III or IV containing clear two-factor interaction components, *Statistical Papers*, **49(3)**(2008b), 441–454.

[83] Zhao, S.L., Zhang, R.C. and Liu, M.Q., Some results on 4^m2^n designs with clear two-factor interaction components, *Science in China Series A: Mathematics*, **51(7)**(2008), 1297–1314.

[84] Zhao, Y.N., Zhao, S.L. and Liu, M.Q., A theory on constructing blocked two-level designs with general minimum lower order confounding, *Frontiers of Mathematics in China*, in press, 2015.

[85] Zhou, Q., Balakrishnan, N. and Zhang, R.C., The factor aliased effect number pattern and its application in experimental planning, *The Canadian Journal of Statistics*, **41(3)**(2013), 540–555.

[86] Zi, X.M., Liu, M.Q. and Zhang, R.C., Asymmetrical factorial designs containing clear effects, *Metrika*, **65(1)**(2007), 123-131.

[87] Zi, X.M., Zhang, R.C. and Liu, M.Q., Bounds on the maximum numbers of clear two-factor interactions for $2^{(n_1+n_2)-(k_1+k_2)}$ fractional factorial split-plot designs, *Science in China Series A: Mathematics*, **49(12)**(2006), 1816–1829.

The Optimality Theories and Construction Methods on Regular Fractional Factorial Designs

Zhao Shengli

(*School of Statistics, Qufu Normal University, Qufu, 273165*)

The fractional factorial designs are widely used in various experiments. The optimality theories and construction methods of the fractional factorial designs are the core of the investigation on experimental designs. Many researchers have investigated this issue since 1980. This paper gives a summary on the optimality theories and construction methods of the regular fractional factorial designs.

Keywords: Regular fractional factorial designs, resolution, minimum aberration, clear, estimation capacity, general minimum lower order confounding.

AMS Subject Classification: 62K15, 62K05.