应用概率统计　第三十一卷
第四期　2015年8月

Chinese Journal of Applied Probability
and Statistics Vol.31 No.4 Aug. 2015

基于马氏骨架过程下几种金融衍生品的定价问题研究 *

贾兆丽　张　帆　　张曙光

(合肥工业大学数学学院, 合肥, 230009)　(中国科学技术大学统计与金融学系, 合肥, 230026)

摘　要

本文假设标的资产服从马氏骨架过程(简称MSP). 该过程能更好地反映金融市场的不稳定性. 利用马氏骨架过程的性质, 求出标的资产价格过程的特征函数, 利用快速傅里叶变换(FFT)方法, 给出了马氏骨架过程下几种金融衍生品的定价公式. 文中的结果还可以应用于其它的金融衍生品定价中, 丰富了金融衍生品的定价理论.

关键词: 马氏骨架过程, 特征函数, 快速傅立叶变换, 定价.

学科分类号: O211, F830.

§1. 引　言

近年来, 由于受经济全球化与金融自由化, 金融创新等因素影响. 全球金融市场迅猛发展, 金融市场呈现出前所未有的波动性. 金融衍生的定价也遇到了前所未有的挑战. 在定价中标的资产的价格模型起着至关重要的作用. 众所周知, 著名的Black-Scholes (B-S)价格模型(Black和Scholes, 1973), 由于限制条件太多, 往往得不到满足, 且大量的金融统计数据表明B-S模型与实际情形存在系统偏差, 因此, 试图改进B-S模型使其与实际情形相符, 这是近年来金融数学模型研究的重点. Merton (1976)首次在B-S模型中引入复合Poisson跳, 将跳扩散模型应用于股票价格模型中. 接着Vasicek (1977)和Cox等(1985)将B-S模型中的常利率推广为随机利率情形, Heston (1993)把波动率进行推广, 给出了随机波动率下零息债的显式解.

在定价的框架上人们不断的寻找一个能较好刻画金融市场诸多不稳定性的模型. 人们在不停地尝试用新的模型来替代简单的B-S模型. Hou等(1998)人提出来包括马氏过程、半马氏过程等诸多随机过程为特例的马氏骨架过程, 建立了马氏骨架过程的理论框架, 并将其应用到排队论、保险、金融系统等领域, 成功地解决了排队论的瞬时分布遍历性等一系列经典难题(Hou, 2002; Hou等, 2003). 近期, 出现了一类新的随机过程, 称为Web马氏骨架过程(简记为WMSP), 它来源于对网页排序的研究. WMSP由Gao等(2009)首先提出, 并将WMSP应用在网页重要性排序上(Gao等, 2011), 接着, Liu等(2011)从理论框架方面进

*国家工程技术研究中心开放基金(CNERC-EOMI-2013-012)、安徽省自然科学基金项目(1408085MKL84, 1308085MF93)、中央高校基本科研业务费专项资金(JZ2014HGBZ0190)和国家级大学生创新创业训练项目(201310359066)资助.

本文2013年10月17日收到, 2015年1月12日收到修改稿.

doi: 10.3969/j.issn.1001-4268.2015.04.003

一步研究. WMSP是一个纯跳的马氏骨架过程, 并且跳间隔时间序列在给定其骨架信息的条件下是相互独立的. 理论上, WMSP的框架涵盖了多类我们所知的随机过程, 如离散时间马氏链, Q过程, 半马氏过程等, 另外, 还包括几类新的过程, 如Liu等(2011)提到的简单WMSP, 半WMSP, 镜面半WMSP等.

设$(\Omega,\mathscr{F},\mathsf{P})$为一完备概率空间, (E,Ξ)是一个Polish空间, $X'=\{X'_t\}$, $0\le t<\tau$是定义在$(\Omega,\mathscr{F},\mathsf{P})$上取值于$E$中的右连左极的随机过程. 为了定义方便我们在状态空间E中增加一个孤立点b, 使$\overline{E}=E\cup\{b\}$构成一个新的Polish空间, 并把过程扩张为随机过程$X=\{X_t\}$, $0\le t<\infty$, 其中

$$X=\begin{cases}X', & 0\le t<\tau;\\ b, & \tau\le t<\infty.\end{cases}\tag{1.1}$$

定义 1.1 (Gao等, 2011) 随机过程$Y=\{Y_t\}$称为具有有限生命τ的马氏骨架过程(MSP), 若存在随机时间序列$\{\tau_n\}_{n\ge0}$, 使得$0=\tau_0\le\tau_1\le\cdots\le\tau_n\le\cdots$, $\lim\limits_{n\to\infty}\tau_n=\tau$. 并且$\{Y_{\tau_n}\}$组成马氏链.

马氏骨架过程在排队论, 控制论及金融系统中有着广泛的应用, 设$Y=\{Y_t\}$为马氏骨架过程, 定义$X_n=\{Y_{\tau_n}\}$, $T_n=\tau_{n+1}-\tau_n$, $n=0,1,\ldots$, 则$\{T_n\}$为正的随机变量序列. (X,T)由马氏骨架过程Y唯一确定. 同样, 若定义$Y_t=X_n,\tau_n\le t<\tau_{n+1}$, 则$Y$由$(X,T)$唯一确定. 为了更好地将马氏骨架过程应用于本文的金融衍生品的定价中, 现在对定义1.1进行重新描述.

定义 1.2 设$X=\{X_t\}_{t\ge0}$为一连续型的马氏过程, 设存在一非负非降的序列$\{\tau_n\}_{n\ge0}$为停时, 定义$l_t=n$, 若$\tau_n\le t<\tau_{n+1}$, 称$Y=\{Y_t\}$为马氏骨架过程, 如果

$$Y_t=X_{l_t},\tag{1.2}$$

这里$\{l_t\}$仍为停时, $\{X_t\}_{t\ge0}$称为马氏骨架, l_t称为随机时间. 事实上. 如果我们把t看作是日常时间, 则l_t可看作是业务时间, 它描述了业务活动的随机性. 用马氏骨架过程作为衍生品的定价框架. 衍生品的理论价格能较接近市场价格. 现在推广公式(1.2)中定义的马氏骨架过程, 定义

$$Y_t=X_{l_t},\tag{1.3}$$

这里$\{X_t\}_{t\ge0}$为连续的马氏过程, 随机变量$\{l_t\}$为停时, 与随机过程$\{X_t\}_{t\ge0}$独立, 且满足下面的随机方程:

$$l_t=\int_0^t\nu_s\mathrm{d}s,\qquad y_s\ge0,\tag{1.4}$$

且$\mathsf{E}[l_t]=t$, 这里随机过程ν_s称为时间变换率. 称公式(1.4)定义的骨架过程为广义的马氏骨架过程. 本文研究的标的资产的价格就是服从这样的广义马氏骨架过程.

本文主要针对三种金融衍生品的定价问题进行研究. 具体问题如下: 第二部分, 利用快速傅立叶变换方法, 给出欧式期权的定价公式; 第三部分及第四部分, 在离散取样下, 研究了方差互换及波动率互换的定价问题. 最后, 总结本文的主要研究内容及将要研究的方向.

§2. MSP下欧式期权的定价问题

设股票价格过程S_t满足下面的方程:

$$S_t = S_0 \frac{\exp rt}{\mathsf{E}[\exp Y_t|\nu_0]} \exp Y_t, \tag{2.1}$$

这里r为无风险利率. S_0表示初始时刻的股票价格, $Y = \{Y_t\}$为定义1.2所述的马氏骨架过程. S_t的对数函数$\ln(S_t)$的特征函数Ψ为

$$\begin{aligned}\Psi &= \mathsf{E}[\exp(i\theta \ln A_t)|A_0, \nu_0] \\ &= \exp(i\theta(rt + \ln A_0)\frac{\varphi(i\Phi_x(\theta); t, \nu_0)}{\varphi(-i\Phi_x(-\theta); t, \nu_0)^{i\theta}}.\end{aligned} \tag{2.2}$$

这里 Φ_x为X的特征指数, 若随机过程$\{X_t\}$为Normal-Inverse-Gaussian (NIG) 过程, $X_t \sim \mathrm{NIG}(a, b, 1, \delta)$, Lévy测度

$$\pi(\mathrm{d}x) = \mathrm{e}^{bx} \frac{\delta a}{\pi|x|} K_1(a|x|)\mathrm{d}x,$$

则X_t的特征指数为

$$\Phi_x(\theta) = -i\delta[\sqrt{a^2 - b^2} - \sqrt{a^2 - (b + i\theta)^2}].$$

这里$K_a(x)$为Bessel函数, 参数a, b, δ见Barndorff-Nielsen (1997). φ为l_t的特征函数, 若设ν_t为CIR过程(Carr等, 2003), 即满足下面的随机微分方程:

$$\mathrm{d}\nu_t = \kappa(\eta - \nu_t)\mathrm{d}t + \lambda\sqrt{\nu_t}\mathrm{d}B_t,$$

这里B_t为标准布朗运动, 且与标准布朗运动W_t独立. 则l_t的特征函数可表示为

$$\varphi_{\mathrm{CIR}} = \mathsf{E}[iul_t|\nu_0] = \frac{\exp(\kappa^2\eta t/\lambda^2 + 2\nu_0 ui/(\kappa + \gamma \coth(\gamma t/2)))}{(\cosh(\gamma t/2) + \kappa \sinh(\gamma t/2)/\gamma)^{2\kappa\eta/\lambda^2}},$$

这里$\gamma = \sqrt{\kappa^2 - 2\lambda^2 ui}$. 结合上述公式, 可以求出NIG-CIR型广义骨架过程驱动的标的资产的对数函数的特征函数.

通过特征函数, 结合Carr和Madan (1999)文中提到的快速傅立叶(FFT)方法, 可以给出欧式看涨期权的定价公式. 设β为使股票价值过程S_t的β阶矩存在的正常数. 通常取$\beta = 0.75$. 设$\ln(nK) = k$, 在X_t与l_t独立的情况下, 有下面的计算公式:

$$c(A_t, nK, T) = \frac{\exp(-\beta k)}{\pi} \int_0^{+\infty} \exp(-i\nu k)\rho(\nu)\mathrm{d}\nu, \tag{2.3}$$

这里

$$\begin{aligned}\rho(\nu) &= \frac{\exp(-r\tau)\mathsf{E}[\exp(i(\nu - (\beta + 1)i) \ln A_t)]}{\beta^2 + \beta - \nu^2 + i(2\beta + 1)\nu} \\ &= \frac{\exp(-r\tau)\Psi(\nu - (\beta + 1)i, T)}{\beta^2 + \beta - \nu^2 + i(2\beta + 1)\nu},\end{aligned} \tag{2.4}$$

这里$\tau = T - t$.

在X_t与l_t不独立的情况下, 求马氏骨架过程的特征函数需要借助下面的命题.

命题 2.1 马氏骨架过程Y_t的特征函数为

$$\phi_{Y_t}(\theta) \equiv \mathsf{E}[\mathrm{e}^{i\theta Y_t}] = \bar{\mathsf{E}}[-l(t)\Phi_x(\theta)] = \overline{\mathscr{L}}_{l(t)}(\Phi_x(\theta)),$$

这里E和$\bar{\mathsf{E}}$分别表示测度P和Q下的期望, 新的复值的概率测度Q是关于概率测度P绝对连续的, 定义如下:

$$\frac{\mathrm{d}\mathsf{Q}}{\mathrm{d}\mathsf{P}}\Big|_t = M_t(\theta),$$

其中M_t为

$$M_t(\theta) = \exp(i\theta Y_t + l(t)\Phi_x(\theta)).$$

证明: 为了证明这个命题, 首先证明M_t是P-鞅, 关于$\{(Y_t, l(t)) : t \geq 0\}$生成的$\sigma$域. 首先定义变量$Z_t$如下:

$$Z_t = \exp(i\theta X_t + t\Phi_x(\theta)).$$

$\mathsf{E}|Z_t(\theta)|$有限, 因为

$$\mathsf{E}|Z_t(\theta)| \leq \exp(t\Phi_x(\theta)).$$

对于$0 \leq s < t$,

$$\mathsf{E}[\mathrm{e}^{i\theta(X_t - X_s) + \Phi_x(\theta)(t-s)}|\mathscr{F}_t] = \mathrm{e}^{-\Phi_x(\theta)(t-s) + \Phi_x(\theta)(t-s)} = 1.$$

所以Z_t是关于$\mathscr{F}_t$的复值的P-鞅. 对于任意固定的$t \geq 0$, $l(t)$是停时, 由最优停时定理知, $M_t = Z_{l(t)}$是鞅.

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}[\mathrm{e}^{i\theta Y_t}] &= \mathsf{E}[\mathrm{e}^{i\theta Y_t + l(t)\Phi_x(\theta) - l(t)\Phi_x(\theta)}] \\
&= \mathsf{E}[M_t(\theta)\mathrm{e}^{-l(t)\Phi_x(\theta)}] \\
&= \bar{\mathsf{E}}[\mathrm{e}^{-l(t)\Phi_x(\theta)}] \\
&= \overline{\mathscr{L}}_{l(t)}(\Phi_x(\theta)). \qquad \square
\end{aligned} \tag{2.5}$$

命题 2.2 (Duffie等, 2000) 如果时间变换率$\nu(t)$是仿射函数, 则关于l_t的拉普拉斯变换$\overline{\mathscr{L}}_{l(t)}(\lambda)$的对数仍是仿射函数. 即

$$\overline{\mathscr{L}}_{l(t)}(\lambda) = \mathsf{E}[\mathrm{e}^{-\lambda l(t)}] = \exp(-b(t)\nu_0 - c(t)).$$

放射函数的特征函数的形式最初是由Duffie等(2000)给出的, Duffie等(2003)将其结果推广到复值的情形.

下面通过特殊的例子来推导不独立情形下期权的定价公式, 由快速傅里叶变换法, 关键是求出马氏骨架过程的特征函数. 考虑这样的例子, 设马氏骨架为$X_t = W_t$; 时间变化率

ν_t是CIR过程,

$$\begin{aligned} &X_t = W_t, \\ &\nu(t) = \kappa(\eta - \nu(t))\mathrm{d}t + \lambda\sqrt{\nu(t)}\mathrm{d}B_t, \\ &\mathsf{E}[\mathrm{d}W_t \mathrm{d}B_t] = \rho\mathrm{d}t. \end{aligned} \tag{2.6}$$

由命题2.1, 马氏骨架过程$Y_t = X_{l(t)}$的特征函数为过程$l(t)$的拉普拉斯变换:

$$\phi_{Y_t}(\theta) \equiv \mathsf{E}[\mathrm{e}^{i\theta Y_t}] = \overline{\mathscr{L}}_{l(t)}\Big(\frac{1}{2}\theta^2\Big),$$

其中$\theta^2/2$是骨架W_t的特征指数. 新的测度Q定义如下:

$$\frac{\mathrm{d}\mathsf{Q}}{\mathrm{d}\mathsf{P}} = \exp\Big(i\theta Y_t + \frac{1}{2}\theta^2\int_o^t \nu(s)\mathrm{d}s\Big).$$

马氏骨架过程Y_t的特征函数为

$$\phi_{Y_t}(\theta) = \exp(-b(t)\nu_0 - c(t)),$$

其中(b_t, c_t)满足下面的微分方程组:

$$\begin{cases} b_t' = \dfrac{\theta^2}{2} - (\kappa - i\theta\lambda\rho)b_t - \dfrac{\lambda^2}{2}b_t^2, \\ c_t' = \kappa\eta b_t. \end{cases} \tag{2.7}$$

求解方程组, 得方程组的解为

$$\begin{cases} b_t = \dfrac{\theta^2(1-\mathrm{e}^{-\delta t})}{(\delta+\kappa-i\theta\lambda\rho)+(\delta-\kappa+i\theta\lambda\rho)\mathrm{e}^{-\delta t}}, \\ c_t = \dfrac{\kappa\eta}{\lambda^2}\Big[2\ln\dfrac{(2\delta-(\delta-\kappa+i\theta\lambda\rho)(1-\mathrm{e}^{-\delta t}))}{2\delta} + (\delta-\kappa+i\theta\lambda\rho)t\Big], \end{cases} \tag{2.8}$$

这里$\delta^2 = (\kappa - i\theta\lambda\rho)^2 + \theta^2\lambda^2$.

得到马氏骨架过程的特征函数的表达式后, 由公式(2.3), (2.4)可求得所需看涨期权的价格公式. 同理, 欧式看跌期权的定价公式也可以得到.

§3. MSP下方差互换的定价问题

在金融市场上, 一个非常重要的的风险因素是股票指数的波动的不确定性. 了解波动率变化和管理相关风险是非常重要的, 因为波动率是投资决策的一个重要的决定因素. 正因如此, 为了对冲波动率风险, 而从事波动率相关交易正以飞快的速度日益增长. 波动率衍生品是一类特殊的金融衍生品, 它的标的资产是建立在股票价格波动率的基础之上.

波动率衍生品通常包括: 波动率(方差)互换、波动率(方差)期权、上封顶波动率(方差)互换、Corridor方差互换及股指期货(期权)等. 如CBOE发行的3月期的标准普尔500股指期货, NYSE发行的AXE股指期货等.

波动率衍生品的引入大大的促进了投资者的风险对冲及资产组合管理, 并且已经成为了期权和证券贸易者的普遍的贸易工具. 随着波动率衍生品的交易日益普及, 从事波动率衍生品的理论研究也不断的深入. 但多数的文献都是建立在连续取样的基础上的, 而本节的内容是建立在离散取样的基础上, 研究马氏骨架过程下, 方差互换的定价问题.

方差互换是众多互换产品的一种, 它是一份远期合约, 收益基于某资产指数的实际变差. 该资产指数可以是标普500或是NASDAK指数等, 合约买方从签订方可获得的收益取决于整个合约期内实现的资产指数波动率超出合约签订时敲定的波动率的多少, 偿付额为一设定的单位乘数与此差值的乘积, 即

$$\text{payoff} = M(\sigma_R^2 - K_{\text{var}}),$$

式中, M为名义本金, σ_R^2为实际方差, K_{var}为方差互换的远期价格.

在签定方差互换的合约之前, 双方会明确实际方差的计算方式, 离散取样情况下的实际方差用$\sigma_R^2(0,N,T)$表示, 在离散取样情况下, 通常有下面计算公式: 记$s_t=\ln(S_t/S_0)$, 定义实际方差σ_R^2为

$$\sigma_R^2 = \frac{AF}{N}\sum_{i=1}^{N}(s_{t_i}-s_{t_{i-1}})^2, \tag{3.1}$$

这里的S_{t_i}是在第i次观测时间t_i时刻股票价格, 总共有N次观测. AF年化因子, 如果取样频率是每一个交易日, 假设每年有252天为交易天数, 则$AF=252$; 如果是每周为取样频率的话, 则$AF=52$, 如果按月的话, 则$AF=12$, 以此类推. 我们假设在本文中是等距离散观测, $\triangle = t_i - t_{i-1}$为常数. $t_i = i\triangle t$ $(i=1,2,\ldots,N)$. N为观测次数, T为合约到期日.

在风险中性测度下, 股票价格S_t满足下面的方程,

$$S_t = S_0\exp[rt+Y_t],$$

这里Y_t为马氏骨架过程.

则方差互换(variance swap)的远期价格定义如下:

$$K_{\text{var}} = \mathsf{E}[\sigma_R^2]. \tag{3.2}$$

下面我们借助于$s_{t,T}=s_T-s_t$的特征函数来计算远期价格.

$$\phi_{t,T} = \mathsf{E}[\exp(i\theta s_{t,T})] = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{i\theta s} q(_{t,T})\mathrm{d}s,$$

这里$q(_{t,T}) = \mathsf{P}(s_{t,T}\in[s,s+ds))$. 则

$$K_{\text{var}} = \frac{AF}{N}\sum_{i=1}^{N}\mathsf{E}[(s_{t_{i-1},t_i})^2] = -\frac{AF}{N}\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial^2\phi_{t_{i-1},t_i}}{\partial\theta^2}\Big|_{\theta=0}, \tag{3.3}$$

从上面的公式可以看出, 要求方差互换的远期价格, 只要求出s_{t_{i-1},t_i}的特征函数即可.

$$\phi_{t_{i-1},t_i}(\theta) = \mathrm{e}^{i\theta r\Delta}\mathsf{E}[\exp(i\theta(Y_{t_i} - Y_{t_{i-1}}))|\mathscr{F}_t],$$

当骨架过程及随机时间变换率满足公式(2.6)时, 求出特征函数的表达式为

$$\phi_{t_{i-1},t_i}(\theta) = \exp[\alpha(\Delta, \Phi_x(\theta)) - a(\Delta, -\beta(\Delta, \Phi_x(\theta)))\nu_t - b(\Delta, -\beta(\Delta, \Phi_x(\theta)))], \tag{3.4}$$

这里

$$\begin{aligned} a(h,\nu) &= \frac{\nu\mathrm{e}^{-h\kappa}}{1+\nu[\lambda^2/(2\kappa)](1-\mathrm{e}^{-h\kappa})}, \\ b(h,\nu) &= \frac{2\kappa\eta}{\lambda^2}\ln\left(1+\nu\frac{\lambda^2}{2\kappa}(1-\mathrm{e}^{-h\kappa})\right), \\ \alpha(\Delta,\Phi_x(\theta)) &= -\frac{\kappa'\eta}{\lambda^2}\left[2\ln\left(1-\frac{\delta-\kappa'}{2\delta}(1-\mathrm{e}^{-\delta\Delta})\right)+(\delta-\kappa')\Delta\right], \\ \beta(\Delta,\Phi_x(\theta)) &= -\frac{2\Phi_x(\theta)(1-\mathrm{e}^{-\delta\Delta})}{(\delta+\kappa')+(\delta-\kappa')\mathrm{e}^{-\delta\Delta}}, \end{aligned} \tag{3.5}$$

这里$\delta^2 = (\kappa')^2 + 2\Phi_x(\theta)\lambda^2$, $\kappa' = \kappa - i\theta\lambda\rho$, 现在将所求的特征函数及$W_t$的特征指数$\Phi_x(\theta) = \theta^2/2$代入公式(3.4)可得方差互换的远期价格:

$$K_{\text{var}} = -\frac{AF}{N}\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial^2\phi_{t_{i-1},t_i}}{\partial\theta^2}\Big|_{\theta=0}. \tag{3.6}$$

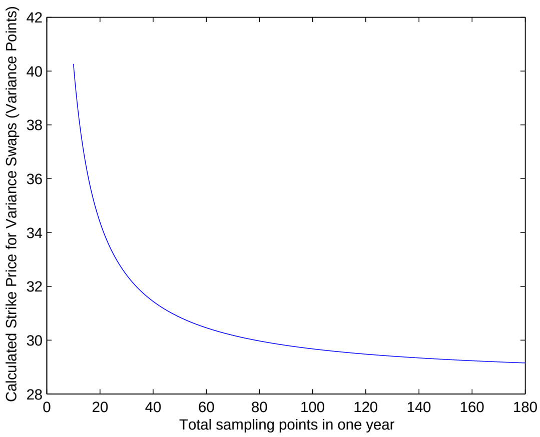

图1 方差互换的远期价格

上图选取如下参数对上述公式进行模拟(下同):

$$\kappa = 3.46, \qquad r = 0.05, \qquad T = 1, \qquad \nu_0 = 0.14, \qquad \theta = 0.009.$$

§4. MSP下波动率互换的定价问题

波动率互换本质上是一个依赖于标的资产将来的实际波动率的远期合约, 他类似于方差互换. 用M表示名义本金, 用$\sigma_R(0,N,T)$表示离散取样下的实际波动率. 用K_{vol}表示波动率互换的远期价格. 则波动率互换的到期支付函数为

$$(\sigma_R(0,N,T)-K_{\mathrm{vol}})M.$$

这里的实际波动率的计算方式如下:

$$\sigma_R(0,N,T)=\sqrt{\frac{AF}{N}\sum_{i=1}^{N}(s_{t_i}-s_{t_{i-1}})^2}. \tag{4.1}$$

下面, 我们来推导波动率互换(volatility swap)的远期价格, 定义如下:

$$K_{\mathrm{vol}}=\mathsf{E}\Big[\sqrt{\sigma_R^2}\,\Big]=\frac{AF}{N}\sqrt{\sum_{i=1}^{N}\mathsf{E}[(s_{t_{i-1},t_i})^2]}. \tag{4.2}$$

我们将利用凸函数的性质(Broadie和Jain, 2008), 来解决波动率互换的公平远期价格问题, 对于凸函数$f(x)=\sqrt{x}$, 它在x_0点的二阶Taylor展开为

$$\sqrt{x}=\sqrt{x_0}+\frac{x-x_0}{2\sqrt{x_0}}-\frac{(x-x_0)^2}{8x_0^{3/2}}+f^{(3)}(\xi)\frac{(x-x_0)^3}{3!},$$

这里$f^{(3)}(\xi)$为函数$f(x)$在ξ, $\xi\in(0,x_0)$点的三阶导数. 上面的Taylor展开在$|x-x_0|\le x_0$内都是收敛的. 现在假设$x=\sigma_R^2$, $x_0=\mathsf{E}[\sigma_R^2]$, 由Jensen不等式$\mathsf{E}\Big[\sqrt{\sigma_R^2}\,\Big]\le\sqrt{\mathsf{E}[\sigma_R^2]}$, 我们有下面的式子

$$\sqrt{\sigma_R^2}\approx\sqrt{\mathsf{E}[\sigma_R^2]}+\frac{\sigma_R^2-\mathsf{E}[\sigma_R^2]}{2\sqrt{\mathsf{E}[\sigma_R^2]}}-\frac{(\sigma_R^2-\mathsf{E}[\sigma_R^2])^2}{8\mathsf{E}[\sigma_R^2]^{3/2}}. \tag{4.3}$$

对上式两边求期望, 得

$$\mathsf{E}[\sqrt{\sigma_R^2}]\approx\sqrt{\mathsf{E}[\sigma_R^2]}-\frac{\mathsf{E}(\sigma_R^2-\mathsf{E}[\sigma_R^2])^2}{8\mathsf{E}[\sigma_R^2]^{\frac{3}{2}}}. \tag{4.4}$$

即

$$K_{\mathrm{vol}}\approx\sqrt{K_{\mathrm{var}}}-\frac{\mathsf{Var}\,(\sigma_R^2)}{8K_{\mathrm{var}}^{3/2}}. \tag{4.5}$$

而

$$\mathsf{Var}\,(\sigma_R^2)=\frac{\lambda^2\mathrm{e}^{-\kappa T}}{2\kappa^3T^2}[(2\mathrm{e}^{2\kappa T}-4\kappa T\mathrm{e}^{\kappa T}-2)(\nu_0-\eta)+\eta(2\kappa T\mathrm{e}^{2\kappa T}-3\mathrm{e}^{2\kappa T}+4\mathrm{e}^{\kappa T}-1)]. \tag{4.6}$$

故结合公式(4.5), (4.6)我们可以得到MSP下波动率互换的远期价格.

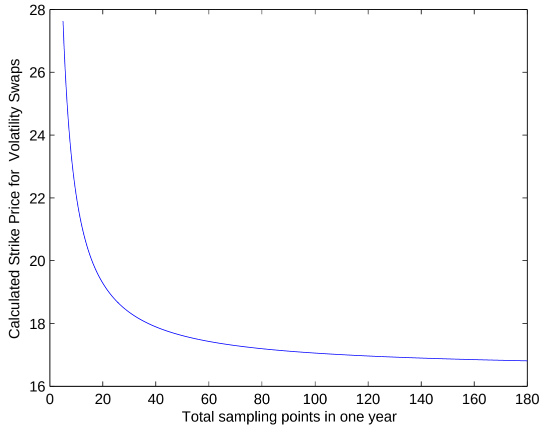

图2　MSP下波动率互换的远期价格

§5. 结 束 语

本文的主要内容是马氏骨架过程框架下几种金融衍生品的定价问题, 具体包括欧式期权的定价, 方差互换及波动率互换的定价问题. 通过求出随机变量的特征函数, 利用快速傅立叶变换(FFT)方法得到了马氏骨架过程下几种金融衍生品的定价公式. 本文的结果丰富并发展了金融衍生品的定价理论, 同时, 文中的结果可以用于其他金融衍生品的定价中. 为资产定价理论的的研究提供了新的模型.

对马氏骨架过程的深入研究, 为马氏骨架框架下金融衍生品定价问题研究创造条件. 在后续的研究中, 我们将把本文的模型应用于波动率相关的金融衍生品的定价之上.

参 考 文 献

[1] Black, F. and Scholes, M., The pricing of options and corporate liabilities, *Journal of Political Economy*, **81(3)**(1973), 637–654.

[2] Merton, R.C., Option pricing when underlying stock returns are discontinuous, *Journal of Financial Economics*, **3(1-2)**(1976), 125–144.

[3] Vasicek, O., An equilibrium characterization of the term structure, *Journal of Financial Economics*, **5(2)**(1977), 177–188.

[4] Cox, J.C., Ingersoll, Jr., J.E. and Ross, S.A., A theory of the term structure of interest rates, *Econometrica*, **53(2)**(1985), 385–408.

[5] Heston, S.L., A closed-form solution for options with stochastic volatility with applications to bond and currency options, *The Review of Financial Studies*, **6(2)**(1993), 327–343.

[6] Hou, Z.T., Liu, Z.M. and Zou, J.Z., Markov skeleton processes, *Chinese Science Bulletin*, **43(11)**(1998), 881–889.

[7] Hou, Z.T., Markov skeleton processes and applications to queueing systems, *Acta Mathematicae Applicatae Sinica, English Series*, **18(4)**(2002), 537–552.

[8] Hou, Z.T., Yuan, C.G., Zou, J.Z., Liu, Z.M., Luo, J.W., Liu, G.X. and Shi, P., Transient distribution of the length of GI/G/N queueing systems, *Stochastic Analysis and Applications*, **21(3)**(2003), 567–592.

[9] Gao, B., Liu, T.Y., Ma, Z.M., Wang, T.F. and Li, H., A general Markov framework for page importance computation, In: *Proceedings of the 18th ACM Conference on Information and Knowledge Management*, 1835–1838, 2009.

[10] Gao, B. and Liu, T.Y., Liu, Y.T., Wang, T.F., Ma, Z.M. and Li, H., Page importance computation based on Markov processes, *Information Retrieval*, **14(5)**(2011), 488–514.

[11] Liu, Y.T., Ma, Z.M. and Zhou, C., Web Markov skeleton processes and their applications, *Tohoku Mathematical Journal*, **63(4)**(2011), 665–695.

[12] Barndorff-Nielsen, O.E., Processes of normal inverse Gaussian type, *Finance and Stochastics*, **2(1)** (1997), 41–68.

[13] Carr, P., Geman, H., Madan, D.B. and Yor, M., Stochastic volatility for Lévy processes, *Mathematical Finance*, **13(3)**(2003), 345–382.

[14] Carr, P. and Madan, D.B., Option valuation using the fast Fourier transform, *Journal of Computational Finance*, **2(4)**(1999), 61–73.

[15] Duffie, D., Pan, J. and Singleton, K., Transform analysis and asset pricing for affine jump-diffusions, *Econometrica*, **68(6)**(2000), 1343–1376.

[16] Duffie, D., Filipović, D. and Schachermayer, W., Affine processes and applications in finance, *The Annals of Applied Probability*, **13(3)**(2003), 984–1053.

[17] Broadie, M. and Jain, A., The effect of jumps and discrete sampling on volatility and variance swaps, *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, **11(8)**(2008), 761–797.

Pricing Derivatives under a Markov Skeleton Process

Jia Zhaoli Zhang Fan

(*School of Mathematics, Hefei University of Technology, Hefei, 230009*)

Zhang Shuguang

(*Department of Statistics and Finance, University of Science and Technology of China, Hefei, 230026*)

In this paper, it is assumed that the underlying is a Markov skeleton process (abbreviated MSP): this process can be better reflecting the instability of the financial market. Using the properties of Markov skeleton process, the characteristic function of the price process is given, combined with fast Fourier transform (FFT) method, the pricing formula of derivatives under the Markov skeleton process is given. The results of this paper can be applied to price other financial derivatives, and it enriching the pricing theory of financial derivatives.

Keywords: Markov skeleton process, characteristic function, fast Fourier transform, price.

AMS Subject Classification: 60J30.