应用概率统计　第三十一卷
第六期　2015年12月

Chinese Journal of Applied Probability
and Statistics Vol.31 No.6 Dec. 2015

基于NGINAR(1)索赔过程的风险模型 *

史海芳　　　　王德辉⋆

(中国民航大学理学院, 天津, 300300)　　(吉林大学数学研究所, 长春, 130012)

摘　要

本文考虑了一种索赔过程基于一阶几何整值自回归(NGINAR(1))时间序列的风险模型, 给出了该模型调节系数所满足的方程, 并通过数值例子分析了各阶段索赔次数之间相依性对调节系数和破产概率的影响. 模拟结果表明, 随着各阶段索赔次数之间相依性的增大, 调节系数逐渐减小, 同时破产概率逐渐增大.

关键词: 风险模型, NGINAR(1), 调节系数, 破产概率.

学科分类号: O212.3.

§1. 引　　言

风险理论主要是处理保险实务经营中的随机风险模型, 一般可分为连续时间模型和离散时间模型. 离散风险模型的盈余过程定义为

$$U(k)=u+ck-S(k),\qquad k=0,1,2,\ldots,$$

其中u为时刻$k=0$时的初始盈余, c为单位时间内收取的保险费, $S(k)=W_1+W_2+\cdots+W_k$表示在前k个阶段总的理赔量. 在经典离散风险模型中, 假设$\{W_k,k\in N^+\}$为一独立同分布(i.i.d.)的随机变量序列(r.v.'s). 为了更好反映保险商业的特征, 文献中引进的保险模型越来越复杂. 国内外一些学者考虑了$W_1,W_2,\ldots$不再独立时的情形, 最初考虑的是线性模型. 例如, Gerber (1982)考虑了$\{W_k,k\in N^+\}$满足Gaussian自回归时间序列时的风险模型, Promislow (1991)考虑了$\{W_k,k\in N^+\}$满足Gaussian滑动平均时间序列时的风险模型. 后来, Cossette等(2010, 2011)考虑了$\{W_k,k\in N^+\}$为复合Poission分布的情况. Cossette等(2010, 2011)中令$W_k=\sum\limits_{i=1}^{X_k}Y_{k,i}$, $k\in N^+$, 其中X_k表示第k阶段的索赔次数, 第k阶段个别理赔量序列$\{Y_{k,i},i\in N^+\}$为i.i.d. r.v.'s, 且与$\{X_k,k\in N^+\}$独立; $\{X_k,k\in N^+\}$是一Poission INAR(1)过程, 满足$X_k=\alpha\circ X_{k-1}+\epsilon_k$, 其中$\alpha\circ X_{k-1}=\sum\limits_{i=1}^{X_{k-1}}\delta_{k-1,i}$, 且

---

*国家自然科学基金(11271155, 11401573, 61401467)和中央高校基本科研业务费基金(3122014D047, 3122014K013)资助.

⋆通讯作者, E-mail: wangdh@jlu.edu.cn.

本文2012年3月16日收到, 2015年4月13日收到修改稿.

doi: 10.3969/j.issn.1001-4268.2015.06.001

$\{\epsilon_k, k\in N^+\}$为服从参数为λ的Poission随机变量序列, $\{\delta_{k-1,i}, i\in N^+\}$为服从参数为$\alpha$的两点分布随机变量序列. 这样Cossette等(2010, 2011)将整值时间序列引入了风险模型. 整值时间序列是最近几年学术界研究的热点, 但是其在风险模型中的应用还处在起步阶段. 本文受Cossette等(2010, 2011)的启发, 考虑了另一种基于整值时间序列的风险模型:

$$\begin{cases} U_T = u + cT - S_T, \\ S_T = \sum\limits_{i=1}^{N_T} Y_i, \\ N_T = \sum\limits_{j=1}^{T} X_j, \\ X_j = \alpha * X_{j-1} + \epsilon_j, \qquad j\geq 2,\ \alpha\in[0,1), \\ \alpha * X_{j-1} = \sum\limits_{i=1}^{X_{j-1}} W_i, \end{cases} \tag{1.1}$$

其中u, c, S_T的定义同经典离散风险模型; Y_i表示第i次索赔额, 且$\{Y_i, i\geq 1\}$为独立同分布的随机变量序列; X_i表示第i阶段的索赔次数, 且已知X_1服从参数为$\mu/(1+\mu)$ $(\mu>0)$的几何分布, 即$\mathsf{P}(X_1=x)=\mu^x/(1+\mu)^{x+1}$, $x=0,1,2,\ldots$, 均值$\mathsf{E}(X_1)=\mu$, 方差$\mathsf{Var}\,(X_1)=\mu(1+\mu)$; $\{W_i, i\geq 1\}$和$\{\epsilon_j, j\geq 2\}$均为独立同分布于参数为$\alpha/(1+\alpha)$的几何分布随机变量序列; 且$\{\epsilon_j, j\geq 2\}$, $\{W_i, i\geq 1\}$, $\{X_{j-l}, j\geq 2, l\geq 1\}$相互独立. Ristic等(2009)称$X_j=\alpha * X_{j-1}+\epsilon_j$为一阶几何整值自回归(NGINAR(1))过程, 所以我们称模型(1.1)为基于一阶几何整值自回归(NGINAR(1))索赔过程的风险模型.

本文首先给出了模型(1.1)的几个基本统计性质; 其次, 基于调节系数是一个刻画破产概率的重要指标, 本文得到了模型的调节系数所满足的方程, 这也是本文的主要结果; 最后, 数值例子部分给出了当索赔额为指数分布时, 调节系数和破产概率的几组数值解. 模拟结果表明, 随着各阶段索赔次数之间相依性的增大, 调节系数逐渐减小, 同时破产概率逐渐增大.

§2. 预备知识

本部分以引理的形式给出模型(1.1)的一些统计性质, 这些性质都是本文理论推导的基础. 下面首先给出$\{X_j\}$的矩及条件矩.

引理 2.1 对于$j\geq 2$而言,

(i) $\mathsf{E}(X_j|X_{j-1})=\alpha X_{j-1}+\alpha$.

(ii) $\mathsf{Var}\,(X_j|X_{j-1})=\alpha(1+\alpha)(1+X_{j-1})$.

(iii) 若$\mathsf{E}X_1=\alpha/(1-\alpha)$, 则$\mathsf{E}X_j=\alpha/(1-\alpha)$.

(iv) 若$\mathsf{E}X_1=\alpha/(1-\alpha)$, $\mathsf{Var}\,X_1=a/(1-b)$, 则$\mathsf{Var}\,X_j=a/(1-b)$, 其中$a=\alpha(1+\alpha)/(1-\alpha)$, $b=\alpha^2$.

(v) $\mathsf{Cov}\,(X_{j+k}, X_j) = \alpha^k \mathsf{Var}\,(X_j)$, $j \geq 0$.

证明: (i)-(iv)中的结论显然, (v)的证明见附录. $\square$

在特殊情况下, 可以得到模型中每个阶段的索赔次数$X_1, \ldots, X_j, \ldots$具有相同的分布.

引理 2.2 若$\mu = \alpha/(1-\alpha)$, 则$X_2, \ldots, X_j, \ldots$均服从参数为$\mu/(1+\mu)$的几何分布.

证明: 因为X_1服从参数为$\mu/(1+\mu)$的几何分布, $\{W_i, i \geq 1\}$独立同分布于参数为$\alpha/(1+\alpha)$的几何分布, $\{\epsilon_j, j \geq 2\}$也独立同分布于参数为$\alpha/(1+\alpha)$的几何分布. 记$\Phi_X(r)$, $|r| \leq 1$表示随机变量X的的概率母函数, 则$\Phi_{W_1}(r) = \Phi_{\epsilon_1}(r) = 1/[1+\alpha(1-r)]$, $\Phi_{X_1}(r) = 1/[1+\mu(1-r)]$. 又$X_2 = \alpha * X_1 + \epsilon_2$, 从而有

$$
\begin{aligned}
\Phi_{X_2}(r) &= \Phi_{X_1}(\Phi_{W_1}(r))\Phi_{\epsilon_2}(r) \\
&= \frac{1}{1+\mu(1-\Phi_{W_1}(r))} \cdot \frac{1}{1+\alpha(1-r)} \\
&= \frac{1}{1+[\alpha/(1-\alpha)][1-1/(1+\alpha(1-r))]} \cdot \frac{1}{1+\alpha(1-r)} \\
&= \frac{1}{1+[\alpha/(1-\alpha)](1-r)} = \frac{1}{1+\mu(1-r)}.
\end{aligned}
$$

即X_2服从参数为$\mu/(1+\mu)$的几何分布. 同理可得$X_3, \ldots, X_j, \ldots$均服从参数为$\mu/(1+\mu)$的几何分布. $\square$

§3. 调节系数

调节系数是一个刻画破产概率的重要指标, 本部分通过几个定理给出模型(1.1)的调节系数所满足的方程.

首先给出几个基本概念. 风险模型(1.1)的破产时刻定义为

$$T_0 = \inf\{T | U_T < 0, T \geq 0\},$$

如果对$\forall T \geq 0$都有$U_T > 0$, 则记$T_0 = \infty$. 破产概率定义为

$$\psi(u) = \mathsf{P}(T_0 < \infty | U_0 = u).$$

本文始终假设安全条件$cT - \mathsf{E}(S_T) > 0$成立. Rolski等(1999)给出了一个著名的Lundberg结果

$$\lim_{u\to\infty} -\frac{\ln(\psi(u))}{u} = R, \tag{3.1}$$

其中R是模型(1.1)的调节系数. 定义凸函数,

$$c_T(r) = \frac{1}{T}\ln(\mathsf{E}[\mathrm{e}^{r(S_T - cT)}]). \tag{3.2}$$

由Nyrhinen (1998)及Muller和Pflug (2001)可知调节系数R为下式的解,

$$c(r)=\lim_{T\to\infty}c_T(r)=0. \tag{3.3}$$

用$M_X(r)$表示随机变量X的矩母函数, $\Phi_X(r)$, $|r|\le 1$表示X的概率母函数. 则有

$$\begin{aligned}M_{S_T}(r)&=\mathsf{E}[\mathrm{e}^{rS_T}]=\sum_{k=0}^{\infty}\mathsf{E}\Big[\mathrm{e}^{r\sum\limits_{i=1}^{N_T}Y_i}\Big|N_T=k\Big]\mathsf{P}(N_T=k)\\&=\sum_{k=0}^{\infty}[\mathsf{E}\mathrm{e}^{rY_i}]^k\mathsf{P}(N_T=k)=\Phi_{N_T}(\mathsf{E}\mathrm{e}^{rY_i})\\&=\Phi_{N_T}(M_Y(r)).\end{aligned} \tag{3.4}$$

首先, 定理3.1给出了$\Phi_{N_T}(r)=\mathsf{E}[r^{X_1+X_2+\cdots+X_T}]$的表达式.

定理 3.1 令$\Phi_{N_T}(r)$表示模型(1.1)中N_T的概率母函数, 则有

$$\Phi_{N_T}(r)=a_1(r)a_2(r)\cdots a_{T-1}(r)b_T(r),\qquad T=1,2,\ldots,$$

其中

$$a_1(r)=\Phi_\epsilon(r),\ a_2(r)=\Phi_\epsilon(ra_1(r)),\ \ldots,\ a_{T-1}(r)=\Phi_\epsilon(ra_{T-2}(r)); \tag{3.5}$$

$$b_1(r)=\Phi_{X_1}(r),\ b_2(r)=\Phi_{X_1}(ra_1(r))),\ \ldots,\ b_T(r)=\Phi_{X_1}(ra_{T-1}(r)); \tag{3.6}$$

$$\Phi_\epsilon(r)=\frac{1}{1+\alpha(1-r)},\qquad \Phi_{X_1}(r)=\frac{1}{1+\mu(1-r)}.$$

证明: 因为$\{W_i,i\ge 1\}$, $\{\epsilon_j,j\ge 2\}$均为独立同分布随机变量序列, 方便起见, 我们记$\Phi_W(r)$, $\Phi_\epsilon(r)$分别表示$\{W_i,i\ge 1\}$, $\{\epsilon_j,j\ge 2\}$的概率母函数.

由模型(1.1)的假设知$\Phi_\epsilon(r)=\Phi_W(r)$.

又

$$\begin{aligned}X_2&=\alpha*X_1+\epsilon_2,\\X_3&=\alpha*\alpha*X_1+\alpha*\epsilon_2+\epsilon_3,\\&\ \ \vdots\\X_T&=(\alpha*)^{(T-1)}X_1+(\alpha*)^{(T-2)}\epsilon_2+\cdots+\epsilon_T,\end{aligned}$$

其中$(\alpha*)^{(T-1)}$表示$\underbrace{\alpha*\alpha*\cdots*\alpha*}_{T-1}$. 所以有

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{T}X_i=&\ \epsilon_T+(\epsilon_{T-1}+\alpha*\epsilon_{T-1})+\cdots+(\epsilon_2+\alpha*\epsilon_2+\cdots+(\alpha*)^{(T-2)}\epsilon_2)\\&+(X_1+\alpha*X_1+\cdots+(\alpha*)^{(T-1)}X_1).\end{aligned}$$

从而,

$$\Phi_{N_T}(r) = \mathsf{E}r^{\epsilon_T}\mathsf{E}r^{\epsilon_{T-1}+\alpha*\epsilon_{T-1}}\cdot\cdots\cdot\mathsf{E}r^{\epsilon_2+\alpha*\epsilon_2+\cdots+(\alpha*)^{(T-2)}\epsilon_2}$$
$$\cdot\,\mathsf{E}r^{X_1+\alpha*X_1+\cdots+(\alpha*)^{(T-1)}X_1}.$$

若记

$$a_1(r) = \mathsf{E}r^{\epsilon_2},\ a_2(r) = \mathsf{E}r^{\epsilon_2+\alpha*\epsilon_2},\ \ldots,\ a_{T-1}(r) = \mathsf{E}r^{\epsilon_2+\alpha*\epsilon_2+\cdots+(\alpha*)^{(T-2)}\epsilon_2}. \tag{3.7}$$

$$b_1(r) = \mathsf{E}r^{X_1},\ b_2(r) = \mathsf{E}r^{X_1+\alpha*X_1},\ \ldots,\ b_T(r) = \mathsf{E}r^{X_1+\alpha*X_1+\cdots+(\alpha*)^{(T-1)}X_1}. \tag{3.8}$$

又因为$\{\epsilon_j, j\geq 2\}$为独立同分布随机变量序列, 所以

$$\Phi_{N_T}(r) = a_1(r)\cdot a_2(r)\cdot\cdots\cdot a_{T-1}(r)\cdot b_T(r). \tag{3.9}$$

由(3.7), (3.8)式得, $a_1(r) = \Phi_\epsilon(r)$, $b_1(r) = \Phi_{X_1}(r)$.

当$T\geq 3$时, 根据条件期望的性质有,

$$\begin{aligned}
a_{T-1}(r) &= \mathsf{E}r^{\epsilon_2+\alpha*\epsilon_2+\cdots+(\alpha*)^{(T-2)}\epsilon_2}\\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\mathsf{E}(r^{\epsilon_2+\alpha*\epsilon_2+\cdots+(\alpha*)^{(T-2)}\epsilon_2}|\epsilon_2=k)\mathsf{P}(\epsilon_2=k)\\
&= \sum_{k=0}^{\infty}(\mathsf{E}r^{1+W_1+\cdots+(\alpha*)^{(T-3)}W_1})^k\mathsf{P}(\epsilon_2=k)\\
&= \Phi_\epsilon(r\cdot\mathsf{E}r^{W_1+\cdots+(\alpha*)^{(T-3)}W_1})\\
&= \Phi_\epsilon(r\cdot a_{T-2}(r)).
\end{aligned}$$

同理, 当$T\geq 2$时, 有

$$\begin{aligned}
b_T(r) &= \mathsf{E}r^{X_1+\alpha*X_1+\cdots+(\alpha*)^{(T-1)}X_1}\\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\mathsf{E}(r^{X_1+\alpha*X_1+\cdots+(\alpha*)^{(T-1)}X_1}|X_1=k)\mathsf{P}(X_1=k)\\
&= \sum_{k=0}^{\infty}(\mathsf{E}r^{1+W_1+\cdots+(\alpha*)^{(T-2)}W_1})^k\mathsf{P}(X_1=k)\\
&= \Phi_{X_1}(r\cdot\mathsf{E}r^{W_1+\cdots+(\alpha*)^{(T-2)}W_1})\\
&= \Phi_{X_1}(r\cdot a_{T-1}(r)).
\end{aligned}$$

定理证毕. $\square$

简单起见, 下文中$a_j(r)$, $b_j(r)$分别记做a_j, b_j, $j=1,2,\ldots$.

定理 3.2 (3.5)式定义的函数列$\{a_n, n \in N^+\}$具有如下两个性质:

(i) 当$0 \le r \le 1$时, $\{a_n, n \in N^+\}$是一单调递减的有界函数列, 极限为

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a;$$

(ii) 当$-1 \le r < 0$时, $\{a_n, n \in N^+\}$是一非单调有界函数列, 且极限存在, 亦有

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a;$$

其中$a = [1+\alpha-\sqrt{(1+\alpha)^2-4\alpha r}\,]/(2\alpha r)$.

证明: (i) 先证有界性. 当$0 \le r \le 1$时, $1-r \in [0,1]$, 又$\alpha \in [0,1)$, 所以$\alpha(1-r) \in [0,1)$, 从而$a_1 = \Phi_\epsilon(r) = 1/[1+\alpha(1-r)] \in (1/2,1]$, 即$a_1 \in (1/2,1]$. 假设$a_{n-1} \in (1/2,1]$成立, 则有$ra_{n-1} \in [0,1]$, 所以$1-ra_{n-1} \in [0,1]$, 从而$\alpha(1-ra_{n-1}) \in [0,1)$, 也就有$1+\alpha(1-ra_{n-1}) \in [1,2)$, 即$1/[1+\alpha(1-ra_{n-1})] = a_n \in (1/2,1]$. 故由数学归纳法, 对于任意的$n \in N^+$有$a_n \in (1/2,1]$, 即$\{a_n, n \in N^+\}$是有界函数列.

下证单调性. 由$a_1 \in (1/2,1]$, $r \in [0,1]$, $\alpha \in [0,1)$得$1/[1+\alpha(1-r)] \ge 1/[1+\alpha(1-ra_1)]$, 即$a_1 \ge a_2$. 假设$a_{n-1} \ge a_n$成立, 则$1-ra_{n-1} \le 1-ra_n$, 从而$1+\alpha(1-ra_{n-1}) \le 1+\alpha(1-ra_n)$, 所以$1/[1+\alpha(1-ra_{n-1})] \ge 1/[1+\alpha(1-ra_n)]$, 即$a_n \ge a_{n+1}$成立. 从而由数学归纳法, 对于任意的$n \in N^+$有$a_n \ge a_{n+1}$, 即$\{a_n, n \in N^+\}$是单调递减函数列.

综上所述, $\{a_n, n \in N^+\}$是一单调递减的有界函数列, 故其极限存在. 不妨设$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, 则有

$$a = \Phi_\epsilon(ra) = \frac{1}{1+\alpha(1-ra)}.$$

解之得, $a = [1+\alpha \pm \sqrt{(1+\alpha)^2-4\alpha r}\,]/(2\alpha r)$. 又$a \le 1$, 故$a = [1+\alpha-\sqrt{(1+\alpha)^2-4\alpha r}\,]/(2\alpha r)$.

(ii) 先证有界性. 当$-1 \le r < 0$时, 又$\alpha \in [0,1)$, 易得$a_1 \in (1/3,1]$. 假设$a_{n-1} \in (1/3,1]$成立, 则$ra_{n-1} \in [-1,0)$, 从而$1-ra_{n-1} \in (1,2]$, 所以$\alpha(1-ra_{n-1}) \in [0,2)$, 也就有$1+\alpha(1-ra_{n-1}) \in [1,3)$, 即有$1/[1+\alpha(1-ra_{n-1})] = a_n \in (1/3,1]$. 故由数学归纳法, 对于任意的$n \in N^+$有$a_n \in (1/3,1]$, 即$\{a_n, n \in N^+\}$是有界函数列.

下面讨论单调性. 由$r \in [-1,0)$, $\alpha \in [0,1)$, $a_2 \in (1/3,1]$, 可得

$$\frac{1}{1+\alpha(1-r)} \le \frac{1}{1+\alpha(1-ra_2)},$$

即$a_1 \le a_3$. 由$r \in [-1,0)$, $\alpha \in [0,1)$, $a_1 \le a_3$, 可得

$$\frac{1}{1+\alpha(1-ra_1)} \ge \frac{1}{1+\alpha(1-ra_3)},$$

即$a_2 \ge a_4$. 即当$m=1$时, 有$a_{2m-1} \le a_{2m+1}$, $a_{2m} \ge a_{2m+2}$.

假设当$m=k-1$时, $a_{2m-1}\le a_{2m+1}$, $a_{2m}\ge a_{2m+2}$成立, 即$a_{2k-3}\le a_{2k-1}$, $a_{2k-2}\ge a_{2k}$. 那么, 由$r\in[-1,0)$, $\alpha\in[0,1)$, $a_{2k-2}\ge a_{2k}$可得$1/[1+\alpha(1-ra_{2k-2})]\le 1/[1+\alpha(1-ra_{2k})]$, 即$a_{2k-1}\le a_{2k+1}$. 再由$a_{2k-1}\le a_{2k+1}$同理可得$1/[1+\alpha(1-ra_{2k-1})]\ge 1/[1+\alpha(1-ra_{2k+1})]$, 即$a_{2k}\ge a_{2k+2}$. 也就是说当$m=k$时, 亦有$a_{2m-1}\le a_{2m+1}$, $a_{2m}\ge a_{2m+2}$成立. 故由数学归纳法, 对于任意的$m\in N^+$有$a_{2m-1}\le a_{2m+1}$, $a_{2m}\ge a_{2m+2}$.

综上, 我们可以得到函数列$\{a_n,n\in N^+\}$的两个单调有界的子列:

$$a_1\le a_3\le a_5\le\cdots\le a_{2m-1}\le a_{2m+1}\le\cdots, \tag{3.10}$$

$$a_2\ge a_4\ge a_6\ge\cdots\ge a_{2m}\ge a_{2m+2}\ge\cdots, \tag{3.11}$$

其中$m=1,2,\ldots$. 显然, 子列(3.10)(3.11)的极限都存在, 不妨设

$$\lim_{m\to\infty}a_{2m+1}=a',\qquad \lim_{m\to\infty}a_{2m}=a'',$$

则

$$a'=\Phi_\epsilon(r\Phi_\epsilon(ra')),\qquad a''=\Phi_\epsilon(r\Phi_\epsilon(ra'')).$$

解之得$a'=a''=a=[1+\alpha-\sqrt{(1+\alpha)^2-4\alpha r}\,]/(2\alpha r)$, 所以$\lim\limits_{m\to\infty}a_n=a$. 定理证毕. □

定理 3.3 (3.6)式定义的函数列$\{b_n,n\in N^+\}$具有如下两个性质:

(i) 当$0\le r\le 1$时, $\{b_n,n\in N^+\}$是一单调递减的有界函数列, 极限为

$$\lim_{n\to\infty}b_n=b;$$

(ii) 当$-1\le r<0$时, $\{b_n,n\in N^+\}$是一非单调有界函数列, 且极限存在, 亦有

$$\lim_{n\to\infty}b_n=b;$$

其中$b=2/[2+\mu-\mu/\alpha+(\mu/\alpha)\sqrt{(1+\alpha)^2-4\alpha r}\,]$.

证明: 证法同定理3.2, 略. □

下述定理给出了调节系数所满足的方程, 当给出索赔额变量的分布时即可得到调节系数的具体解.

定理 3.4 (3.3)式定义的$c(r)$满足

$$c(r)=\ln a(M_Y(r))-cr, \tag{3.12}$$

其中$a(M_Y(r))=[1+\alpha-\sqrt{(1+\alpha)^2-4\alpha M_Y(r)}\,]/[2\alpha M_Y(r)]$. 方程(3.12)的非零正解记做$R$, 称为模型(1.1)的调节系数.

证明: 由(3.2)(3.3)式及定理3.1得,

$$c(r)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\ln[a_1(M_Y(r))\cdot a_2(M_Y(r))\cdot\cdots\cdot a_{T-1}(M_Y(r))\cdot b_T(M_Y(r))]-cr.$$

再由定理3.2和定理3.3得,

$$\begin{aligned}&\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\ln[a_1(M_Y(r))\cdot a_2(M_Y(r))\cdot\cdots\cdot a_{T-1}(M_Y(r))\cdot b_T(M_Y(r))]\\=&\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\ln\left[a_1(M_Y(r))\cdot a_2(M_Y(r))\cdot\cdots\cdot a_{T-1}(M_Y(r))\cdot a_T(M_Y(r))\cdot\frac{b_T(M_Y(r))}{a_T(M_Y(r))}\right]\\=&\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}[\ln a_1(M_Y(r))+\ln a_2(M_Y(r))+\cdots+\ln a_T(M_Y(r))]+\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\ln\frac{b_T(M_Y(r))}{a_T(M_Y(r))}\\=&\lim_{T\to\infty}\ln a_T(M_Y(r))+\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\ln b_T(M_Y(r))-\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\ln a_T(M_Y(r))\\=&\ln a(M_Y(r))+0+0\\=&\ln a(M_Y(r)).\end{aligned}$$

从而有, $c(r)=\ln a(M_Y(r))-cr$. 定理证毕. □

由定理3.4, $c(r)$对α求偏导得

$$\begin{aligned}\frac{\partial c(r)}{\partial\alpha}&=\frac{1-[2(1+\alpha)-4M_Y(r)]/[2\sqrt{(1+\alpha)^2-4\alpha M_Y(r)}]}{1+\alpha-\sqrt{(1+\alpha)^2-4\alpha M_Y(r)}}-\frac{2M_Y(r)}{2\alpha M_Y(r)}\\&=\frac{1+\sqrt{(1+\alpha)^2-4\alpha M_Y(r)}}{\alpha\sqrt{(1+\alpha)^2-4\alpha M_Y(r)}}-\frac{1}{\alpha}\\&=\frac{1}{4\sqrt{(1+\alpha)^2-4\alpha M_Y(r)}}\\&>0.\end{aligned}$$

也就是说, 若$\alpha<\alpha'$, 则$r>r'$. 这一结论在数值模拟部分得到了验证.

§4. 数值例子

当给出索赔额Y的分布时, 可得到调节系数R所满足的具体方程. 对于一个风险组合, 通常情况下假设索赔额变量服从指数分布. 我们不妨假设假设索赔额Y服从参数为β的指数分布, 则有$M_Y(r)=\beta/(\beta-r)$, 将其代入(3.12)式并令$c(r)=0$, 得

$$\ln\frac{1+\alpha-\sqrt{(1+\alpha)^2-4\alpha\beta/(\beta-r)}}{2\alpha\beta/(\beta-r)}-cr=0,$$

整理得

$$\alpha\beta e^{2cr}+r(1+\alpha)e^{cr}-\beta(1+\alpha)e^{cr}-r+\beta=0. \tag{4.1}$$

下面我们用牛顿下山法给出方程(4.1)的数值解. 另外, 由(3.1)式, 不难得到破产概率$\psi(u)$的近似值为e^{-Ru}, 这里模拟结果我们也给出了e^{-Ru}的值.

假设索赔额变量Y服从均值$1/\beta=1$的指数分布, 初始准备金$u=10$, 相对安全附加费因子$\eta=\mathsf{E}(S_T)/(cT)-1=c\beta(1-\alpha)/\alpha-1$为20% (假设引理2.2的条件成立). 表1给出了α取不同值时对应的调节系数的值以及破产概率的近似值. 由表中数据知, 随着α的增大调节系数R逐渐减小, 也就意味着随着α的增大破产概率逐渐增大.

表1　$\beta=1$, $\eta=20\%$, $u=10$时的模拟结果

α	0.25	0.5	0.75	0.995
c	0.4000	1.2000	3.6000	238.800
R	0.1017988	0.04459726	0.01009626	3.4838e-6
e^{-Ru}	0.3613212	0.6402013	0.9039668	0.9999652

表2　$\beta=5$, $\eta=20\%$, $u=10$时的模拟结果

α	0.25	0.5	0.75	0.995
c	0.08	0.24000	0.72000	47.7600
R	0.508994	0.2229863	0.05048132	1.7419e-5
e^{-Ru}	0.006158386	0.1075431	0.6036183	0.9998258

表3　$\beta=10$, $\eta=30\%$ $u=1$时的模拟结果

α	0.25	0.5	0.75	0.995
c	0.04333333	0.13	0.39000	25.8700
R	1.398099	0.5981028	0.1317282	4.454102e-5
e^{-Ru}	0.2470661	0.5498539	0.8765792	0.9999555

表2和表3分别给出了β,η,u分别取另两组参数值时, α取不同值时对应的调节系数的值以及破产概率近似值. 由表中数据亦有随着α的增大调节系数R逐渐减小, 破产概率逐渐增大.

附　　录

引理2.1(v)的证明:

(v) 令$(\alpha*)^k$表示$\underbrace{\alpha*\alpha*\cdots*\alpha*}_{k}$, 注意到

$$\begin{aligned}X_{j+k}&=\alpha*X_{j+k-1}+\epsilon_{j+k}=\alpha*(\alpha*X_{j+k-2}+\epsilon_{j+k-1})+\epsilon_{j+k}\\&=\alpha*\alpha*X_{j+k-2}+\alpha*\epsilon_{j+k-1}+\epsilon_{j+k}=\cdots\\&=(\alpha*)^kX_j+(\alpha*)^{k-1}\epsilon_{j+1}+\cdots+\alpha*\epsilon_{j+k-1}+\epsilon_{j+k}.\end{aligned}$$

因为$\{\epsilon_{j+k},k>0\}$与X_j独立, 所以

$$\begin{aligned}\mathsf{Cov}\,(X_{j+k},X_j)&=\mathsf{Cov}\,((\alpha*)^kX_j,X_j)\\&=\mathsf{E}[X_j((\alpha*)^kX_j)]-\mathsf{E}(X_j)\mathsf{E}((\alpha*)^kX_j).\end{aligned}$$

反复利用条件期望可得,

$$\begin{aligned}\mathsf{E}[X_j((\alpha*)^kX_j)]&=\mathsf{E}\{\mathsf{E}[X_j((\alpha*)^kX_j)|X_j,(\alpha*)^{k-1}X_j]\}\\&=\mathsf{E}(X_j\cdot\alpha\cdot(\alpha*)^{k-1}X_j)\\&=\mathsf{E}\{\mathsf{E}[X_j((\alpha*)^{k-1}X_j)|X_j,(\alpha*)^{k-2}X_j]\}\\&=\alpha\mathsf{E}(X_j\cdot\alpha\cdot(\alpha*)^{k-2}X_j)\\&=\cdots=\alpha^k\mathsf{E}(X_j^2).\end{aligned}$$

类似手法可知,

$$\mathsf{E}((\alpha*)^kX_j)=\alpha^k\mathsf{E}(X_j),$$

因此,

$$\mathsf{Cov}\,(X_{j+k},X_j)=\alpha^k\mathsf{E}(X_j^2)-\alpha^k[\mathsf{E}(X_j)]^2=\alpha^k\mathsf{Var}\,(X_j).\qquad\Box$$

参 考 文 献

[1] Gerber, H.U., Ruin theory in the linear model, *Insurance: Mathematics and Economics*, **1(3)**(1982), 213–217.

[2] Promislow, S.D., The probability of ruin in a process with dependent increments, *Insurance: Mathematics and Economics*, **10(2)**(1991), 99–107.

[3] Cossette, H., Marceau, E. and Maume-Deschamps, V., Discrete-time risk models based on time series for count random variables, *ASTIN Bulletin*, **40(1)**(2010), 123–150.

[4] Cossette, H., Marceau, E. and Toureille, F., Risk models based on time series for count random variables, *Insurance: Mathematics and Economics*, **48(1)**(2011), 19–28.

[5] Ristic, M.M., Bakouch, H.S. and Nastic, A.S., A new geometric first-order integer-valued autoregressive (NGINAR(1)) process, *Journal of Statistical Planning and Inference*, **139(7)**(2009), 2218–2226.

[6] Rolski, T., Schmidli, H., Schmidt, V. and Teugels, J., *Stochastic Processes for Insurance and Finance*, John Wiley and Sons, 1999.

[7] Nyrhinen, H., Rough descriptions of ruin for a general class of surplus processes, *Advances in Applied Probability*, **30(4)**(1998), 1008–1026.

[8] Muller, A. and Pflug, G., Asymptotic ruin probabilities for risk processes with dependent increments, *Insurance: Mathematics and Economics*, **28(3)**(2001), 381–392.

A Risk Model base on NGINAR(1) Claims Process

Shi Haifang

(*College of Science, Civil Aviation University of China, Tianjin, 300300*)

Wang Dehui

(*Institute of Mathematics, Jilin University, Changchun, 130012*)

A new risk model is constructed, where the total number of claims satisfies the geometric first-order integer-valued autoregressive process. Moreover, we obtain the equation of the adjustment coefficient. We discuss the relationships among the dependence on the number of claims in each period, the adjustment coefficient, and ruin probability by numerical simulations. The results show that, with the increase of the dependence on the number of claims in each period, the adjustment coefficient decrease and ruin probability increase gradually.

Keywords: Risk model, NGINAR(1), adjustment coefficient, ruin probability.

AMS Subject Classification: 62L10.